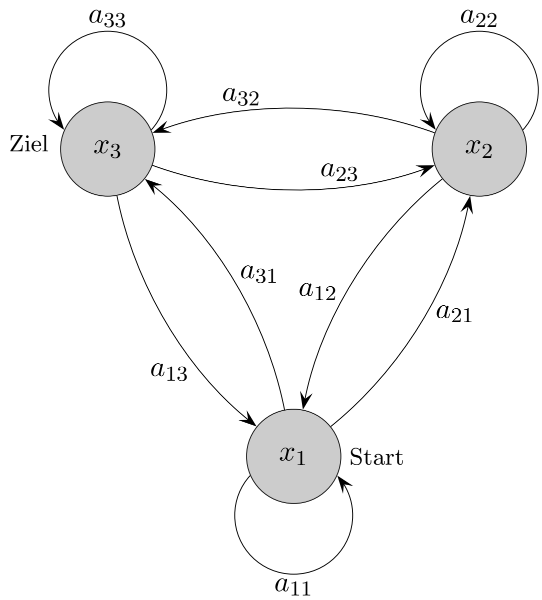
Coates Formel



Die Lösungen des Gleichungssystems wie z. B.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

können dem zugehörigen Flussgraphen entnommen werden.

Nach der Cramerschen Regel gilt z. B.

$$x_3 \;=\; \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\det G} \qquad \text{mit} \qquad \det G \;=\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

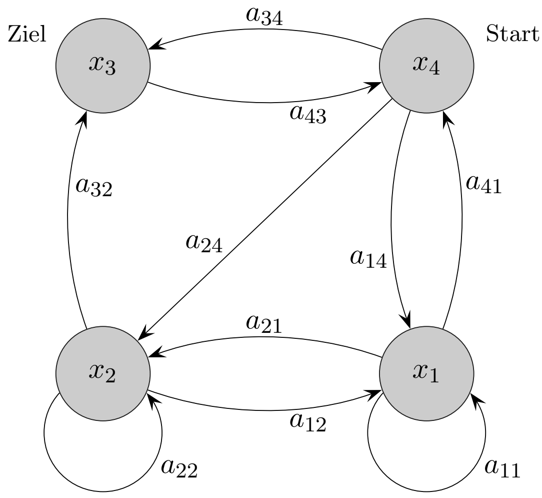
$$x_3 = -\frac{a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}}{\underbrace{-a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{23}a_{12}}_{\text{jeweils 1 Schleife}}\underbrace{+a_{22}a_{31}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33}}_{\text{jeweils 2 Schleifen}} - \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{\text{3 Schleifen}}} \qquad \text{(mit } -1 \text{ erweitert)}$$

Wie in der Mason-Formel führt die Berechnung der Determinanten zu Pfaden und Schleifen im Graphen, Start x_1 (1 steht an erster Stelle), Ziel x_3. $a_{21}a_{32}a_{13}$ ist das Produkt der Schleife $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$.

$$x_3 \;=\; -\frac{\sum \big[\text{ direktes Pfadprodukt}_{1\to 3}\big(-\sum S_k^* + \sum S_k^* S_m^* - \ldots +\big)\big],\;\; S_i^* \text{ jeweils disjunkt zum Pfad}}{-\sum S_k + \sum S_k S_m - \sum S_k S_m S_n - \ldots +,\;\; \text{disjunkte Schleifenprodukte}}$$

Bis auf die Einschränkung im Zähler umfasst jedes Schleifenprodukt im Gegensatz zur Mason-Formel (siehe absorbierende Markow-Ketten) alle Knoten. Dies trifft auch für Pfadprodukte zu, falls keine disjunkten S_i^* existieren. Stände auf der rechten Seite des Gleichungssystems an erster Stelle statt einer 1 allgemeiner ein d, so wäre die Lösung mit d zu multiplizieren. Stände d an zweiter Stelle, so wären für x_3 die Pfade $2 \longrightarrow 3$ zu betrachten. Für z. B. d_1 an erster Stelle und d_2 an zweiter wären die Berechnungen einzeln durchzuführen und zu addieren.

Coates Formel



Betrachten wir ein weiteres Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

z. B. gilt:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det G} \qquad \text{mit} \qquad \det G = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

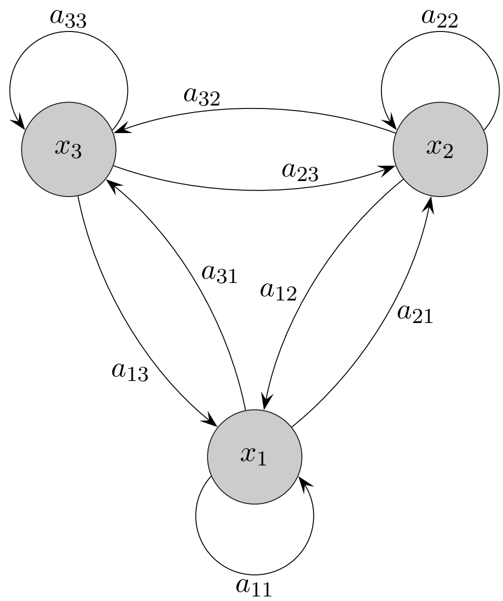
$$x_3 = -\frac{a_{14}a_{21}a_{32} - a_{24}a_{32}a_{11} - a_{34}a_{21}a_{12} + a_{34}a_{11}a_{22}}{\underbrace{-a_{21}a_{32}a_{43}a_{14}}_{\text{1 Schleife}} + \underbrace{a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} + a_{21}a_{12}a_{43}a_{34}}_{\text{jeweils 2 Schleifen}} - \underbrace{a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}}_{\text{3 Schleifen}}}$$

$a_{14}a_{21}a_{32}$ ist das Produkt des direkten Pfades $4 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$, Start x_4, Ziel x_3 (1 an 4. Stelle).

$$x_3 = -\frac{\sum \Big[\text{ direktes Pfadprodukt}_{1\to 3}\big(-\sum S_k^* + \sum S_k^* S_m^* - \ldots +\big)\Big],\ \ S_i^* \text{ jeweils disjunkt zum Pfad}}{-\sum S_k + \sum S_k S_m - \sum S_k S_m S_n + \ldots -,\ \ \text{disjunkte Schleifenprodukte}}$$

Um das Minus-Zeichen vor dem Bruch einzusparen, kann ein neuer Anfangsknoten mit der Belegung -1 (bzw. $-d$) eingefügt werden, Coates 1958.

Begründungen



Stellen wir zunächst den Bezug der Determinante

$$\det G \;=\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

zum Graphen her und erinnern an die Definition einer Determinante.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Aus jeder Spalte und Zeile ist ein Element zu entnehmen.
Das Vorzeichen lassen wir zunächst außer Acht.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ ergibt die Schleife $a_{31}a_{23}a_{12}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ ergibt das Schleifenpaar $a_{31}a_{13}$ und a_{22}.

Vorzeichen

Für die Bestimmung des Vorzeichens eines Summanden betrachten wir die an 1. Stelle stehenden (schwarzen) Zeilenindizes. Also z. B. für $a_{11}a_{32}a_{23}$ (1,3,2). Diese Reihenfolge geht in (1,2,3) über, indem 2 Zahlen vertauscht werden (1 Transposition).
Für (2,3,1) werden 2 Transpositionen benötigt. Das Vorzeichen der Determinantensummanden wird durch

$$(-1)^{\text{Anzahl der benötigten Transpositionen}} \qquad \text{bestimmt.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei eine Schleife (losgelöst vom Beispiel) für $n = 4$ (Anzahl der Variablen)
durch $a_{31}a_{43}a_{24}a_{12}$ gegeben, d. h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Hier sind $n-1 = 3$ Transpositionen erforderlich.
Für ein Schleifenpaar sind es $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n - 2$ Transpositionen $(n_1 + n_2 = n)$,
für ein Schleifentripel $n - 3$.

Der Nenner der Coates-Formel lautet daher ($(-1)^{n-l} = (-1)^n \cdot (-1)^l$, l Anzahl der Schleifen):

$$(-1)^n \cdot (-\sum S_k + \sum S_k S_m - \sum S_k S_m S_n + \sum S_k S_m S_n S_p - \ldots +)$$

Umgekehrt sind alle Summanden in der Determinante enthalten.

Der Zähler hat die Form (hier wird x_4 beim Start in x_3 ermittelt):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} \end{vmatrix}$$

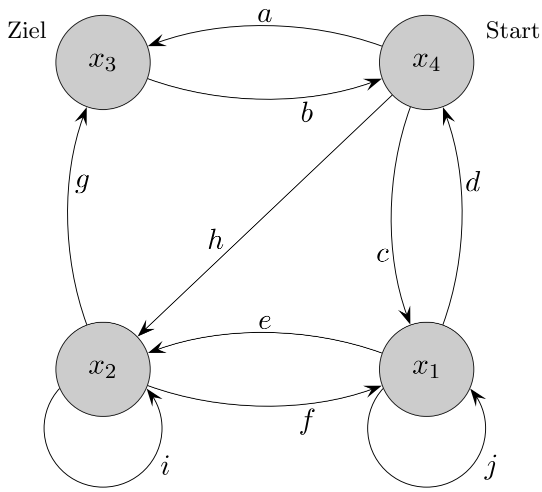
Es entstehen Terme wie (beachte $a_{34} = 1$ und $(-1)^{\text{Anzahl der benötigten Transpositionen}}$):

$$\underbrace{(-1)^1 a_{43}\, a_{34}}_{a_{43}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix} \quad \text{oder}$$

$$\underbrace{(-1)^2 a_{13}a_{41}\, a_{34}}_{a_{13}a_{41}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{25} \\ a_{52} & a_{55} \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \underbrace{(-1)^3 a_{53}a_{15}a_{41}\, a_{34}}_{a_{53}a_{15}a_{41}} a_{22}$$

Im Zähler taucht daher der Faktor $(-1)^{n-1}$ auf. $(-1)^n$ und kann gekürzt werden, ein $-$Zeichen verbleibt.
$-P$(direkter Pfad (Knoten werden nicht mehrfach passiert) von 3 nach 4)$(-\sum S_k^* + \sum S_k^* S_m^* - \ldots +)$
S_i^* wie im Nenner, jedoch disjunkt zum Pfad. (Bei mehreren Pfaden sind die Terme zu summieren.)

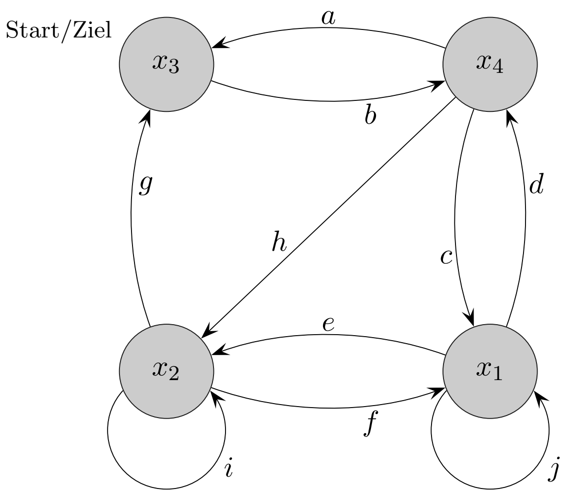
Coates Formel



$$\begin{pmatrix} j & f & 0 & c \\ e & i & 0 & h \\ 0 & g & 0 & a \\ d & 0 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -\frac{ceg - hgj - aef + aji}{\underbrace{-egbc}_{\text{1 Schleife}} + \underbrace{jgbh + efba}_{\text{jeweils 2 Schleifen}} - \underbrace{jiab}_{\text{3 Schleifen}}}$$

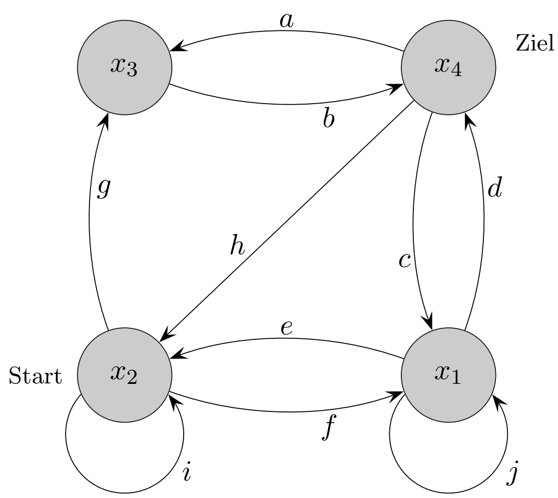
Coates Formel



$$\begin{pmatrix} j & f & 0 & c \\ e & i & 0 & h \\ 0 & g & 0 & a \\ d & 0 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -\frac{-hfd + icd}{\underbrace{-egbc}_{\text{1 Schleife}} + \underbrace{jgbh + efba}_{\text{jeweils 2 Schleifen}} - \underbrace{jiab}_{\text{3 Schleifen}}}$$

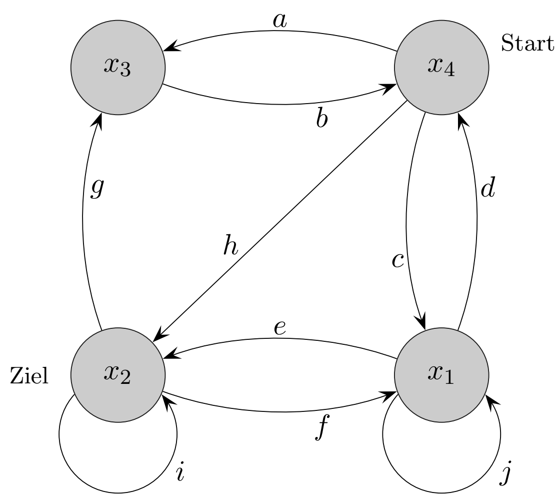
Coates Formel



$$\begin{pmatrix} j & f & 0 & c \\ e & i & 0 & h \\ 0 & g & 0 & a \\ d & 0 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = -\frac{gbj}{\underbrace{-egbc}_{\text{1 Schleife}} + \underbrace{jgbh + efba}_{\text{jeweils 2 Schleifen}} - \underbrace{jiab}_{\text{3 Schleifen}}}$$

Coates Formel

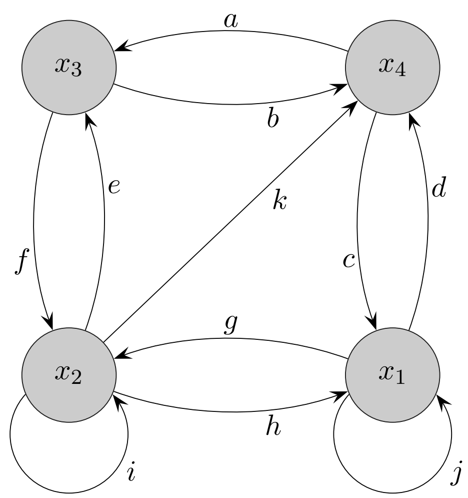


$$\begin{pmatrix} j & f & 0 & c \\ e & i & 0 & h \\ 0 & g & 0 & a \\ d & 0 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = -\frac{0}{\underbrace{-egbc}_{\text{1 Schleife}} + \underbrace{jgbh + efba}_{\text{jeweils 2 Schleifen}} - \underbrace{jiab}_{\text{3 Schleifen}}} = 0$$

Es gibt keine Pfadprodukte (mit disjunkten Schleifen), die alle Knoten berücksichtigen.

Coates Formel



$$\begin{pmatrix} j & h & 0 & c \\ g & i & f & 0 \\ 0 & e & 0 & a \\ d & k & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = -\frac{(daf - gab)d_1 + abjd_2 + (bcg - fcd)d_3}{\underbrace{-afhd - bcge}_{\text{jeweils 1 Schleife}} + \underbrace{cdef + abgh + afkj}_{\text{jeweils 2 Schleifen}} \underbrace{-ijab}_{\text{3 Schleifen}}}$$