1. Clifford-Algebra
2. $Cl_{0,3}$ vereinfachte Schreibweise
3. Geometrisches Produkt $\circ$, Beispielrechnung
4. $Cl_{0,n}$, $\boldsymbol{e}_1^2 = \ldots = \boldsymbol{e}_n^2 = 1$
5. Konstruktion der Clifford-Algebra $Cl_{0,n}$
6. $Cl_k(\mathbb{R}^n)$
7. $Cl_2(\mathbb{R}^3)$
8. $Cl_1(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{C}$ und $Cl_2(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{H}$

Grassmann-Algebra

$\uparrow$ Clifford-Algebra

Clifford entdeckte 1878 wie aus Grassmann-Algebren durch geringfügige Abänderung der Multiplikation vielfältige Strukturen entstehen.

Die Verbindung von Grassmann-Algebra $\bigwedge(\mathbb{R}^2)$ und Quaternionen ist nicht offensichtlich.

	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	0	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	0
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	0	0
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	0	0	0

	1	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
1	1	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	-1	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	-1	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	-1

$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$ beschreibt im $\mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt, desgleichen gilt $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=k$.
Wenn man nun $\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_i=-1$ abändert, ansonsten alle Rechenregeln der Grassmann-Algebra beibehält ($\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j=-\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_i$ für $i\neq j$), liegen mit $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{k}$ die Quaternionen vor.
$\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_i=-1$ kann als (erweiterte) Skalarmultiplikation aufgefasst werden.
Die Assoziativität der neuen Verknüpfung ist allerdings noch zu zeigen.
Das Verknüpfungszeichen wird beibehalten.

Rechenbeispiele

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}\wedge(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}) &= \boldsymbol{e}_2\wedge(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2)\\ &= -\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1\\ &= \boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j})\wedge\boldsymbol{j} &= (\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2)\wedge\boldsymbol{e}_2\\ &= -\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2)\wedge(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2) &= -\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_2\\ &= -1\end{aligned}$$

Die obige Grassmann-Algebra wird zu einer weiteren Clifford-Algbra fortgesetzt. Man teste die Assoziativität.

	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	1	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	1	$-\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1$	-1

↑ Clifford-Algebra

Aus $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$

	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	0	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	0	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0
$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	0
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	0	0	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	0	0
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	0	0	0	0	0	0	0

entsteht mit $\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_i = 1$ die Clifford-Algebra $Cl_{0,3}$:

	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	1	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	1	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	1	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	-1	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	-1	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	-1	$-\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1$	-1

Die verschiedenen Algebren $Cl_k(\mathbb{R}^n)$ ergeben sich durch die Festlegungen:
$\boldsymbol{e}_1^2 = \ldots = \boldsymbol{e}_k^2 = -1,\ \boldsymbol{e}_{k+1}^2 = \ldots = \boldsymbol{e}_n^2 = 1$ mit $\boldsymbol{e}_i^2 = \boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_i$.
Alternative Bezeichnung $Cl_{s,t}$ mit $\boldsymbol{e}_1^2 = \ldots = \boldsymbol{e}_s^2 = -1,\ \boldsymbol{e}_{s+1}^2 = \ldots = \boldsymbol{e}_{s+t}^2 = 1$.

$\uparrow$ $Cl_{0,3}$ vereinfachte Schreibweise

Clifford-Algebra $Cl_{0,3}$

$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_{12}$, usw.

	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_{12}$	$\boldsymbol{e}_{13}$	$\boldsymbol{e}_{23}$	$\boldsymbol{e}_{123}$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_{12}$	$\boldsymbol{e}_{13}$	$\boldsymbol{e}_{23}$	$\boldsymbol{e}_{123}$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	1	$\boldsymbol{e}_{12}$	$\boldsymbol{e}_{13}$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_{123}$	$\boldsymbol{e}_{23}$
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_{12}$	1	$\boldsymbol{e}_{23}$	$-\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_{123}$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_{13}$
$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_{13}$	$-\boldsymbol{e}_{23}$	1	$\boldsymbol{e}_{123}$	$-\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_{12}$
$\boldsymbol{e}_{12}$	$\boldsymbol{e}_{12}$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_{123}$	-1	$-\boldsymbol{e}_{23}$	$\boldsymbol{e}_{13}$	$-\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_{13}$	$\boldsymbol{e}_{13}$	$-\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_{123}$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_{23}$	-1	$-\boldsymbol{e}_{12}$	$\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_{23}$	$\boldsymbol{e}_{23}$	$\boldsymbol{e}_{123}$	$-\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_{13}$	$\boldsymbol{e}_{12}$	-1	$-\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_{123}$	$\boldsymbol{e}_{123}$	$\boldsymbol{e}_{23}$	$-\boldsymbol{e}_{13}$	$\boldsymbol{e}_{12}$	$-\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1$	-1

Die reellen Zahlen können eingebettet werden, indem die 1 als reelle Zahl interpretiert wird. Für Skalare ist dann $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$ und $\alpha \wedge \boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}$.

Für eine bilineare, antisymmetrische Verknüpfung gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \bullet (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= a_1b_1(\boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{e}_1) + a_2b_2(\boldsymbol{e}_2 \bullet \boldsymbol{e}_2) + a_3b_3(\boldsymbol{e}_3 \bullet \boldsymbol{e}_3) + \\ &\qquad (a_2b_3 - a_3b_2)(\boldsymbol{e}_2 \bullet \boldsymbol{e}_3) + (a_3b_1 - a_1b_3)(\boldsymbol{e}_3 \bullet \boldsymbol{e}_1) + (a_1b_2 - a_2b_1)(\boldsymbol{e}_1 \bullet \boldsymbol{e}_2) \end{aligned}$$

Mit $\boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{e}_i = 1$ wird in der Grassmann-Algebra die Definition des geometrischen Produkts $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} := \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ motiviert ($\cdot$ ist das Skalarprodukt). Es entsteht eine Clifford-Algebra.

$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{x} = 1$ ist eindeutig lösbar. Für das Skalar- und Dachprodukt ist das nicht der Fall.

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}}_{1} + \underbrace{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{x}}_{0} = 1$$

Die Lösungen für $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = 1$ bilden eine Ebene, die senkrecht zu $\boldsymbol{a}$ verläuft.
Die Lösungen für $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{x} = 0$ bilden die Gerade $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a}$.
Die Schnittbedingung $\boldsymbol{a} \cdot \lambda\boldsymbol{a} = 1$ ergibt ein eindeutiges λ. Wir erhalten: $\boldsymbol{a}^{-1} = \dfrac{1}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j, \quad i \neq j$
$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$

$$\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} -\boldsymbol{e}_j \circ \boldsymbol{e}_i \ , & i \neq j \\ \quad 1 \ , & i = j \end{cases}$$

Für $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ gilt $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a}$ und für $i \neq j$
$(\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j)^2 = (\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j) \circ (\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j) = -(\boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_i) \circ (\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j) = -\boldsymbol{e}_j \circ (\boldsymbol{e}_i \circ \boldsymbol{e}_i) \circ \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \circ 1 \circ \boldsymbol{e}_j = -1.$
Die wiederholte Anwendung dieser Regeln führt zur obigen Verknüpfungstafel.

$\uparrow$ Geometrisches Produkt $\circ$, Beispielrechnung

Das geometrische Produkt $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ in der Grassmann-Algebra ermöglicht vielfältige Umformungen, z. B.:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})^2 &= (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) \circ (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) && 1 \\
&= (\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \circ (\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) && |\, \boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} \\
&= (\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \circ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}) && |\, \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a} \\
&= (\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b})\circ(\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}) && |\, \text{beachte } \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \in \mathbb{R} \\
&= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})[\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}] - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 && |\, \boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \in \mathbb{R} \\
&= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 && |\, \boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\
&= 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 \\
&= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 \\
&= \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\alpha - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2(\cos^2\alpha - 1) \\
&= -\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\sin^2\alpha
\end{aligned}
$$

Hier wird sowohl in der Grassmann- als auch in der Clifford-Algebra $\wedge$ als Verknüpfungszeichen verwendet.

Grassmann bezeichnete das Wedge-Produkt als äußeres oder progressives Produkt, da es eine höhere Dimension erzeugt oder null ist, das Skalarprodukt als inneres Produkt und das geometrische Produkt als mittleres Produkt. In *Sur les différents genres de multiplication*, Crelle's Journal Bd. 49, zeigt Grassmann, dass mit $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b} := -\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ die Quaternionen-Multiplikation vorliegt, siehe $\uparrow$ Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre.

In der Literatur wird für das geometrische Produkt statt $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ häufig vereinfachend $\boldsymbol{ab}$ geschrieben.

$\uparrow\ Cl_{0,n},\ \boldsymbol{e}_1^2 = \ldots = \boldsymbol{e}_n^2 = 1$

Multiplikation

Sei $\boldsymbol{e}_m$ gemeinsamer Faktor zweier Basiselemente.
$\boldsymbol{e}_m$ kann durch a bzw. b Vertauschungen an die 1. Stelle gebracht werden.
Wir legen daher fest:

$$\big((-1)^a \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}\big) \wedge \big((-1)^b \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l}\big) = (-1)^{a+b+k} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l}$$

Damit $\boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_m$ vorliegt und dann verschwindet, sind weitere k Vertauschungen erforderlich.

Assoziativität

$$\begin{aligned}
\big(\boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l}\big) \wedge \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{p_s} &= \\
(-1)^k \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l} \wedge \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{p_s} &= \\
(-1)^{k+k+l} \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l} \wedge \boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{p_s} &= \\
(-1)^l \ldots &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \big(\boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l} \wedge \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{p_s}\big) \\
&= (-1)^l \boldsymbol{e}_m \wedge \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{j_l} \wedge \boldsymbol{e}_{p_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{p_s}
\end{aligned}$$

Die Assoziativität der Grassmann-Algebra wird verwendet.
Mehrere gemeinsame Faktoren sind entsprechend nach links zu tauschen
und in der Definition der Verknüpfung zu berücksichtigen.

Vereinfachte Rechnung:

$$(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_5) \wedge (\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_5) = -\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \quad (= -\boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3)$$

Mit 2 benachbarten Transpositionen kann $\boldsymbol{e}_5 \wedge \boldsymbol{e}_5$ um eine Stelle versetzt werden.

Umkehrung der Reihenfolge

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 = (-1)^{1+2+3} \boldsymbol{e}_4 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1$$

Division mit Basiselementen

$$\big(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}\big) \wedge \big(\boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \boldsymbol{e}_{i_1}\big) = 1$$

Allgemein in $Cl_k(\mathbb{R}^n)$ (unmittelbar einsichtig):

$$\big(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}\big) \wedge \frac{1}{\big(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}\big) \wedge \big(\boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \boldsymbol{e}_{i_1}\big)} \big(\boldsymbol{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \boldsymbol{e}_{i_1}\big) = 1$$

↑ Konstruktion der Clifford-Algebra $Cl_{0,n}$ mit $\boldsymbol{e}_i^2 = 1$

Die Herleitung der Grassmann-Algebra wird abgeändert.

Den Produkten $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k, \ldots$ werden Teilmengen zuordnen.

Wir gehen von einem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der Basis $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ aus und betten ihn in einen Vektorraum der Dimension 2^n ein (hängen genügend Nullen dran).
Er ist nun Teilraum von $\mathbb{R}^{2^n}$.
Die $\boldsymbol{e}_i$ werden zu einer Basis des $\mathbb{R}^{2^n}$ ergänzt.
Die Basiselemente indizieren wir mit den 2^n Teilmengen von n, so dass wir haben $\boldsymbol{e}_{\{1\}} = \boldsymbol{e}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_{\{n\}} = \boldsymbol{e}_n,\ \boldsymbol{e}_{\{1,2\}},\ \boldsymbol{e}_{\{1,3\}}, \ldots,\ \boldsymbol{e}_{\{1,\ldots,n\}},\ \boldsymbol{e}_{\{\,\}}$,

und definieren eine Multiplikation mit Hilfe der symmetrischen Differenz[1], $R\Delta S = (R \cup S) \setminus (R \cap S)$.

$$\boldsymbol{e}_R \wedge \boldsymbol{e}_S = \prod_{r\in R,\, s\in S} (r,s)\ \boldsymbol{e}_{R\Delta S} \qquad \text{mit} \qquad (r,s) = \begin{cases} 1 & r \le s \\ -1 & r > s \end{cases}$$

Beispiele

$\boldsymbol{e}_{\{1,3\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2\}} = (1,2)(3,2)\boldsymbol{e}_{\{1,2,3\}} = -\boldsymbol{e}_{\{1,2,3\}}$

$\boldsymbol{e}_{\{1,2\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3\}} = \boldsymbol{e}_{\{1,3\}}$ Die Indexmengen haben ein gemeinsames Element.

$\boldsymbol{e}_{\{1,3,5\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3\}} = -\boldsymbol{e}_{\{1,2,5\}}$

$\boldsymbol{e}_{\{1,3,4\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3,4\}} = -\boldsymbol{e}_{\{1,2\}}$

$\boldsymbol{e}_{\{2,3,5\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{7,8\}} = (-1)^{3\cdot 2}\boldsymbol{e}_{\{7,8\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3,5\}}$ Die 6 Faktoren wechseln beim Übergang von (r,s) nach (s,r) das Vorzeichen.

$\boldsymbol{e}_{\{\,\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3,4\}} = \boldsymbol{e}_{\{2,3,4\}}$ Für das leere Produkt setzen wir 1. Das Basiselement $\boldsymbol{e}_{\{\,\}}$ ist somit das Einselement.

$\boldsymbol{e}_{\{i\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{i\}} = \boldsymbol{e}_{\{\,\}} = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{e}_{\{1,2,3,4\}} = \boldsymbol{e}_{\{1\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,3,4\}} = \boldsymbol{e}_{\{1\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{3,4\}} = \boldsymbol{e}_{\{1\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{3\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{4\}}$

Assoziativität (nicht offensichtlich, obwohl Δ assoziativ ist)

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_R \wedge \boldsymbol{e}_S) \wedge \boldsymbol{e}_T &= \prod_{r\in R,\, s\in S} (r,s)\ \boldsymbol{e}_{R\Delta S} \wedge \boldsymbol{e}_T \\
&= \prod_{r\in R,\, s\in S} (r,s) \prod_{h\in R\Delta S,\, t\in T} (h,t)\ \boldsymbol{e}_{R\Delta S\Delta T} \\
&= \prod_{r\in R,\, h\in S\Delta T} (r,h) \prod_{s\in S,\, t\in T} (s,t)\ \boldsymbol{e}_{R\Delta S\Delta T} \\
&= \boldsymbol{e}_R \wedge (\boldsymbol{e}_S \wedge \boldsymbol{e}_T)
\end{aligned}$$

für R, S, T paarweise disjunkt siehe Grassmann-Algebra

Durch gemeinsame Elemente können zusätzliche ( )-Terme entstehen, jedoch stets paarweise.
$(\boldsymbol{e}_{\{1,5,7\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{4,7\}}) \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,7\}} = \boldsymbol{e}_{\{1,5,7\}} \wedge (\boldsymbol{e}_{\{4,7\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,7\}})$ Rechts tritt $(7,k)$ mit $7 > k$ doppelt auf, $k = 2$.

[1]Für eine 0/1-Darstellung von Teilmengen ist das die bitweise Addition modulo 2.

$\uparrow$ Konstruktion der Clifford-Algebra $Cl_k(\mathbb{R}^n)$

Festlegungen (z. B.): $\mathbb{R}^4$
$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2^2 = -1,\ \boldsymbol{e}_3^2 = \boldsymbol{e}_4^2 = 1$

Multiplikation auf $Cl_{2,2}$

$$\boldsymbol{e}_R \wedge \boldsymbol{e}_S = \prod_{r\in R,\, s\in S} (r,s)\ \boldsymbol{e}_{R\Delta S} \qquad \text{mit} \qquad (r,s) = \begin{cases} -1 & (1,1)\ \text{oder}\ (2,2) \\ 1 & (3,3)\ \text{oder}\ (4,4) \\ 1 & r<s \\ -1 & r>s \end{cases}$$

Mehr bedarf es nicht.

Beispiele $Cl_2(\mathbb{R}^8)$

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 = -\mathbf{1}$$

$$(\boldsymbol{e}_{\{1,5\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{4,7\}}) \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,7\}} = (5{,}4)\,\boldsymbol{e}_{\{1,4,5,7\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,7\}} = (5{,}4)(4{,}2)(5{,}2)(7{,}2)\,\boldsymbol{e}_{\{1,2,4,5\}} = \boldsymbol{e}_{\{1,2,4,5\}}$$

$$\boldsymbol{e}_{\{1,5\}} \wedge (\boldsymbol{e}_{\{4,7\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,7\}}) = (4{,}2)(7{,}2)\,\boldsymbol{e}_{\{1,5\}} \wedge \boldsymbol{e}_{\{2,4\}} = (4{,}2)(7{,}2)(5{,}2)(5{,}4)\,\boldsymbol{e}_{\{1,2,4,5\}} = \boldsymbol{e}_{\{1,2,4,5\}}$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_5)\wedge(\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_5) &= -\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_5\wedge\boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_5 \\ &= \ \ \boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_5\wedge\boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_5 \\ &= \ \ \boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_5\wedge\boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_5 \\ &= -\boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_5\wedge\boldsymbol{e}_5 = -\mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_5)\wedge(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3) &= (-1)^3\,\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_5\wedge\boldsymbol{e}_3 \\ &= (-1)^{3\cdot 2-1}\,\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_5) \end{aligned}$$

allgemein

$$\boldsymbol{e}_R\wedge\boldsymbol{e}_S = (-1)^{|R|\cdot|S|\,-\,|R\cap S|}\,\boldsymbol{e}_S\wedge\boldsymbol{e}_R \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{e}_R\wedge\boldsymbol{e}_S\wedge\boldsymbol{e}_R^{-1} = (-1)^{|R|\cdot|S|\,-\,|R\cap S|}\,\boldsymbol{e}_S$$

$$\boldsymbol{e}_R\wedge\boldsymbol{e}_S = -\boldsymbol{e}_S\wedge\boldsymbol{e}_R\ \ (\boldsymbol{e}_R\wedge\boldsymbol{e}_S = \boldsymbol{e}_S\wedge\boldsymbol{e}_R) \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} (|R|\ \text{oder}\ |S|\ \text{gerade})\ \text{und}\ R\cap S\ \text{ungerade (gerade)} \\ (|R|\ \text{und}\ |S|\ \text{ungerade})\ \text{und}\ R\cap S\ \text{gerade (ungerade)} \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j\big[\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_i\big] = 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \boldsymbol{e}_i^2 = 2\,\underbrace{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}_{\text{Skalarprodukt}} \qquad \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{e}_i \quad \boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{e}_j$$

$$(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_5\wedge\boldsymbol{e}_6)\wedge(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4\wedge\boldsymbol{e}_5\wedge\boldsymbol{e}_6) = (-1)^{1+2+3+4+5}\,\boldsymbol{e}_1^2\boldsymbol{e}_2^2\boldsymbol{e}_3^2\boldsymbol{e}_4^2\boldsymbol{e}_5^2\boldsymbol{e}_6^2$$

↑ Clifford-Algebra $Cl_2(\mathbb{R}^3) = Cl_{2,1}$

$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2^2 = -1,\ \boldsymbol{e}_3^2 = 1$

	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	-1	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	-1	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	1	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	-1	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	1	$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	1	$\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$	$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_3$	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1$	-1

Inverse

Inverse existieren nicht für $\boldsymbol{e}_3 \pm 1$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_3^2 &= 1 \\ \Longrightarrow \quad \boldsymbol{e}_3^2 - 1 &= 0 \\ \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{e}_3 - 1)\wedge(\boldsymbol{e}_3 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Würde ein Inverses z. B. für $\boldsymbol{e}_3 - 1$ existieren, so folgte durch Multiplikation $\boldsymbol{e}_3 + 1 = 0$ und damit $\boldsymbol{e}_3 = -1$.

$$(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j)^{-1}\wedge(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j) = 1 \qquad \text{für } i \neq j, \quad (\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j)^{-1} = \frac{1}{(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j)^2}\,(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j)$$

$$(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3)\wedge(\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1) = 1$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3 \\ &= \underbrace{\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3}_{\text{Inv. existiert}}\wedge\underbrace{(\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2)}_{\text{Inv. existiert}} \end{aligned}$$

↑ Isomorphien

$Cl_{1,0} = Cl_1(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{C}$

$Cl_1(\mathbb{R}^2)$	1	$\boldsymbol{e}_1$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	-1

$\mathbb{C}$	1	i
1	1	i
i	i	-1

$Cl_{2,0} = Cl_2(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{H}$ Quaternionen

$Cl_2(\mathbb{R}^2)$	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$
1	1	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_1$	-1	$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$	-1	$\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_2$	$-\boldsymbol{e}_1$	-1

$\mathbb{H}$	1	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
1	1	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	-1	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	-1	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	-1

Bei der Behandlung der Grassmann-Algebra hatte ich mich an der Ausarbeitung einer von E. Artin 1960/61 an der Universität Hamburg gehaltenen Vorlesung *Analytische Geometrie und Algebra II* orientiert.
Der (naheliegende) Übergang zur Clifford-Algebra erfolgte 2016 ohne Vorlage.
Eine direkte Konstruktion der Clifford-Algebra entdeckte ich dann in dem Buch *GEOMETRIC ALGEBRA* von E. Artin, 1957 (hätte ich mir auch denken können).

Grassmann-Algebra
Startseite