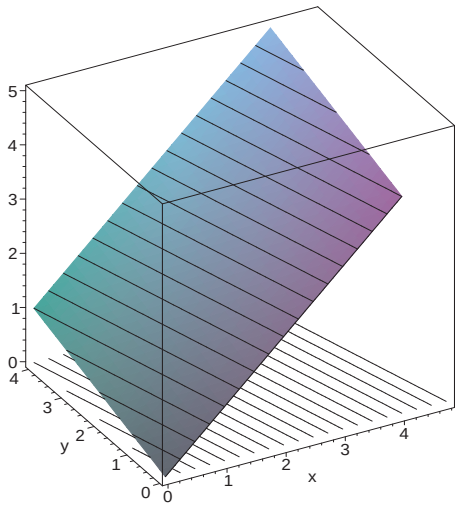
Charakteristiken-Methode



Wir fertigen ein einfaches Beispiel, um die Idee zu erkennen,
und gehen von der Funktion $u(x,y) = x + \frac{1}{4}y$ aus.
Es gilt $u(x,0) = x$.

$$\begin{aligned} u_x &= 1 \\ u_y &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

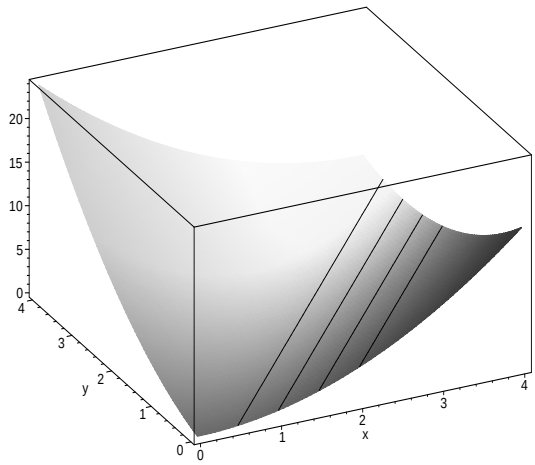
Der Graph der Lösung der partiellen Differenzialgleichung $u_x - 4\,u_y = 0$
mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = x$ ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.
Diese Ebene kann dadurch erhalten werden, dass zu jedem Kurvenpunkt $(a,0,a)$ der Anfangsbedingung eine Gerade $\big(x_a(s), y_a(s), z_a(s)\big)$ (*charakteristische Kurve*) mit den Parametern a und s konstruiert wird, die in der Ebene liegt. Aus der Geradenschar erhalten wir durch Übergang zu den x- und y-Koordinaten die Lösung $u(x,y)$.
Betrachten wir für ein festes a (den Index lassen wir jetzt weg) die Funktion $s \longrightarrow u\big((x(s), y(s)\big)$
und deren Ableitung $\frac{du(...)}{ds} = u_x\big((x(s), y(s)\big)\,x'(s) + u_y\big((x(s), y(s)\big)\,y'(s)$.

Ein Vergleich mit $u_x - 4\,u_y = 0$ bzw. $u_x\big((x(s), y(s)\big) - 4\,u_y\big((x(s), y(s)\big) = 0$
führt zu folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= 1 & \frac{dy}{ds} &= -4 & \frac{du}{ds} &= 0 \\ x(0) &= a & y(0) &= 0 & u(0) &= a \\ x(s) &= s + a & y(s) &= -4s & u(s) &= a \\ & & & & & a = x - s,\ s = -\frac{1}{4} \\ & & & & u(x,y) &= x + \frac{1}{4}y \end{aligned}$$

Die 1. Zeile ergibt sich aus dem Vergleich.
2. Zeile: Die Parametrisierung wird so gewählt, dass für $s = 0$ die Anfangsbedingung erfüllt ist.
4. Zeile: Beim Integrieren wurde die Anfangsbedingung berücksichtigt.
4. Zeile: Hierdurch erfolgt der Übergang von $u(s)$, genauer $u(a,s)$, nach $u(x,y)$.

Weiteres Beispiel



$u_x + u_y = 2, \quad u(x,0) = x^2$

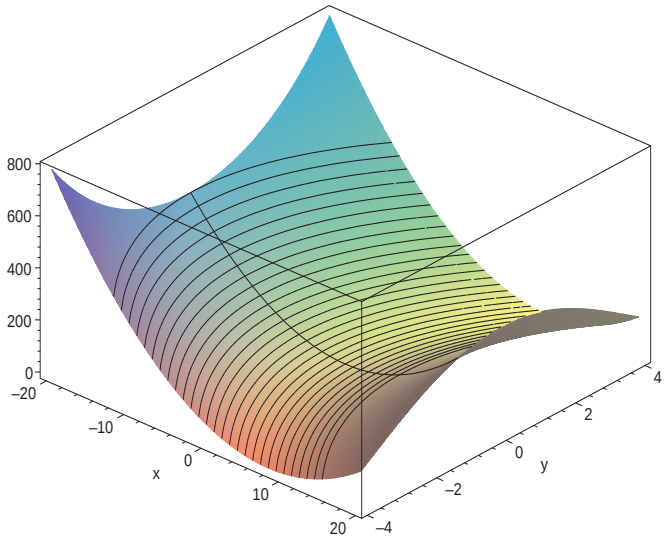
$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= 1 \\ x(0) &= a \\ x(s) &= s + a \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= 1 \\ y(0) &= 0 \\ y(s) &= s \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{du}{ds} &= 2 \\ u(0) &= a^2 \\ u(s) &= 2s + a^2 \end{aligned}$$

$$a = x - s, \; s = y$$

$$u(x,y) = 2y + (x-y)^2$$

In der Grafik sind die Anfangsbedingung als Parabel
und vier Geraden der Schar $K_a(s) = \left[s + a,\, s,\, 2s + a^2\right]$ zu erkennen.

Weiteres Beispiel



$$yu_x + u_y = 2, \quad u(x,0) = x^2$$

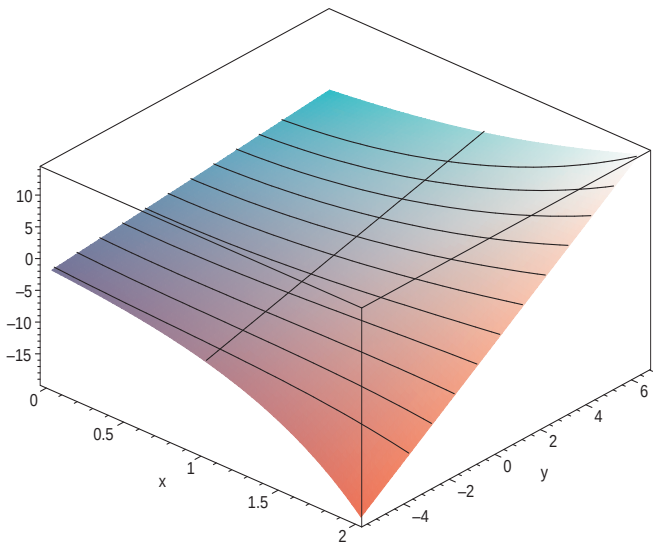
$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= y \\ x(0) &= a \\ \frac{dx}{ds} &\overset{*}{=} s \\ x(s) &= \frac{s^2}{2} + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= 1 \\ y(0) &= 0 \\ y(s) &= s \ * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= 2 \\ u(0) &= a^2 \\ u(s) &= 2s + a^2 \\ & \qquad\qquad a = x - \frac{s^2}{2}, \ s = y \\ u(x,y) &= 2y + a^2 \\ &= 2y + \left(x - \frac{y^2}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Die Grafik enthält die Anfangsbedingung als Parabel.
Zu jedem a ist eine charakterische Kurve $K_a(s) = \left[\frac{s^2}{2} + a, s, 2s + a^2\right]$ gegeben.

Weiteres Beispiel



$$u_x + xu_y = u, \quad u(1,y) = y$$

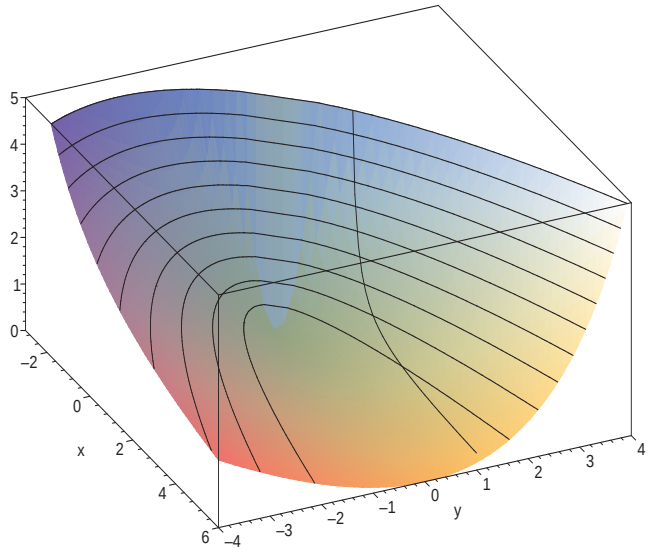
$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= 1 \\ x(0) &= 1 \\ x(s) &= s+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= x \\ y(0) &= a \\ \frac{dy}{ds} &= s+1 \\ y(s) &= \frac{s^2}{2} + s + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= u \\ u(0) &= a \\ u(s) &= ae^s \\ s &= x-1 \\ a &= y - \frac{s^2}{2} - s \\ u(x,y) &= \Big(y - \frac{(x-1)^2}{2} - (x-1)\Big)e^{x-1} \end{aligned}$$

Die Grafik enthält die Anfangsbedingung als Gerade.
Zu jedem a ist eine charakterische Kurve $K_a(s) = \left[s+1, \frac{s^2}{2} + s + a, ae^s\right]$ gegeben.

Weiteres Beispiel



$$(u+2y)u_x + uu_y = 0, \quad u(x,1) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= u + 2y \\ x(0) &= a \\ \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{a} + \frac{2s}{a} + 2 \\ x(s) &= \frac{s}{a} + \frac{s^2}{a} + 2s + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= u \\ y(0) &= 1 \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{1}{a} \\ y(s) &= \frac{s}{a} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= 0 \\ u(0) &= \frac{1}{a} \\ u(s) &= \frac{1}{a} \\ s &= a(y-1) \\ x &= \frac{s}{a} + \frac{s^2}{a} + 2s + a \\ &= \ldots = y - 1 + ay^2 \\ a &= \frac{x-y+1}{y^2} \\ u(x,y) &= \frac{y^2}{x-y+1} \end{aligned}$$

Die Grafik enthält die Anfangsbedingung als Kurve.
Die Berechnung erfolgt in der Reihenfolge $u(s)$, $y(s)$, $x(s)$, s, x, a, $u(x,y)$.

Anschauliches

Um den Normalenvektor einer Tangentialebene zu erkennen, schreiben wir die Gleichung der Tangentialebene in Normalenform.

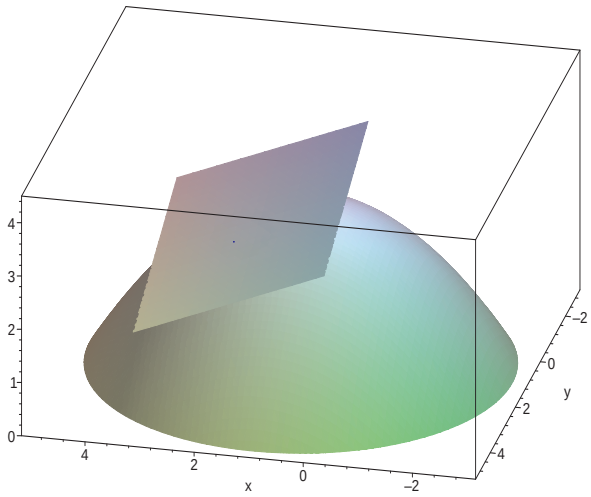
$$z \;=\; f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-f(x_0,y_0) \end{pmatrix} \;=\; 0$$

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \\ -1 \end{pmatrix} \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} \right] \;=\; 0$$

alternativ

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)$$

$$\big(a(x,y), b(x,y), c(x,y)\big)^\top \cdot \big(u_x(x,y), u_y(x,y), -1\big)^\top = 0$$

Für jeden Punkt $\big(x, y, u(x,y)\big)$ steht der Vektor $\big(a(x,y), b(x,y), c(x,y)\big)^\top$ senkrecht auf dem Normalenvektor $\big(u_x(x,y), u_y(x,y), -1\big)^\top$ der Tangentialebene und liegt somit in der Tangentialebene. $\big(a(x,y), b(x,y), c(x,y)\big)^\top$ sind die Tangentenvektoren der charakteristischen Kurven, die ja mit dem (Tangential-)Vektorfeld ermittelt wurden:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a\big(x(s), y(s)\big) \\ \frac{dy}{ds} &= b\big(x(s), y(s)\big) \\ \frac{du}{ds} &= c\big(x(s), y(s)\big) \end{aligned}$$