Satz von Cesàro

Für eine Zahlenfolge $a_1, a_2, \dots$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$$

Das arithmetische Mittel der ersten n Elemente einer Folge konvergiert gegen den Grenzwert der Folge.

Zuerst wird eine Stelle K ermittelt, so dass für $n \geq K$ gilt $|\, a_n - a \,| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Anschließend wird n soweit vergrößert ($n \geq N$), bis der Betrag des 1. Summanden auf der rechten Seite kleinergleich $\frac{\epsilon}{2}$ ist.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - a = \underbrace{\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \dots + (a_K - a)}{n}}_{|\qquad\qquad| \,\leq\, \frac{\epsilon}{2} \text{ ab einer Stelle } N\text{, da der Zähler konstant ist.}} + \frac{\overset{\substack{n-K \text{ Summanden} \\ |\qquad| \,\leq\, \frac{\epsilon}{2} \text{ ab einer Stelle } K,}}{\overbrace{(a_{K+1} - a)} + \overbrace{(a_{K+2} - a)} + \dots + \overbrace{(a_n - a)}}}{n}$$

Sei nun $n \geq \max\{K, N\}$, dann gilt:

$$\left|\, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - a \,\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{n-K}{n}\,\frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon \qquad \Box$$

Satz von Kronecker, vereinfachte Form

Sei für eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \quad \text{konvergent, so folgt} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\Big[\ \underbrace{a_n}_{n(s_n - s_{n-1})} + \underbrace{a_{n-1}}_{(n-1)(s_{n-1}-s_{n-2})} + \underbrace{a_{n-2}}_{(n-2)(s_{n-2}-s_{n-3})} + \ldots + \underbrace{a_2}_{2(s_2-s_1)} + \underbrace{a_1}_{s_1}\ \Big]$$

$$= \frac{1}{n}\Big[ns_n - \underbrace{\big(n-(n-1)\big)}_{1} s_{n-1} - \underbrace{\big((n-1)-(n-2)\big)}_{1} s_{n-2} - \ldots - (2-1)s_1\Big]$$

$$= s_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} s_k \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

Nach dem Satz von Cesàro streben beide Summanden gegen denselben Grenzwert.

□