Cayley-Hamilton

Gegeben sei die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ lautet:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt dann: $\mathcal{A}^2 - 5\mathcal{A} + 4\mathcal{E} = \mathcal{O}$

Eine Folgerung (Multiplikation mit $\mathcal{A}^{-1}$) ist z. B. $\mathcal{A} - 5\mathcal{E} + 4\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{O}$.
Hieraus erhält man eine einfache Darstellung der inversen Matrix: $\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{4}(5\mathcal{E} - \mathcal{A})$

$\mathcal{A}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ mit den Eigenvektoren $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Satz von Cayley-Hamilton $\mathcal{A}^2 + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E} = \mathcal{O}$ ist leicht einzusehen.

Jeder Vektor $\vec{x_0}$ kann als Linearkombination der Eigenvektoren dargestellt werden: $\vec{x_0} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2}$
Dann gilt:

$$\begin{aligned} \vec{x_0} &= c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} \\ \vec{x_1} &= \mathcal{A}\vec{x_0} = c_1\lambda_1\vec{v_1} + c_2\lambda_2\vec{v_2} \\ \vec{x_2} &= \mathcal{A}\vec{x_1} = \mathcal{A}^2\vec{x_0} = c_1\lambda_1^2\vec{v_1} + c_2\lambda_2^2\vec{v_2} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun das charakteristische Polynom $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$
und vereinfachen einen Term, der mit den Koeffizienten des Polynoms und den iterierten Vektoren gebildet wird:

$$\begin{aligned} \vec{x_2} + a_1\vec{x_1} + a_0\vec{x_0} &= c_1\lambda_1^2\vec{v_1} + c_2\lambda_2^2\vec{v_2} \; + \; a_1(c_1\lambda_1\vec{v_1} + c_2\lambda_2\vec{v_2}) \; + \; a_0(c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2}) \\ &= c_1\vec{v_1}\underbrace{(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0)}_{=0} + c_2\vec{v_2}\underbrace{(\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0)}_{=0} = \vec{0} \end{aligned}$$

Damit gilt (beachte $\vec{x_2} = \mathcal{A}^2\vec{x_0}$, $\vec{x_1} = \mathcal{A}\vec{x_0}$):

$$(\mathcal{A}^2 + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E})\vec{x_0} = \vec{0}$$

Der Satz von Cayley-Hamilton sagt aus, dass die Matrix in der Klammer die Nullmatrix ist.
$\vec{x_0}$ ist beliebig. Mit $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt das nun auf der Hand.