Berechnung mit Excel

↑ CORDIC-Algorithmus (engl. Coordinate Rotation Digital Computer)

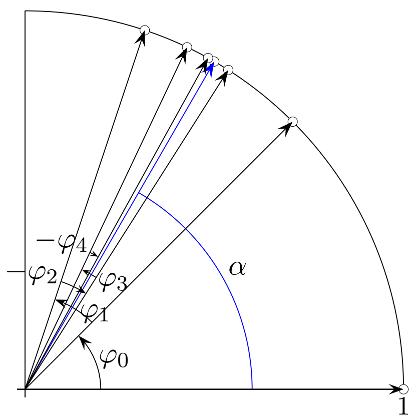
Mit diesem Algorithmus (Volder 1959) werden für einen gegebenen Winkel $\alpha \in [0; \pi/2]$ simultan die Funktionswerte $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ berechnet. Im Dualsystem ist der Rechenaufwand minimal.

Ausgangspunkt für die Herleitung des CORDIC-Algorithmus ist die Drehung eines Vektors im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel α. Zur Herleitung der Matrix D_α siehe Anhang.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{D_\alpha} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Drehung um den Winkel α wird durch mehrere Rotationen $\ldots D_{v_3\varphi_3} D_{v_2\varphi_2} D_{v_1\varphi_1}$ mit festgelegten Teilwinkeln φ_n und einem Drehsinn v_n ersetzt. Die Zusammenhänge werden gleich geklärt.

n	φ_n in °	v_n
0	45	1
1	26,565	1
2	14,036	−1
3	7,125	1
4	3,576	−1
5	1,790	−1
6	0,895	1
7	0,448	−1
8	0,224	1
9	0,112	1
10	0,056	−1
11	0,028	−1
...		



Um den gegebenen Winkel α zu approximieren, beginnen wir mit dem Winkel φ_0. Wenn $\varphi_0 < \alpha$ ist, addieren wir φ_1 zu φ_0, anderfalls subtrahieren wir φ_1. Insgesamt ergibt das $\varphi_0 + v_1\varphi_1$ mit einem bestimmten Vorzeichen v_1. Falls $\varphi_0 + v_1\varphi_1 < \alpha$ ist, addieren wir φ_2, andernfalls geht φ_2 mit einem negativen Vorzeichen v_2 in die Summe ein. Für die Grafik gilt: $\alpha \approx \alpha_5 = \varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4$

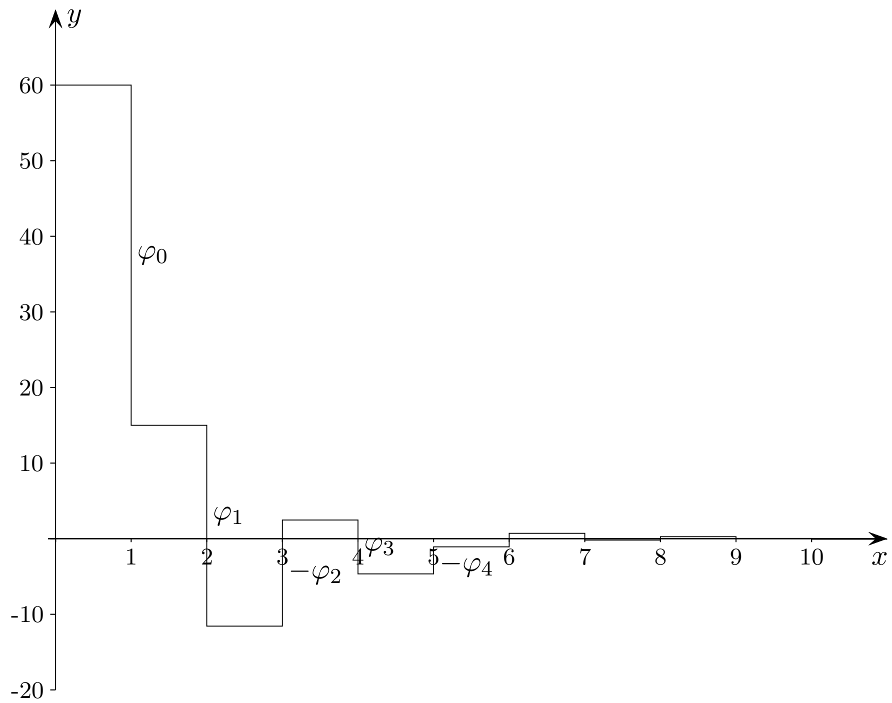
$$v_0 = 1, \quad \alpha_1 = \varphi_0, \quad n = 0$$

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \alpha_n + \varphi_n; \; v_n = 1 & \text{für} \quad \alpha_n < \alpha \\ \alpha_n - \varphi_n; \; v_n = -1 & \phantom{\text{für}} \quad \alpha_n > \alpha \end{cases}$$

alternativ

$$v_0 = 1, \quad \Delta_0 = \alpha, \quad n = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \Delta_n - v_n\varphi_n \\ v_n &= \operatorname{sgn}(\Delta_n) \end{aligned}$$



Die Abbildung zeigt die schrittweise Annäherung an den Zielwinkel von 60°. In jedem Schritt wird der nächstkleinere Winkel φ_n addiert oder subtrahiert, je nachdem, ob Δ_n oberhalb oder unterhalb der x-Achse (positiv oder negativ) ist.

Die Winkel φ_n wurden so geschickt gewählt, dass die Drehmatrizen $D_{v_n\varphi_n}$
eine besonders einfache Form annehmen. Um dies zu erkennen, formen wir D_α um.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{d.h.} \quad \begin{array}{rcrcr} x' & = & x\cos\alpha & - & y\sin\alpha \\ y' & = & x\sin\alpha & + & y\cos\alpha \end{array}$$

$$= \cos\alpha \begin{pmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{beachte:} \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

φ_n wird jetzt für $n = 0, 1, 2, \ldots$ so gewählt, dass $\tan\varphi_n = 2^{-n}$ ist, also $\varphi_n = \arctan 2^{-n}$.
Für eine schnelle Ausführung enthält der Speicher diese Winkel. Wir erhalten:

$$D_{\varphi_n} = \cos\varphi_n \begin{pmatrix} 1 & -2^{-n} \\ 2^{-n} & 1 \end{pmatrix}$$

Da die Tangensfunktion ungerade und die Kosinusfunktion gerade ist, gilt:

$$D_{v_n\varphi_n} = \cos\varphi_n \begin{pmatrix} 1 & -v_n 2^{-n} \\ v_n 2^{-n} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \ldots D_{v_3\varphi_3} D_{v_2\varphi_2} D_{v_1\varphi_1} D_{v_0\varphi_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der Matrizen erfolgt mit einer einfachen Iteration.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v_n 2^{-n} \\ v_n 2^{-n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - v_n 2^{-n} y_n \\ y_n + v_n 2^{-n} x_n \end{pmatrix}$$

Die $\cos\varphi_n$-Werte sind von α unabhängig und können geschlossen mit $C = \prod_{n=0}^{\infty} \cos\varphi_n \approx 0{,}6072529\ldots$ am Ende der Iteration berücksichtigt werden oder man ersetzt den Startvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zusammengefasst, Zielwinkel α

$$\underline{x_0 = C, \quad y_0 = 0, \quad \Delta_0 = \alpha, \quad n = 0}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \Delta_n - v_n \varphi_n, \qquad \varphi_n = \arctan 2^{-n} \\ v_n &= \operatorname{sgn}(\Delta_n) \\ x_{n+1} &= x_n - v_n 2^{-n} y_n \\ y_{n+1} &= y_n + v_n 2^{-n} x_n \end{aligned}$$

Zielwinkel $\alpha = \pi/3$

n	2^{-n}	φ_n [rad]	Δ_n	v_n	x_n	y_n
0	1	0,7853982	1,0471976	1	0,607253	0
1	0,5	0,4636476	0,2617994	1	0,607253	0,607253
2	0,25	0,2449787	−0,2018482	−1	0,303626	0,910879
3	0,125	0,1243550	0,0431304	1	0,531346	0,834973
4	0,0625	0,0624188	−0,0812246	−1	0,426975	0,901391
5	0,03125	0,0312398	−0,0188057	−1	0,483312	0,874705
6	0,015625	0,0156237	0,0124341	1	0,510646	0,859602
7	0,0078125	0,0078123	−0,0031896	−1	0,497215	0,867580
8	0,0039063	0,0039062	0,0046227	1	0,503993	0,863696
9	0,0019531	0,0019531	0,0007165	1	0,500619	0,865665
10	0,0009766	0,0009766	−0,0012366	−1	0,498928	0,866642
11	0,0004883	0,0004883	−0,0002601	−1	0,499775	0,866155
12	0,0002441	0,0002441	0,0002282	1	0,500198	0,865911
13	0,0001221	0,0001221	−0,0000159	−1	0,499986	0,866033
14	0,0000610	0,0000610	0,0001061	1	0,500092	0,865972
15	0,0000305	0,0000305	0,0000451	1	0,500039	0,866003
16	0,0000153	0,0000153	0,0000146	1	0,500013	0,866018
17	0,0000076	0,0000076	−0,0000007	−1	0,499999	0,866026
18	0,0000038	0,0000038	0,0000069	1	0,500006	0,866022
19	0,0000019	0,0000019	0,0000031	1	0,500003	0,866024
20	0,0000010	0,0000010	0,0000012	1	0,500001	0,866025
21	0,0000005	0,0000005	0,0000003	1	0,500000	0,866025
					$\cos\alpha$	$\sin\alpha$

↑ Zur Berechnung von C, sogenannter Skalierungsfaktor

Die Faktoren im Produkt $C = \prod_{n=0}^{\infty} \cos\varphi_n$ (Näherung für: $\prod_{i=0}^{N-1} \cos\varphi_i$, N Anzahl der Iterationen)

können mit $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\varphi + 1}}$ (Pythagoras) vereinfacht werden, $\varphi_n = \arctan 2^{-n}$.

$$\begin{aligned} \cos\varphi_n &= \frac{1}{\sqrt{2^{-2n}+1}}, \quad n \geq 0 \\ C &= \frac{1}{\sqrt{\prod_{n=0}^{\infty}(2^{-2n}+1)}} = 0{,}60725293\ldots \end{aligned}$$

↑ Zur Konvergenz

Es stellt sich die Frage, ob alle $\alpha \in [0; \pi/2]$ mit einer Summe $\sum_{n=0}^{k} v_n \varphi_n$ mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden können.
Aus der Tabelle auf der vorigen Seite ist zu entnehmen, dass sich φ_n für jeden Iterationsschritt näherungsweise halbiert, mit größer werdendem n steigert sich die Güte der Approximation $\varphi_n \approx 2^{-n}$.
Das folgt aus $\arctan x = x$ für $x \approx 0$.

Beachte hierzu: Die Ableitung der Tangensfunktion an der Stelle 0 ist gleich 1, $\tan x = x$ für $x \approx 0$.
Der Graph der Umkehrfunktion ergibt sich durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

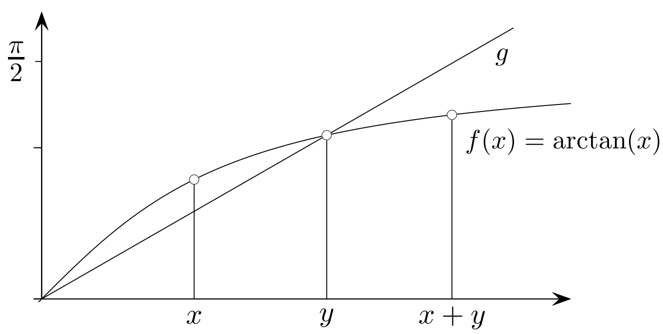
Der größtmögliche Winkel ist etwas größer als $\pi/2$, denn: $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n = 1{,}7432866\ldots \approx 99{,}883°$

Die Approximation von α durch α_n ähnelt einer Intervallschachtelung. Es bleibt nachzuweisen, dass keine Lücken entstehen, dass eine Abweichung von α_n zu α durch die restlichen Winkel ausgeglichen werden kann, d. h. es muss für alle n ein k geben mit:

$$\varphi_n \leq \sum_{i=n+1}^{k} \varphi_i$$

Das sieht komplizierter aus, als es ist.
Für die lineare Funktion g gilt $g(x+y) = g(x) + g(y)$.
Wegen der Rechtskrümmung von f ist dann unmittelbar

$$\underbrace{\arctan(x+y)}_{\leq g(x+y)} \leq \underbrace{\arctan(x)}_{\geq g(x)} + \arctan(y) \quad \text{zu erkennen.}$$



Sei $2^{-n} = \sum_{i=n+1}^{k} 2^{-i}$, k genügend groß gewählt.

$$\varphi_n = \arctan(2^{-n}) = \arctan\Big(\sum_{i=n+1}^{k} 2^{-i}\Big) \leq \sum_{i=n+1}^{k} \arctan(2^{-i}) = \sum_{i=n+1}^{k} \varphi_i$$

↑ Zur Genauigkeit

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - v_n 2^{-n} y_n \\ y_{n+1} &= y_n + v_n 2^{-n} x_n \end{aligned}$$

Zielwinkel $\alpha = \pi/10$

n	2^{-n}	φ_n [rad]	Δ_n	v_n	x_n	y_n
11					0,9513095252	0,3082365228
21					0,9510562585	0,3090176011

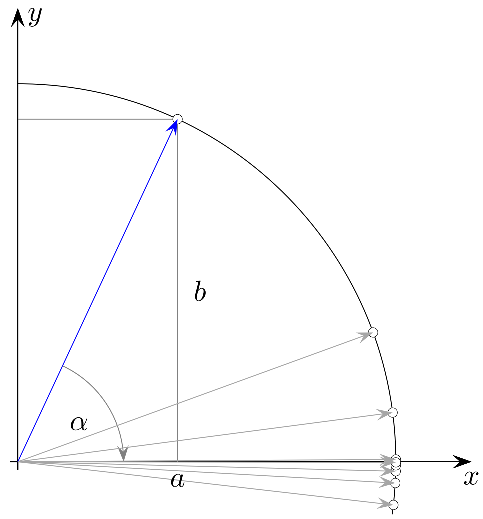
exakt $\cos\alpha = 0{,}9510565\ldots$

$\sin\alpha = 0{,}3090169\ldots$

An der Iteration ist zu sehen, dass für $n = 10$ wegen der geringen Abweichung ($2^{-10} \approx 0{,}001$) die ersten 3 Nachkommastellen der exakten Werte hinreichend gut ermittelt werden. In jeweils 10 weiteren Schritten nimmt die Genauigkeit um 3 weitere Nachkommastellen zu.

$\uparrow$ Arcustangens

$$\alpha = \arctan x, \qquad x = \frac{b}{a}$$



Um α für (a, b) aus dem 1. oder 4. Quadranten zu ermitteln, wird der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ so gedreht, dass er am Ende der Iteration auf der positiven x-Achse liegt. y_n strebt dann gegen null. Das Vorzeichen von y_n legt die Drehrichtung fest. α_n enthält am Ende α als Summe der Teilwinkel. Auf das Ergebnis hat die Multiplikation mit C keinen Einfluss, die Länge des gedrehten Vektors ist hier ohne Belang.

$$\underline{x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad \alpha_0 = 0, \quad n = 0}$$

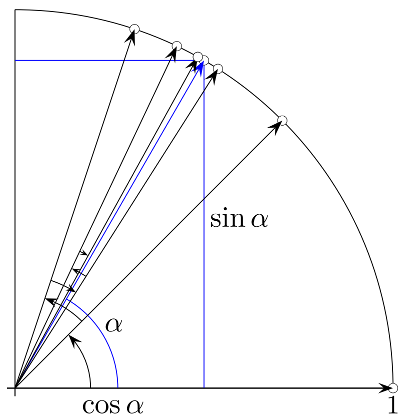
$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n - v_n \varphi_n, \qquad \varphi_n = \arctan 2^{-n} \\ v_n &= -\mathrm{sgn}(y_n) \\ x_{n+1} &= x_n - v_n 2^{-n} y_n \\ y_{n+1} &= y_n + v_n 2^{-n} x_n \end{aligned}$$

$\alpha = \arctan 4$

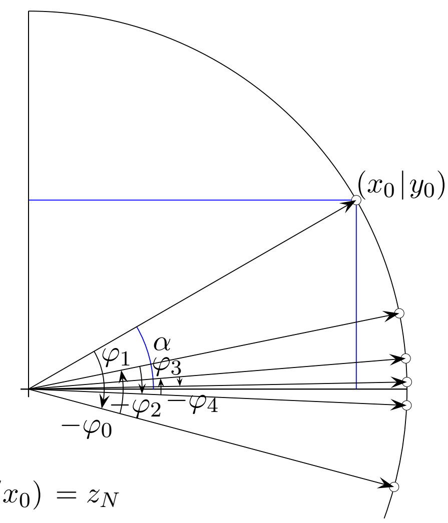
n	2^{-n}	φ_n [rad]	α_n	v_n	x_n	y_n
0	1	0,7853982	0	−1	1	4
1	0,5	0,4636476	0,785398	−1	5,000000	3,000000
2	0,25	0,2449787	1,249046	−1	6,500000	0,500000
3	0,125	0,1243550	1,494024	1	6,625000	−1,125000
...						
10	0,0009766	0,0009766	1,324820	−1	6,789759	0,006776
11	0,0004883	0,0004883	1,325796	−1	6,789765	0,000145
12	0,0002441	0,0002441	1,326285	1	6,789765	−0,003170
...						
19	0,0000019	0,0000019	1,325815	−1	6,789766	0,000016
20	0,0000010	0,0000010	1,325817	−1	6,789766	0,000003
21	0,0000005	0,0000005	1,325818	1	6,789766	−0,000004

$\alpha = 1,32581766\ldots$ exakter

↑ Rotating, Vectoring



Eine Iteration, bei der der Startvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ schrittweise um die Winkel $v_n\varphi_n$, $v_n = \pm 1$, gedreht wird, wird beim CORDIC-Algorithmus als *Rotating* bezeichnet.
Hiermit werden Werte z. B. der Sinus-und Kosinusfunktion berechnet.

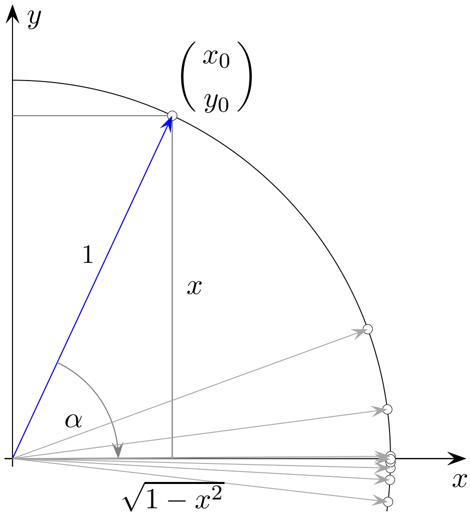


$\alpha = \arctan(y_0/x_0) = z_N$

$\alpha = \varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 - \ldots$

Die umgekehrte Vorgehensweise ist das sogenannte *Vectoring*.
Nach Abschluss der Iteration liegt der Ausgangsvektor auf der positiven x-Achse.
Von Interesse ist der benötigte Drehwinkel, z. B. um Werte trigonometrischer Umkehrfunktionen zu ermitteln.

↑ Arcussinus



Um $\alpha = \arcsin x$ für x aus dem 1. oder 4. Quadranten zu ermitteln, wird der Einheitsvektor $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ so gedreht, dass er am Ende der Iteration auf der positiven x-Achse liegt. y_n strebt dann gegen null. α_n enthält am Ende α als Summe der Teilwinkel. Eine Skalierung ist nicht erforderlich, da die Länge des gedrehten Vektors ohne Belang ist.

$$\underline{x_0 = \sqrt{1-x^2}, \quad y_0 = x, \quad \alpha_0 = 0, \quad n = 0}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n - v_n \varphi_n, \qquad \varphi_n = \arctan 2^{-n} \\ v_n &= -\operatorname{sgn}(y_n) \\ x_{n+1} &= x_n - v_n 2^{-n} y_n \\ y_{n+1} &= y_n + v_n 2^{-n} x_n \end{aligned}$$

$\alpha = \arcsin 0{,}8$

n	2^{-n}	φ_n [rad]	α_n	v_n	x_n	y_n
0	1	0,7853982	0	−1	0,600000	0,8
1	0,5	0,4636476	0,785398	−1	1,400000	0,200000
2	0,25	0,2449787	1,249046	1	1,500000	−0,500000
3	0,125	0,1243550	1,004067	1	1,625000	−0,125000
...						
9	0,0019531	0,0019531	0,930421	1	1,646748	−0,005147
10	0,0009766	0,0009766	0,928468	1	1,646758	−0,001931
11	0,0004883	0,0004883	0,927491	1	1,646760	−0,000323
12	0,0002441	0,0002441	0,927003	−1	1,646760	0,000481
...						
19	0,0000019	0,0000019	0,927297	1	1,646760	−0,000002
20	0,0000010	0,0000010	0,927295	−1	1,646760	0,000001

arcsin

$\alpha = 0{,}92729521800\ldots$ exakter

↑ Verallgemeinerung des CORDIC-Algorithmus

Mit dem CORDIC-Algorithmus lassen sich auch Funktionswerte der hyperbolischen Funktionen

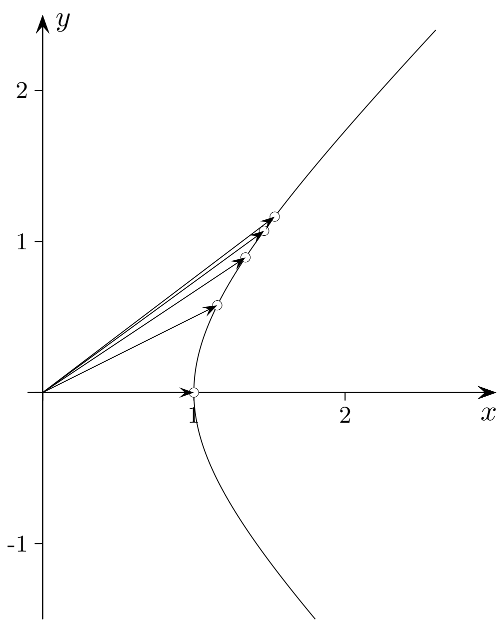
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ und damit auch der Funktion $e^x = \sinh x + \cosh x$ berechnen.

Hierzu werden die Additionstheoreme (können durch Einsetzen der e-Terme bewiesen werden)

$$\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\,\cosh\beta + \sinh\alpha\,\sinh\beta$$
$$\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\,\cosh\beta + \sinh\beta\,\cosh\alpha$$

d. h. $$\begin{pmatrix}\cosh(\alpha+\beta)\\ \sinh(\alpha+\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh\alpha & \sinh\alpha\\ \sinh\alpha & \cosh\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cosh\beta\\ \sinh\beta\end{pmatrix}$$

und $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$ benötigt, d. h. $(\cosh\alpha \,|\, \sinh\alpha)$ liegt auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.



Mit dem Startvektor $\begin{pmatrix}\cosh 0\\ \sinh 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ und

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh\alpha & \sinh\alpha\\ \sinh\alpha & \cosh\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$$

haben wir die gleiche Situation wie bei den Funktionen sin und cos.
Statt eines Kreises und Drehungen haben wir nun eine Hyperbel und Drehstreckungen.
Der Startvektor mit $\beta = 0$ garantiert, dass die noch zu definierenden φ_n sich zum Zielwinkel α summieren.

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh\alpha & \sinh\alpha\\ \sinh\alpha & \cosh\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$= \cosh\alpha\begin{pmatrix}1 & \tanh\alpha\\ \tanh\alpha & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \qquad \text{beachte: } \tanh\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}$$

φ_n wird jetzt für $n = 1, 2, \ldots$ so gewählt, dass $\tanh\varphi_n = 2^{-n}$ ist, also $\varphi_n = \operatorname{artanh} 2^{-n}$, Areatangens hyperbolicus, siehe Anhang. Wir beginnen mit $n = 1$, da artanh 1 nicht existiert.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \cosh\varphi_n \begin{pmatrix} 1 & v_n 2^{-n} \\ v_n 2^{-n} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \cosh\varphi_n \begin{pmatrix} x_n + v_n 2^{-n} y_n \\ y_n + v_n 2^{-n} x_n \end{pmatrix}$$

Die $\cosh\varphi_n$-Werte sind von α unabhängig und können geschlossen mit $C = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \cosh\varphi_n \approx 1{,}2051363\ldots$ am Ende der Iteration berücksichtigt werden oder man ersetzt den Startvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zusammengefasst, Zielwinkel α

$$\underline{x_1 = C, \quad y_1 = 0, \quad \Delta_1 = \alpha, \quad n = 1}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \Delta_n - v_n\varphi_n, \qquad \varphi_n = \operatorname{artanh} 2^{-n} \\ v_n &= \operatorname{sgn}(\Delta_n) \\ x_{n+1} &= x_n + v_n 2^{-n} y_n \\ y_{n+1} &= y_n + v_n 2^{-n} x_n \end{aligned}$$

↑ Zur Berechnung von C

Die Faktoren im Produkt $C = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \cosh\varphi_n$ (Näherung für: $\prod\limits_{i=1}^{N} \cosh\varphi_i$, N Anzahl der Iterationen)

können mit $\cosh\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\varphi}}$ vereinfacht werden, $\varphi_n = \arctan 2^{-n}$.

$$\begin{aligned} \cosh\varphi_n &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2^{-2n}}}, \quad n \geq 1 \\ C &= \frac{1}{\sqrt{\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - 2^{-2n})}} = 1{,}2051363\ldots \end{aligned}$$

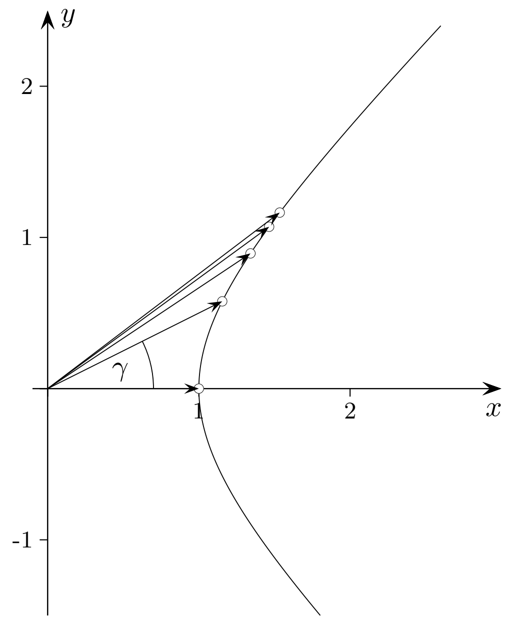
$$\frac{1}{\cosh\varphi} = \sqrt{\frac{\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi}{\cosh^2\varphi}} = \sqrt{1 - \tanh^2\varphi} \qquad \text{beachte: } \cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$$

↑ Zur Konvergenz

Das maximal zulässige Argument ist $\alpha = \pm\sum\limits_{n=1}^{N} \operatorname{artanh} 2^{-i} \approx \pm 1{,}05547$. Die Konvergenz von $\sum v_n\varphi_n$ gegen α ist nicht immer gegeben. Hierzu muss ein Iterationsschritt an bestimmten Stellen wieder rückgängig gemacht werden können, und zwar an den Stellen $n_{i+1} = 3n_i + 1$ mit $n_1 = 4$ (ohne Beweis). Hier wird die Iteration wiederholt. Durch die Folge $1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, \ldots, 13, 13, 14, 15, \ldots$ ändert sich auch der Skalierungsfaktor und der Konvergenzbereich für α vergrößert sich geringfügig auf $[-1{,}118173 \,|\, 1{,}118173]$, $\quad 1{,}118173 = 1{,}05547 + \operatorname{artanh} 2^{-4} + \operatorname{artanh} 2^{-13} + \ldots$

$\alpha = 0{,}3$

n	2^{-n}	φ_n [rad]	Δ_n	v_n	x_n	y_n	Skalierung
1	0,5	0,5493061443	0,3	1	1,207497068	0	1,154700538
2	0,25	0,2554128119	−0,2493061443	−1	1,207497068	0,603748534	1,032795559
3	0,125	0,1256572141	0,0061066675	1	1,056559934	0,301874267	1,007905261
4	0,0625	0,0625815715	−0,1195505466	−1	1,094294218	0,433944259	1,001958866
4	0,0625	0,0625815715	−0,0569689751	−1	1,067172701	0,365550870	1,001958866
...							
12	0,0002441406	0,0002441406	0,0002327725	1	1,045267708	0,304276990	1,000000030
13	0,0001220703	0,0001220703	−0,0000113681	−1	1,045341994	0,304532182	1,000000007
13	0,0001220703	0,0001220703	0,0001107022	1	1,045304820	0,304404577	1,000000007
14	0,0000610352	0,0000610352	−0,0000113681	−1	1,045341979	0,304532178	1,000000002
15	0,0000305176	0,0000305176	0,0000496670	1	1,045323391	0,304468375	1,000000000
...							
31	0,0000000005	0,0000000005	0,0000000005	1	1,045338514	0,304520293	1,000000000
32	0,0000000002	0,0000000002	0,0000000000	1	1,045338514	0,304520293	1,000000000
					$\cosh\alpha$	$\sinh\alpha$	$C = \prod = 1{,}207497068$

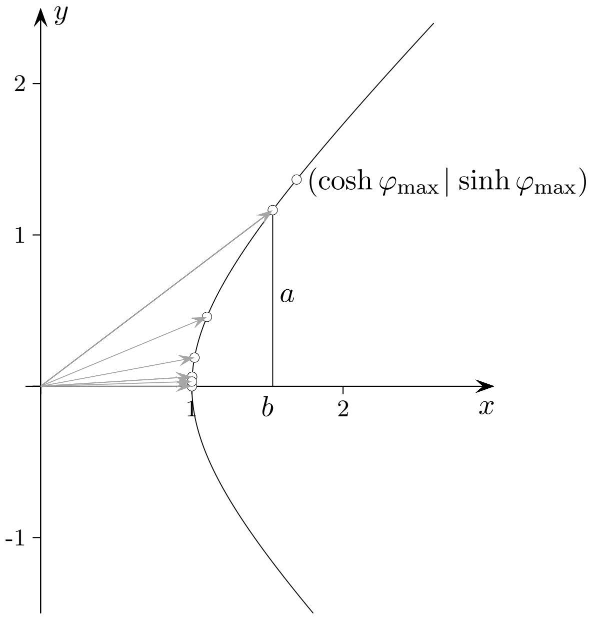


Bei der 1. Iteration geht $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}\cosh\varphi_1\\\sinh\varphi_1\end{pmatrix}$ über.

Die Tabelle beginnt mit $\begin{pmatrix}C\\0\end{pmatrix}$.

Die φ_n werden weiterhin pragmatisch als Drehwinkel bezeichnet.
Die Größe von γ (z. B.) ist unwichtig.

↑ artanh(a/b)



Mit der Vectoring-Iteration wird

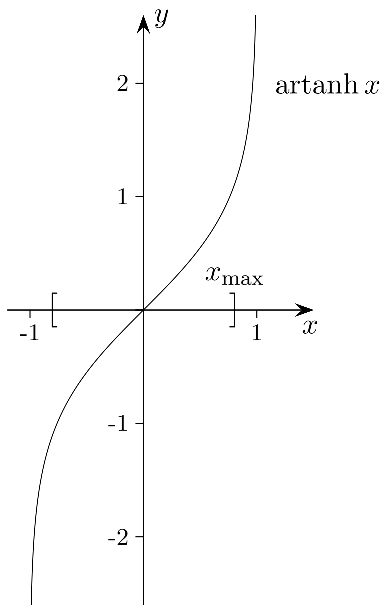
$\alpha_N = \operatorname{artanh}(a/b)$ ermittelt.

$$\underline{x_1 = b, \quad y_1 = a, \quad \alpha_1 = 0, \quad n = 1}$$

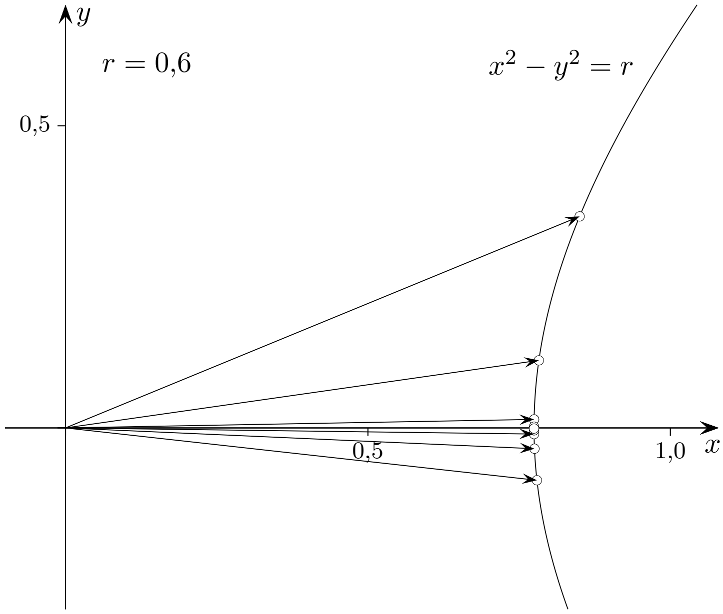
$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \alpha_n - v_n \varphi_n, \qquad \varphi_n = \operatorname{artanh} 2^{-n} \\
v_n &= -\operatorname{sgn}(y_n) \\
x_{n+1} &= x_n + v_n 2^{-n} y_n \\
y_{n+1} &= y_n + v_n 2^{-n} x_n
\end{aligned}$$

Konvergenzbereich $[-\varphi_{\max} \,|\, \varphi_{\max}]$, $\varphi_{\max} = 1{,}118173$

Der maximal mögliche Quotient $x = (b/a)$ beträgt $x_{\max} = \dfrac{\sinh \varphi_{\max}}{\cosh \varphi_{\max}} = \tanh \varphi_{\max} = 0{,}806932.$



↑ Quadratwurzel



Es besteht der Zusammenhang:

$$\left(r+\tfrac{1}{4}\right)^2-\left(r-\tfrac{1}{4}\right)^2=\ldots=r$$

Für $x_1=r+\dfrac{1}{4}$ und $y_1=r-\dfrac{1}{4}$
liegt (x_1,y_1) auf der Hyperbel $x^2-y^2=r$.
Mit $y=0$ erhalten wir $x=\sqrt{r}$

Der CORDIC-Algorithmus erzeugt mit $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ und dem Startvektor $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ den Vektor $\begin{pmatrix}\sqrt{r}\\0\end{pmatrix}$.

$$\underline{x_1=r+\tfrac{1}{4},\quad y_1=r-\tfrac{1}{4},\quad \alpha_1=0,\quad n=1}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \alpha_n-v_n\varphi_n,\qquad \varphi_n=\operatorname{artanh}2^{-n}\\
v_n &= -\operatorname{sgn}(y_n)\\
x_{n+1} &= x_n+v_n2^{-n}y_n\\
y_{n+1} &= y_n+v_n2^{-n}x_n
\end{aligned}$$

Der Endvektor ist noch mit C zu multiplizieren.
In der Grafik wurde bei jedem Iterationsschritt die Skalierung berücksichtigt.

$(\cosh\alpha\,|\,\sinh\alpha)$ liegt wegen $\cosh^2\alpha-\sinh^2\alpha=1$ auf der Hyperbel $x^2-y^2=1$.
Dann liegt $(\sqrt{r}\cosh\alpha\,|\,\sqrt{r}\sinh\alpha)$ auf der Hyperbel $x^2-y^2=r$.

Weiter gilt:

$$\begin{pmatrix}\sqrt{r}\cosh(\alpha+\beta)\\\sqrt{r}\sinh(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\alpha & \sinh\alpha\\\sinh\alpha & \cosh\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{r}\cosh\beta\\\sqrt{r}\sinh\beta\end{pmatrix}$$

Mit einem geeignetem β ist $\begin{pmatrix}\sqrt{r}\cosh\beta\\\sqrt{r}\sinh\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$.

Es ist nun zu erkennen, dass die iterierten Vektoren auf Punkte der Hyperbel $x^2-y^2=r$ zeigen.

$\sqrt{0,6}$

n	2^{-n}	φ_n [rad]	α_n	v_n	x_n	y_n	Skalierung
1	0,5	0,5493061	0	−1	0,85	0,35	1,154700
2	0,25	0,2554128	0,549306	1	0,675000	−0,075000	1,032796
3	0,125	0,1256572	0,293893	−1	0,656250	0,093750	1,007905
4	0,0625	0,0625816	0,419551	−1	0,644531	0,011719	1,001959
4	0,0625	0,0625816	0,482132	1	0,643799	−0,028564	1,001959
5	0,03125	0,0312602	0,419551	−1	0,642014	0,011673	1,000489
...							
12	0,0002441	0,0002441	0,437626	−1	0,641490	0,000070	1,000000
13	0,0001221	0,0001221	0,437870	1	0,641489	−0,000087	1,000000
13	0,0001221	0,0001221	0,437748	1	0,641489	−0,000009	1,000000
14	0,0000610	0,0000610	0,437626	−1	0,641489	0,000070	1,000000
15	0,0000305	0,0000305	0,437687	−1	0,641489	0,000030	1,000000
16	0,0000153	0,0000153	0,437718	−1	0,641489	0,000011	1,000000
17	0,0000076	0,0000076	0,437733	−1	0,641489	0,000001	1,000000
18	0,0000038	0,0000038	0,437740	1	0,641489	−0,000004	1,000000
19	0,0000019	0,0000019	0,437737	1	0,641489	−0,000001	1,000000
20	0,0000010	0,0000010	0,437735	1	0,641489	0,000000	1,000000

$\sqrt{0,6} \approx 0,641489 \cdot C \approx 0,774597$ $\qquad C = \prod = 1,207497$

$\sqrt{0,6} = 0,774596669\ldots$ exakter

Zur Konvergenz

Aus $\begin{pmatrix} \sqrt{r}\cosh\beta \\ \sqrt{r}\sinh\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ folgt $\tanh\beta = \frac{y_1}{x_2}$.

Den Konvergenzbereich $[-1{,}118173\,|\,1{,}118173]$ (hier für β) hatten wir schon ermittelt.

Die Lösungen der Gleichungen: $\quad \tanh(\pm 1{,}118173) = \dfrac{r-\frac{1}{4}}{r+\frac{1}{4}}$

ergeben den Konvergenzbereich für r: $[0{,}027\,|\,2{,}340]$.

$\sqrt{60} = \sqrt{0{,}6 \cdot 100} = \sqrt{0{,}6} \cdot 10 \approx 7{,}745967$

$\sqrt{600} = \sqrt{0{,}06 \cdot 10000} = \sqrt{0{,}06} \cdot 100 \approx 24{,}494897$

binär $r = m2^k,\ 1 \le m < 1,\ \sqrt{r} = 2^{\frac{k}{2}}\sqrt{m},\quad k$ gerade

$\sqrt{r} = 2^{\frac{k+1}{2}}\sqrt{\frac{m}{2}},\quad k$ ungerade

↑ CORDIC-Algorithmus Multiplizieren

Die Idee ist recht einfach.

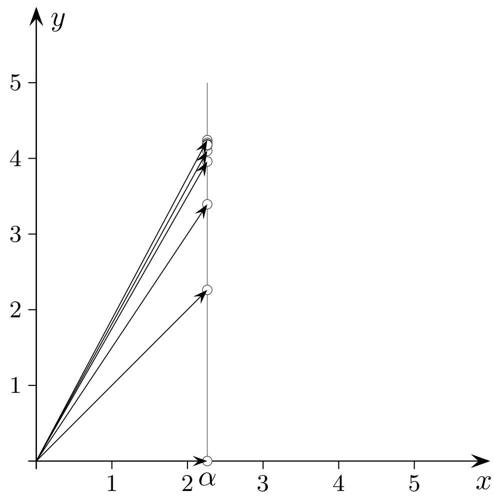
$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \underbrace{\left(v_0 2^{-0} + v_1 2^{-1} + v_2 2^{-2} + v_3 2^{-3} + v_4 2^{-4} + \cdots\right)}_{\beta}$$

Ein Faktor wird als Summe von 2er-Potenzen dargestellt, $v_i = \pm 1$. Das Produkt mit dem anderen Faktor (die Klammern werden aufgelöst) ist dann eine iterierte Summation und Multiplikation mit diesen 2er-Potenzen. Ein Faktor darf daher nicht größer als 2 sein.

Produkt $\alpha \cdot \beta, \quad \beta \le 2$

$$\underline{x_0 = \alpha, \quad y_0 = 0, \quad \Delta_0 = \beta, \quad n = 0}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \Delta_n - v_n 2^{-n} \\ v_n &= \operatorname{sgn}(\Delta_n) \\ x_{n+1} &= x_n \\ y_{n+1} &= y_n + v_n 2^{-n} x_n \end{aligned}$$



$2{,}262 \cdot 1{,}847$

n	2^{-n}	v_n	Δ_n	x_n	y_n	
0	1	1	1,8470000	2,262	0	
1	0,5	1	0,8470000	2,262	2,262	
2	0,25	1	0,3470000	2,262	3,3930000	
3	0,125	1	0,0970000	2,262	3,9585000	
4	1,0625	−1	− 0,0280000	2,262	4,2412500	
5	0,03125	1	0,0345000	2,262	4,0998750	
6	0,015625	1	0,0032500	2,262	0,1705625	
7	0,0078125	−1	− 0,0123750	2,262	4,2059063	
...						
20	0,0000010	1	0,0000018	2,262	4,1779100	
21	0,0000005	1	0,0000008	2,262	4,1779121	
22	0,0000002	1	0,0000004	2,262	4,1779132	
23	0,0000001	1	0,0000001	2,262	4,1779137	
24	0,0000001	−1	0,0000000	2,262	4,1779140	exakt
					$\alpha \cdot \beta$	

↑ CORDIC-Algorithmus   Dividieren

Mit der inversen Iteration (Vectoring) der Multiplikation gelingt die Division.

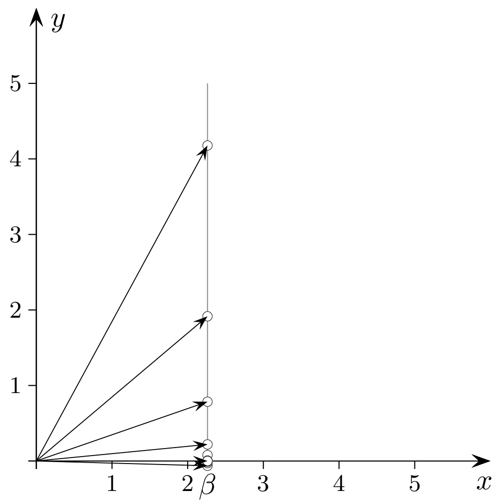
$\alpha : \beta = v_0 2^{-0} + v_1 2^{-1} + v_2 2^{-2} + v_3 2^{-3} + v_4 2^{-4} + \cdots$

Damit das Ergebnis in dieser Form darstellbar ist, muss es kleiner als 2 sein.
$y_{n+1} = y_n + v_n 2^{-n} x_n$ entspricht einem Schritt beim schriftlichem Dividieren.

Quotient $\alpha : \beta, \ \leq 2$

$\underline{x_0 = \beta, \quad y_0 = \alpha, \quad \alpha_0 = 0, \quad n = 0}$

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n - v_n 2^{-n} \\ v_n &= -\mathrm{sgn}(\Delta_n) \\ x_{n+1} &= x_n \\ y_{n+1} &= y_n + v_n 2^{-n} x_n \end{aligned}$$



4,1779140 : 2,262

n	2^{-n}	v_n	α_n	x_n	y_n
0	1	−1	0	2,262	4,1779140
1	0,5	−1	1,0000000	2,262	1,9159140
2	0,25	−1	1,5000000	2,262	0,7849140
3	0,125	−1	1,7500000	2,262	0,2194140
4	1,0625	1	1,8750000	2,262	−0,0633360
5	0,03125	−1	1,8125000	2,262	0,0780390
6	0,015625	−1	1,8437500	2,262	0,0073515
7	0,0078125	1	1,8593750	2,262	−0,0279922
...					
20	0,0000010	−1	1,8469982	2,262	0,0000040
21	0,0000005	−1	1,8469992	2,262	0,0000019
22	0,0000002	−1	1,8469996	2,262	0,0000008
23	0,0000001	−1	1,8469999	2,262	0,0000003
24	0,0000001	1	1,8470000	2,262	0,0000000

$\alpha : \beta$ exakt

Vergleiche mit der Multiplikation die Spalten v_n.

↑ CORDIC-Algorithmus   Übersicht

$$x_{n+1} = x_n - m\sigma_n 2^{-n} y_n \qquad \sigma_n \text{ statt } v_n$$
$$y_{n+1} = y_n + \sigma_n 2^{-n} x_n$$
$$z_{n+1} = z_n - \sigma_n \varphi_n \qquad z_n \text{ statt } \Delta_n \text{ bzw. } \alpha_n$$

Der CORDIC-Algorithmus lässt sich in drei Modi zusammenfassen:

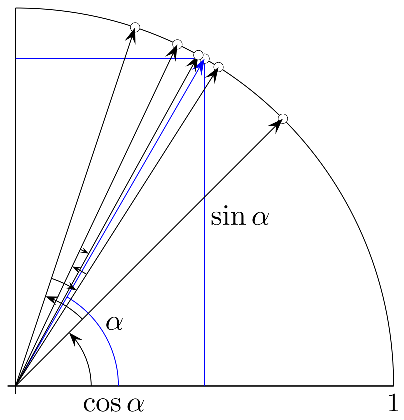
<u>zirkular</u> $m = 1,\ \varphi_n = \arctan 2^{-n},\ C = \dfrac{1}{\sqrt{\prod\limits_{n=0}^{N-1}(2^{-2n}+1)}} \approx 0{,}607253,\ N$ Anzahl der Iterationen

<u>hyperbolisch</u> $m = -1,\ \varphi_n = \operatorname{artanh} 2^{-n},$ mit Winkelverdopplung, Beginn bei $n = 1$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\prod\limits_{n=1}^{N-1}(1-2^{-2n})}} \approx 1{,}205136$$

<u>linear</u> $m = 0,\ \varphi_n = 2^{-n},\ C = 1$

jeweils mit den Iterationsarten Rotating und Vectoring.



<u>Rotating</u> z. B. sin, cos, sinh, Multiplikation

$\sigma_i = \operatorname{sgn}(z_i),\ x_0 = C,\ y_0 = 0,\ z_0 = \alpha,\ z_n \to 0$

zirkular $x_N = \cos(\alpha),\ y_N = \sin(\alpha)$

hyperbolisch $x_N = \cosh(\alpha),\ y_N = \sinh(\alpha)$ Beginn bei $n = 1$

linear $y_N = x_0 \cdot z_0$

<u>Vectoring</u> z. B. arctan, artanh, $\sqrt{}$, Division

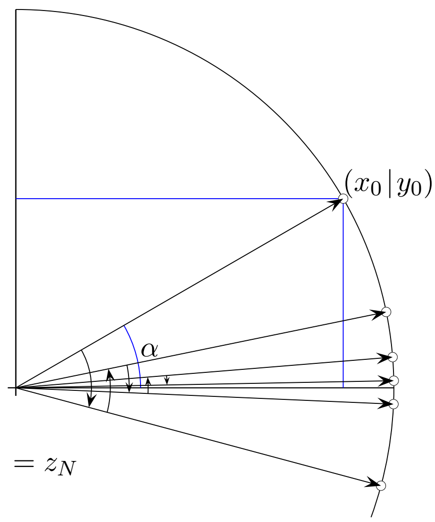
$\sigma_i = -\operatorname{sgn}(z_i),\ z_0 = 0,\ y_n \to 0$

zirkular $z_N = \arctan(y_0/x_0)$

hyperbolisch $z_N = \operatorname{artanh}(y_1/x_1)$ Beginn bei $n = 1$

linear $z_N = y_0/x_0$

Für die Ermittlung eines Winkels ist die Skalierung nicht erforderlich.



$\alpha = \arctan(y_0/x_0) \ = z_N$

$\uparrow\ e^x,\ \ x \in \mathbb{R}$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Um Funktionswerte von $e^x = \sinh x + \cosh x$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ zu ermitteln, stellen wir x ist Vielfaches von $\ln 2$ plus Rest z dar, $x = z + m \ln 2$.

$$\begin{aligned} e^x &= e^{z+m\ln 2} = e^z e^{m \ln 2} \\ &= 2^m e^z \qquad\qquad \text{Potenzgesetze} \\ &= 2^m \big(\sinh z + \cosh z\big) \end{aligned}$$

z liegt wegen $|z| < \ln 2 \approx 0{,}6931$ im Konvergenzbereich $[-1{,}118173\,|\,1{,}118173]$.

Das Argument x wird ganzzahlig durch $\ln 2$ dividiert.

$$\begin{aligned} m &= (\text{int})\ x/\ln 2 \qquad\qquad \text{in Excel} \quad = \text{QUOTIENT(Zähler; Nenner)} \\ z &= x - m \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 3{,}76 \\ m &= 5 \\ z &= 0{,}2942640972 \end{aligned}$$

n	2^{-n}	φ_n [rad]	Δ_n	v_n	x_n	y_n	Skalierung
1	0,5	0,5493061443	0,2942640972	1	1,207497068	0	1,154700538
2	0,25	0,2554128119	−0,2550420471	−1	1,207497068	0,603748534	1,032795559
3	0,125	0,1256572141	0,0003707647	1	1,056559934	0,301874267	1,007905261
4	0,0625	0,0625815715	−0,1252864494	−1	1,094294218	0,433944259	1,001958866
4	0,0625	0,0625815715	−0,0627048779	−1	1,067172701	0,365550870	1,001958866
...							
13	0,0001220703	0,0001220703	0,0001295593	1	1,043570352	0,298394108	1,000000007
13	0,0001220703	0,0001220703	0,0000074890	1	1,043606777	0,298521497	1,000000007
14	0,0000610352	0,0000610352	−0,0001145814	−1	1,043643217	0,298648891	1,000000002
...							
31	0,0000000005	0,0000000005	0,0000000002	1	1,043609002	0,298529310	1,000000000
32	0,0000000002	0,0000000002	−0,0000000003	−1	1,043609002	0,298529310	1,000000000

$\cosh\alpha \qquad \sinh\alpha \qquad C = \prod = 1{,}207497068$

$e^x =$ 42,94842599

42,948425978 ... exakter

↑ Anhang Drehung um den Ursprung

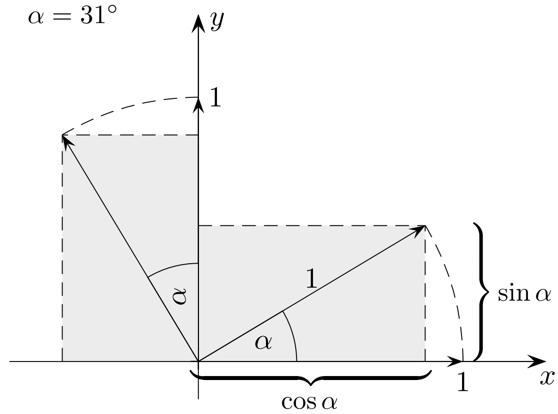
$\circlearrowleft$ bedeutet: wird um α gedreht auf

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix} -b\sin\alpha \\ b\cos\alpha \end{pmatrix}$$

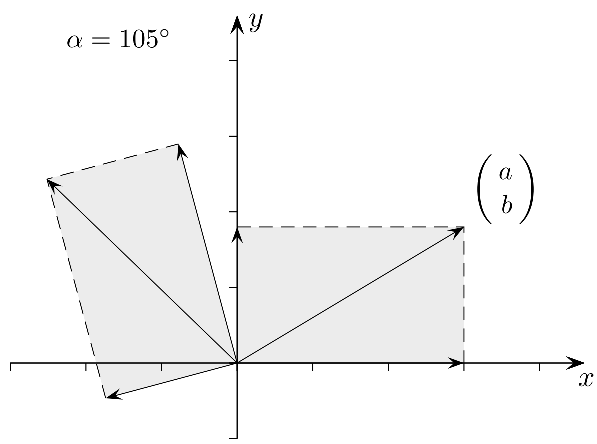


$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \circlearrowleft \ ?$$

beachte: Die Drehung ist eine lineare Abbildung, d. h.
ein Parallelogramm wird auf ein Parallelogramm abgebildet,
eine Ecke liegt im Ursprung.

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b\sin\alpha \\ b\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix} a\cos\alpha - b\sin\alpha \\ a\sin\alpha + b\cos\alpha \end{pmatrix}$$



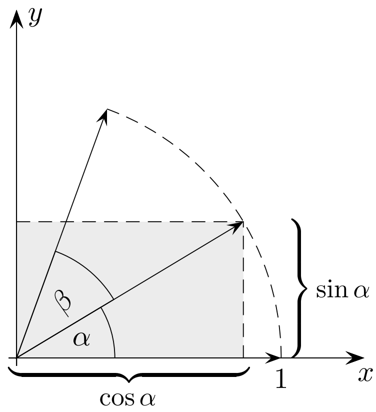
In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

↑ Alternative Begründung mit Additionstheoremen

$\overset{\alpha}{\circlearrowleft}$ bedeutet: wird um α gedreht auf

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \overset{\alpha}{\circlearrowleft} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Begründung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\alpha+\beta}{\circlearrowleft} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\alpha}{\circlearrowleft} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \overset{\beta}{\circlearrowleft} \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \end{pmatrix}$$

beachte:

$$\cos\,(\alpha+\beta) \;=\; \cos\alpha\,\cos\beta \;-\; \sin\alpha\,\sin\beta$$
$$\sin\,(\alpha+\beta) \;=\; \sin\alpha\,\cos\beta \;+\; \sin\beta\,\cos\alpha$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \overset{\beta}{\circlearrowleft} \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \end{pmatrix}$$

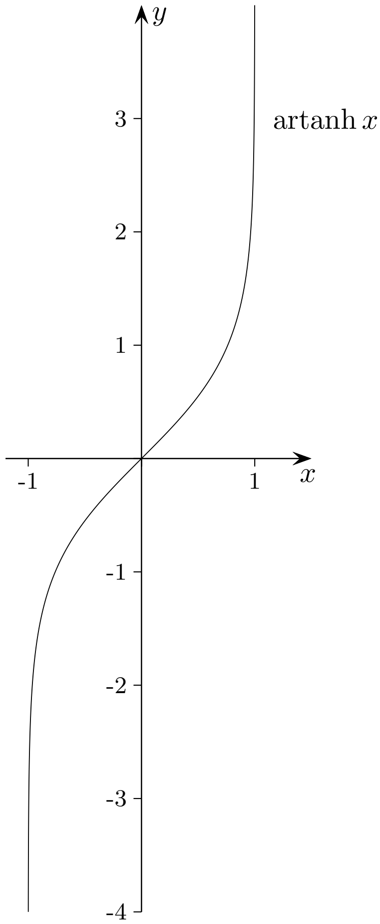
und in Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \overset{\beta}{\circlearrowleft} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

beachte: $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$

Das Vielfache eines Einheitsvektors wird ersichtlich mit derselben Matrix gedreht.
Jeder Vektor ist ein Vielfaches seines Einheitsvektors.

↑ $\operatorname{artanh} x$



Der Areatangens hyperbolicus ist die Umkehrfunktion vom Tangens hyperbolicus.

$$\begin{aligned}\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}\\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\end{aligned}$$

<u>Umkehrfunktion ermitteln</u>

$$\begin{aligned}
y &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} && \text{mit } e^x \text{ erweitern}\\
y &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} && \text{nach } e^{2x} \text{ auflösen, zuerst beide Seiten mit } (e^{2x}+1) \text{ multiplizieren}\\
&\dots\\
e^{2x} &= \frac{1+y}{1-y} && \text{und dann nach } x\\
x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} && x \text{ und } y \text{ vertauschen}\\
y = \operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} && |x| < 1
\end{aligned}$$

↑ Erweiterung des zulässigen Argument-Bereiches für artanh()

Um artanh-Funktionwerte für den Definitionsbereich trotz des kleineren Konvergenzbereichs zu ermitteln, verwenden wir die Darstellung $x = 1 - \frac{m}{2^k}$ mit $0{,}5 \leq m < 1$ und einem ganzzahligen k. Man mache sich klar, dass $\frac{m}{2^k}$ mit $0{,}5 \leq m < 1$ und k ganzzahlig das Intervall $]0;1[$ abdeckt, und dann auch $1 - \frac{m}{2^k}$. Die artanh-Funktion wird mit den Logarithmen-Regeln in die Summe $\operatorname{artanh} x = \operatorname{artanh} u + \frac{k}{2} \ln 2$ umgeformt, u ist im Konvergenzbereich. Da der artanh-Graph punktsymmetrisch ist, beschränkten wir uns auf positive x-Werte.

$$\begin{aligned}
x &= 1 - \frac{m}{2^k} && 0{,}5 \leq m < 1 \\
\operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{2 - m2^{-k}}{m2^{-k}} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{(2 - m2^{-k})2^k}{m} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{2 - m2^{-k}}{m} + \frac{1}{2} \ln 2^k \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} + \frac{1}{2} \ln 2^k && \text{mit } u \text{ gelangen wir zu artanh()} \\
&= \operatorname{artanh} u + \frac{k}{2} \ln 2
\end{aligned}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{2 - m2^{-k}}{m} \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{2 - m - m2^{-k}}{2 + m - m2^{-k}}$$

$$u < \frac{2-m}{2+m} \leq 0{,}6 \qquad \text{nachrechnen, } u \text{ damit im Konvergenzbereich}$$

Beispiele

a)

$$\begin{aligned}
x &= 0{,}95 && 1 - x = m2^{-k} && \text{binär b} \\
1 - x &\approx 0{,}00001100\text{b} \approx 0{,}11\text{b} \cdot 2^{-4} && && k = 4 \\
m &= 0{,}8 && u = 0{,}4181818 \\
& && \operatorname{artanh} x = 1{,}8317808 && \text{genauer } 1{,}83178082
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x &= 0{,}45 && 1 - x = m2^{-k} \\
1 - x &\approx 0{,}10001100\text{b} \approx 0{,}10\text{b} \cdot 2^{0} && && k = 0 \\
m &= 0{,}55 && u = 0{,}45 \\
& && \operatorname{artanh} x = 0{,}4847002 && \text{genauer } 0{,}484700279
\end{aligned}$$

$\uparrow$ $\ln x$

Über den Areatangens hyperbolicus lässt sich auch der natürliche Logarithmus mit dem CORDIC-Algorithmus ermitteln.

$$
\begin{aligned}
\tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
\tanh(\ln\sqrt{x}) &= \frac{e^{\ln\sqrt{x}} - e^{-\ln\sqrt{x}}}{e^{\ln\sqrt{x}} + e^{-\ln\sqrt{x}}} \\
&= \frac{\sqrt{x} - 1/\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1/\ln\sqrt{x}} = \frac{x-1}{x+1}, \qquad \ln\sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln x \\
\tanh(\tfrac{1}{2}\ln x) &= \frac{x-1}{x+1} \\
\ln x &= 2\,\mathrm{artanh}\,\frac{x-1}{x+1}
\end{aligned}
$$

Für den Konvergenzbereich des ln ergibt sich zunächst:

$$\frac{x-1}{x+1} = \pm 0{,}806932 \quad \Longrightarrow \quad 0{,}107 \le x \le 9{,}359$$

Um ln-Funktionwerte für den Definitionsbereich trotz des kleineren Konvergenzbereichs zu berechnen, verwenden wir die Darstellung $x = m2^k$ mit $0{,}5 \le m < 1$ und einem ganzzahligen k.

Beispiele

a) $x = 0{,}085$ $\quad x = m2^k$ $\quad$ binär b

$x \approx 0{,}000101\text{b} \approx 0{,}10\text{b} \cdot 2^{-3}$ $\quad k = -3$ $\quad m = 0{,}68$

$\ln x = -2{,}465104$ $\quad$ genauer $-2{,}46510402$

b) $x = 81{,}6$ $\quad x = m2^k$ $\quad$ binär b

$x \approx 1010001{,}10\text{b} \approx 0{,}10\text{b} \cdot 2^7$ $\quad k = 7$ $\quad m = 0{,}6375$

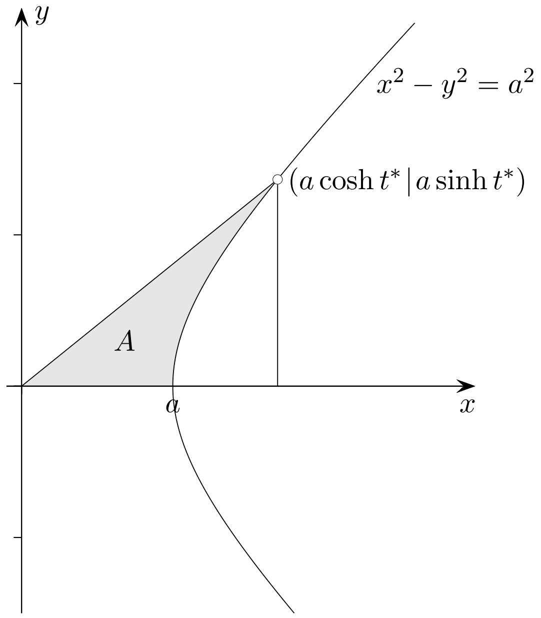
$\ln x = 4{,}401829$ $\quad$ genauer $4{,}40182926$

↑ Kreis- und Hyperbelsegment Ähnlichkeiten

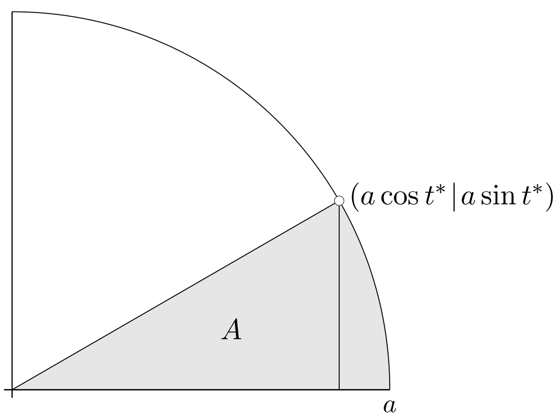
Bei der parametrischen Darstellung von Kreis und Hyperbel ist der Parameter proportional zum Inhalt einer Segmentfläche. In dieser Weise kennzeichnet Walther 1971 in der Veröffentlichung zur Verallgemeinerung des CORDIC-Algorithmus den Drehwinkel. Dies ist für das Verfahren selbst jedoch unerheblich.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{t^*}\big[x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\big]\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{t^*}\Big[\big(a\cosh t\big)^2 - \big(a\sinh t\big)^2\Big]\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{t^*} 1\,\mathrm{dt} = \frac{a^2 t^*}{2} \\
t^* &= \frac{2A}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\cosh x)' &= \sinh x \\
(\sinh x)' &= \cosh x
\end{aligned}$$

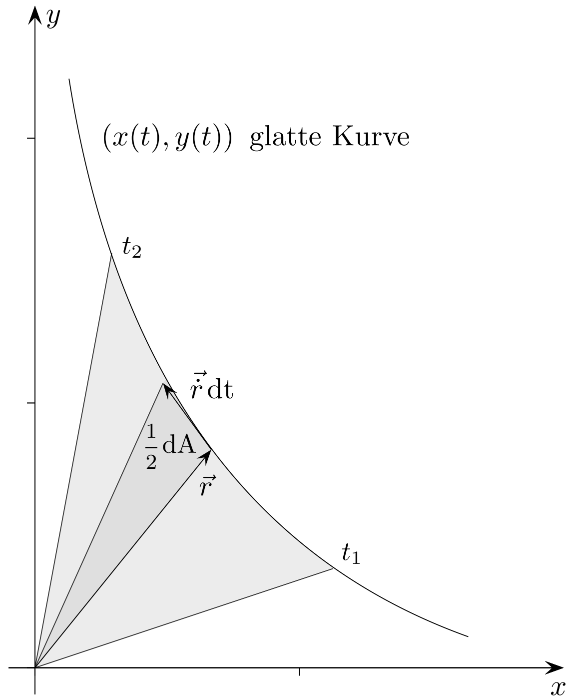


$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{t^*}\big[x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\big]\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{t^*}\Big[\big(a\cos t\big)^2 + \big(a\sin t\big)^2\Big]\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{t^*} 1\,\mathrm{dt} = \frac{a^2 t^*}{2} \\
t^* &= \frac{2A}{a^2}
\end{aligned}$$



alternativ: $\quad A = \frac{t^*}{2\pi}\pi a^2 = \frac{t^*}{2}a^2 \quad\Longrightarrow\quad t^* = \frac{2A}{a^2}$

↑ Segmentformel Leibniz



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}\,\mathrm{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t)\,\mathrm{dt} \\ \dot{y}(t)\,\mathrm{dt} \end{pmatrix}$$

Die Vektoren spannen ein noch zu halbierendes Parallelogramm auf, dessen vorzeichenbehafteter Flächeninhalt mit einer Determinante berechnet wird.

$$\mathrm{dA} = \begin{vmatrix} x(t) & \dot{x}(t) \\ y(t) & \dot{y}(t) \end{vmatrix}\,\mathrm{dt} \qquad \text{siehe Determinante}$$

$$= \big[x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\big]\,\mathrm{dt}$$

$$\Longrightarrow \qquad A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \big[x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\big]\,\mathrm{dt}$$