Satz von Borel-Cantelli

1. Limes inferior von Mengen
2. Limes superior von Mengen
3. Stetigkeit
4. Satz von Borel-Cantelli
5. Konvergenz von Zufallsvariablen
6. Kolmogorow-Ungleichung
7. Tschebyschow-Ungleichung
8. Konvergenzkriterien
9. Starkes Gesetz der großen Zahlen

↑ Limes inferior von Mengen

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen.

Wir bilden die Menge aller Elemente, die in fast allen A_i enthalten sind,
d. h. diese Elemente sind (höchstens) in nur endlich vielen A_i nicht enthalten.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	$\dots$
$a \notin$			$a \notin$			$a \notin$										

Diese Menge wird mit $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ bezeichnet.

Da ein Element a dieser Menge in nur endlich vielen A_i nicht enthalten ist, gibt es eine Stelle n (hier 8), so dass für alle $k \geq n$ gilt: $a \in A_k$. Damit liegt a im Durchschnitt $a \in \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Werden alle Stellen berücksichtigt, so erhalten wir $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Die Umkehrung ist noch zu zeigen.

Sei also $a \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Dann gibt es ein n mit $a \in \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Ab der Stelle n gilt daher $a \in A_k$.

Für $1 \leq k < n$ (endl. viele) wissen wir nichts. Jedenfalls ist a in fast allen A_i enthalten.

↑ Limes superior von Mengen

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen.
Wir bilden die Menge aller <u>Elemente, die in unendlich vielen A_i enthalten</u> sind.
Zwei Beispiele:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	$\dots$
$a \notin$			$a \notin$			$a \notin$										

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	$\dots$
	$a \in$		$a \in$		$a \in$		$a \in$		$a \in$		$a \in$		$a \in$		$a \in$	

Diese Menge wird mit $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ bezeichnet.
Offensichtlich gilt: $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$,
denn wenn a in nur endlich vielen A_i nicht enthalten ist, dann ist es in unendlich vielen A_i enthalten.

Sei das Element a in unendlich vielen A_i enthalten.
Wie kann das ohne *unendlich* formuliert werden?

Zu jeder Stelle n gibt es ein $k \geq n$ mit $a \in A_k$.

Zu jeder Stelle n ist $a \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ und damit $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Die Umkehrung liegt auf der Hand.

Zusammengefasst:

$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ Die Elemente sind in nur endlich vielen A_i nicht enthalten.

$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ Die Elemente sind in unendlich vielen A_i enthalten.

↑ Stetigkeit

Für beliebige endliche oder unendliche Folgen $A_1, A_2, A_3, \dots$
folgt aus den Kolmogoroff-Axiomen:

$$P\Big(\bigcup_n A_n\Big) \leq \sum_n P(A_n)$$

Falls $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \dots,$ so gilt:

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Stetigkeit von unten

Falls $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots,$ so gilt:

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Stetigkeit von oben

$\uparrow$ Borel-Cantelli

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{B_n} \qquad \text{ist das Ereignis, dass unendlich viele der } A_n\text{'}s \text{ eintreten.}$$

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset B_4 \ldots$$

Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$$

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) \qquad \text{Stetigkeit von oben}$$

$$P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_n) \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

$\square$

Wenn die Summe der Wahrscheinlichkeiten einer Folge von Ereignissen endlich ist,
dann treten fast sicher nur endlich viele Ereignisse ein.

↑ Borel-Cantelli

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von <u>unabhängigen</u> Ereignissen.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \text{ist das Ereignis, dass unendlich viele der } A_n\text{'}s \text{ eintreten.}$$

Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \quad \Longrightarrow \quad P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$$

Wir betrachten das Gegenereignis.

$$P(\overline{\limsup_{n\to\infty} A_n}) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A_k}\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A_k}\Big)}$$

$$\prod_{k=n}^{\infty}(1-P(A_k)) \le \exp(-\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)}_{\text{Summe divergiert}}) = 0 \qquad 1-x \le e^{-x}$$

□

Wenn die Summe der Wahrscheinlichkeiten einer Folge von unabhängigen Ereignissen unendlich ist, dann treten fast sicher auch unendlich viele Ereignisse ein.

Das Resultat überrascht nicht.

↑ Borel-Cantelli Beispiel

Wir betrachten ein unendlich oft wiederholtes Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$. Betrachte die Ereignisse A_n = "Erfolg bei Experiment n".

$$\text{Es ist } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty.$$

Da die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ unabhängig sind, folgt $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

In Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass man in einem unendlich oft wiederholten Bernoulli-Experiment unendlich viele Erfolge (analog unendlich viele Misserfolge) erzielt, ist 1.

$$\begin{aligned} P(\liminf_{n\to\infty} A_n) &= P(\text{"Ab einer Stelle nur noch Erfolge"}) \\ &= P(\text{"Nur endlich viele Misserfolge"}) \\ &= 1 - P(\text{"Unendlich viele Misserfolge"}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

↑ Konvergenz von Zufallsvariablen

Jakob Bernoulli fand um 1685 das Gesetz der großen Zahlen.

$$P(\,|\,\frac{X}{n} - p\,| < \varepsilon) \;\geq\; 1 - \frac{p \cdot q}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die relative Häufigkeit nur um einen beliebig kleinen Wert ε von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit p abweicht, strebt mit wachsendem Stichprobenumfang n gegen 1 (siehe Tschebyscheff'sche Ungleichung). Dies führt zur

1. Definition $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$
Eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots : \; \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert *stochastisch* gegen eine Zufallsvariable X, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\{\omega \in \Omega \colon \,|\,X_n(\omega) - X(\omega)\,| \leq \varepsilon\}\big) = 1$$

Daneben wird die punktweise Konvergenz auf Ω, von einer Nullmenge abgesehen, untersucht.

2. Definition $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X$
Eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots : \; \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert *fast sicher* gegen eine Zufallsvariable X, wenn gilt:

$$P\big(\{\omega \in \Omega \colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\,\}\big) = 1$$

In der 1. Definition wird ein Grenzwert einer Folge von Wahrscheinlichkeiten betrachtet, in der 2. die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

Aus der fast sicheren Konvergenz folgt die stochastische Konvergenz.
Die Umkehrung gilt nicht. Man betrachte hierzu eine unabhängige Folge:

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } n^{-1} \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - n^{-1} \end{cases}$$

Dann ist $P\big(\,|X_n - 0\,| \leq \varepsilon\big) = 1 - n^{-1}$, daher $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Nach dem Satz von Borel-Cantelli $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty\right.$, harmonische Reihe) kann nicht $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ gelten, da die 1 in fast jeder Folge unendlich mal auftritt.

In der Literatur sind die Gegenbeispiele nicht so einfach. Ich bin mir nicht sicher, ob ich nicht etwas übersehen habe.

Aus der fast sicheren Konvergenz folgt die stochastische Konvergenz.

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
1 &= P\big(\{\omega \in \Omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\big) \\
&= P\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \underbrace{\{\omega \in \Omega\colon |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\}}_{A_n}\Big) && \text{siehe } \liminf_{n\to\infty} \\
& && \text{in nur endlich vielen nicht enthalten} \\
&= \lim_{m\to\infty} P\Big(\bigcap_{n\geq m} A_n\Big) && \text{Stetigkeit von unten } \bigcap_{n\geq 1} A_n \subset \bigcap_{n\geq 2} A_n \subset \bigcap_{n\geq 3} A_n \subset \ldots \\
&\leq \lim_{m\to\infty} P\big(A_m\big) \leq 1
\end{aligned}
$$

$\square$

↑ Kolmogorow-Ungleichung

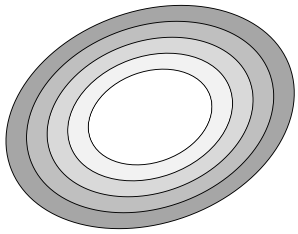
Für eine Folge $(X_n)_n$ unabhängiger Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$ gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$P\Big(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \varepsilon\Big) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} Var[X_k]$$

S_k bezeichnet dabei die k-te Partialsumme $\sum_{i=1}^{k} X_i$.

Setze

$$A_1 = \{|S_1| \ge \varepsilon\}$$
$$A_2 = \{|S_1| \le \varepsilon,\ |S_2| \ge \varepsilon\}$$
$$A_3 = \{|S_1| \le \varepsilon,\ |S_2| \le \varepsilon,\ |S_3| \ge \varepsilon\}$$
$$\dots$$
$$A_n = \{|S_1| \le \varepsilon,\ |S_2| \le \varepsilon,\ \dots,\ |S_{n-1}| \le \varepsilon,\ |S_n| \ge \varepsilon\}$$



Diese Ereignisse sind paarweise disjunkt und es gilt:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \varepsilon\}$$

Beachte nun, dass für jedes k die Zufallsgrößen $1_{A_k} S_k$ und $S_n - S_k = \sum_{i=k+1}^{n} X_i$ unabhängig sind, denn $1_{A_k} S_k$ hängt nur von $X_1, X_2, \dots, X_k$ ab und $S_n - S_k$ nur von $X_{k+1}, \dots, X_n$. Damit gilt für alle k:

$$* \ E[1_{A_k} S_k (S_n - S_k)] = E[1_{A_k} S_k]\, \underbrace{E[(S_n - S_k)]}_{=0} = 0$$

Folglich gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} Var[X_k] = Var[\sum_{k=1}^{n} X_k] = Var[S_n] = E[S_n^2] - \underbrace{E[S_n]^2}_{=0}$$

$$\ge E[\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} S_n^2] = \sum_{k=1}^{n} E[1_{A_k} S_n^2] \qquad \text{beachte } \bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \Omega$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E[1_{A_k} (S_k + (S_n - S_k))^2]$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n} \Big(E[1_{A_k} S_k^2] + 2\, \underbrace{E[1_{A_k} S_k (S_n - S_k)]}_{=0\ *}\Big) \ge \sum_{k=1}^{n} E[1_{A_k} \varepsilon^2]$$

$$= \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \varepsilon^2 P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \varepsilon^2 P\Big(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \varepsilon\Big) \qquad \square$$

↑ Tschebyschow-Ungleichung

Die Kolmogorow-Ungleichung ist natürlich eine Erweiterung der Tschebyschow-Ungleichung.
Sei X eine Zufallsvariable mit $E[X] = 0$.

Sei $A = \{|X| \geq \varepsilon\}$

Folglich gilt:

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - \underbrace{E[X]^2}_{=0} \\
&\geq E[1_A X^2] \qquad \text{beachte } A \subset \Omega \\
&\geq E[1_A \varepsilon^2] \\
&= \varepsilon^2 E[1_A] = P(A)
\end{aligned}
$$

und damit

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} Var[X]$$

□

↑ Konvergenzkriterium

Das folgende Konvergenzkriterium ist ein nützliches Hilfsmittel
beim Beweis tieferliegender Grenzwertsätze.

Sei $Y_n = \sup\limits_{k \geq n} |\, X_k - X \,|$.

Es gilt $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X$ genau dann, wenn $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

$\Longleftarrow$

Sei $A_\varepsilon = \limsup\limits_{n\to\infty} \{\, |\, X_n - X \,| \geq \varepsilon \}$.

Für diese Elemente ω gilt unendlich oft $|X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon$,

$X_n(\omega)$ konvergiert also nicht gegen X.

$$P(A_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{\, |\, X_k - X \,| \geq \varepsilon \}\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\underbrace{\sup_{k\geq n} |\, X_k - X \,|}_{Y_n} \geq \varepsilon\Big) = 0 \qquad *$$

siehe Seite 5

Für jedes ε ist also $P(A_\varepsilon) = 0$.

$$P(\{\omega \in \Omega \colon X_n(\omega) \nrightarrow X(\omega)\,\}) = P\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{1/m}\Big) \leq \sum_{m=1}^{\infty} P(A_{1/m}) = 0$$

$\Longrightarrow$

Aus der Konvergenz von $X_n(\omega)$ gegen $X(\omega)$ folgt (direkt) die Konvergenz von $Y_n(\omega)$ gegen 0.
Es wurde schon gezeigt (Seite 9), dass die fast sichere Konvergenz die stochastische impliziert.
Alternativ kann mit $P(A_\varepsilon) = 0$ und $*$ argumentiert werden. $\square$

↑ Konvergenzkriterium

Sei $(X_n)_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $E[X_n] = 0$. Es gelte $\sum_{n=1}^{\infty} Var[X_n] < \infty$.
Dann konvergiert $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ fast sicher.

$(S_n)_n$ konvergiert fast sicher genau dann, wenn $(S_n)_n$ mit Wahrscheinlichkeit 1 eine Cauchy-Folge ist.

Dies gilt genau dann, wenn für jedes $\varepsilon \geq 0$ $\quad P\Big(\sup_{k\geq 1} |\, S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon\Big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$ Siehe vorige Seite.

$$P\Big(\sup_{k\geq 1} |\, S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon\Big) = \lim_{m\to\infty} P\Big(\max_{1\leq k\leq m} |\, S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon\Big)$$

$$\overset{\text{Kolmogorow-Ungleichung}}{\leq} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{n+m} Var[X_k] = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} Var[X_k]$$

Die Konvergenz beider Seiten gegen 0 für $n \to \infty$ ist nun zu erkennen.

□

↑ Konvergenzkriterium   Kolmogorow

Sei $(X_n)_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Es gelte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{Var\big[X_n\big]}{n^2} < \infty$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(X_i - E[X_i]\big) = 0 \qquad \text{fast sicher}$$

Ohne Einschränkung sei $E[X_i] = 0$ für $i \in \mathbb{N}$.

Setze $Y_i = \frac{X_i}{i}$, dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var[Y_n] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var\big[X_n\big]}{n^2} \;<\; \infty$$

Setze weiter $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

Mit obigem Konvergenzkriterium konvergiert S_n fast sicher
und mit dem Satz von Kronecker folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \;= 0 \qquad \text{fast sicher}$$

□

Starkes Gesetz der großen Zahlen

Sei $(X_n)_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $E[X_n] = \mu$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \;= \mu \qquad \text{fast sicher}$$

Das arithmetische Mittel der Zufallsvariablen konvergiert fast sicher gegen den Erwartungswert.

Beachte: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;<\; \infty$ Quotientenkriterium