Binomialreihe

Newton entdeckte 1669 die binomische Reihe (Entwicklung eines Binoms mit gebrochenem oder negativem Exponenten) als Erweiterung des binomischen Lehrsatzes. Niels Henrik Abel betrachtete die Reihe 1826 im Komplexen.

Wir entwickeln $f(x) = (1+x)^\alpha$ um $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^\alpha & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) &= \alpha \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) &= \alpha(\alpha-1) \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Mit dem verallgemeinerten Binomialkoeffizient $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ergibt sich:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Für $|x| < 1$ liegt nach dem Quotientenkriterium Konvergenz vor. $\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right| = \underbrace{\left|\frac{\alpha-k}{\alpha+k}\right|}_{\to 1} \cdot |x|$

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2},\ \alpha = \frac{1}{2}$

$$\binom{\alpha}{0} = 1,\ \binom{\alpha}{1} = \frac{1}{2},\ \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} = \frac{1/2\cdot(-1/2)}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \binom{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha-2}{3} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{-3/2}{3} = \frac{1}{16}$$

$$\binom{\alpha}{4} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} = \binom{\alpha}{3}\cdot\frac{\alpha-3}{4} = \frac{1}{16}\cdot\frac{-5/2}{4} = -\frac{5}{128}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^3 + \ldots$$

$$(1+x)^{m/n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \frac{m}{n}x + \frac{m(m-n)}{2n^2}x^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{6n^3}x^3 + \ldots$$

$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x,\ \alpha = -1$

$$\binom{\alpha}{0} = 1,\ \binom{\alpha}{1} = -1,\ \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} = 1,\ \binom{\alpha}{3} = \binom{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha-2}{3} = -1,\ \binom{\alpha}{4} = 1$$

Binomialreihe

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \qquad \text{unmittelbar zu sehen: geometrische Reihe für } \frac{1}{1-(-x^2)}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad |x^2| < 1 \text{ somit } |x| < 1$$

Startseite

Binomischer Lehrsatz

Quotienten- und Wurzelkriterium