Satz von Binet-Cauchy

Der Satz von Binet-Cauchy verallgemeinert den Determinantenproduktsatz, er wird für verschiedene Beweise herangezogen.

Schauen wir uns ein Zahlenbeispiel an.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) = \det \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 11 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} +$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{A_{23}} \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{B^{23}} = 4 + (-2) + 30 = 32$$

Von A werden jeweils 2 Spalten mit den Nummern k_1, k_2 ausgewählt (3 Möglichkeiten für $A_{k_1 k_2}$) und von B die zugehörigen Zeilen mit den Nummern k_1, k_2, $B^{k_1 k_2}$.

einfachstes Beispiel

$$\det([a, b] \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}) = \det([ac + bd]) = ac + bd$$

Für eine $m \times n$-Matrix A und eine $n \times m$-Matrix B, $m \leq n$, gilt:

$$\det(A \cdot B) = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leq n} \det A_{k_1 \ldots k_m} \cdot \det B^{k_1 \ldots k_m}$$

Satz von Binet-Cauchy

$n = 3,\ m = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}, \quad A\cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Sei $C = A \cdot B, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$

$$\begin{aligned}
\det C &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, c_{1\sigma(1)}c_{2\sigma(2)} \\
&= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k\sigma(1)} \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k\sigma(2)} \\
&= \sum_{k_1,\, k_2=1}^{3} a_{1k_1}a_{2k_2} \underbrace{\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{k_1\sigma(1)}b_{k_2\sigma(2)}}_{\det B^{k_1k_2}} && \text{allgemein} \sum_{k_1,\dots,\, k_m=1}^{n} a_{1k_1} \dots a_{mk_m} \sum_{\sigma} \dots \\
&= \sum_{k_1,\, k_2=1}^{3} a_{1k_1}a_{2k_2}\, \det B^{k_1k_2} && \det B^{k_1k_2} = 0 \text{ für } k_1 = k_2 \\
&= \sum_{1\le k_1<k_2\le 3} \sum_{\sigma} a_{1\sigma(k_1)}a_{2\sigma(k_2)}\, \det B^{\sigma(k_1)\sigma(k_2)} && * \text{ allgemein} \sum_{1\le k_1<k_2<\dots<k_m\le n} \sum_{\sigma} \dots \\
&= \sum_{1\le k_1<k_2\le 3} \Big(\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(k_1)}a_{2\sigma(k_2)} \Big) \det B^{k_1k_2} && \det B^{\sigma(k_1)\sigma(k_2)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \det B^{k_1k_2} \\
&= \sum_{1\le k_1<k_2\le 3} \det A_{k_1k_2} \det B^{k_1k_2}
\end{aligned}$$

*
Stimmen zwei Indizes (hier k_1, k_2) überein, so sind in der Matrix $B^{k_1k_2}$, allgemein $B^{k_1\cdots k_m}$, zwei Zeilen gleich und daher verschwindet ihre Determinante, der entsprechende Summand kann also weggelassen werden.
Mit Hilfe aller Permutationen σ werden die verbleibenden Möglichkeiten für k_1 und k_2 erfasst.

$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \sigma}$

Für $i < j$ mit $\sigma(i) > \sigma(j)$ liegt ein Fehlstand von σ vor.