Bellsche Zahlen $B(n)$

Sei M_n eine n-elementige Menge. Um die Anzahl aller Äquivalenzrelationen auf M zu ermitteln, ist zu untersuchen, wie viele Partitionen $B(n)$ (Partition, Zerlegung in disjunkte nichtleere Teilmengen) es von M_n gibt.

Beispiel für $n = 3$, $M_3 = \{a, b, c\}$

Partitionen

$\{a\}, \{b\}, \{c\}$ genauer: $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

$\{a, b\}, \{c\}$ $\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\{a, c\}, \{b\}$

$\{b, c\}, \{a\}$

$\{a, b, c\}$

Wir erhalten $B(3) = 5$.

Fügen wir ein weiteres Element d hinzu
und fragen uns: Wie ergeben sich die Partitionen von $M_4 = \{a, b, c, d\}$

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$

$\{a, b\}, \{c, d\}$

$\{a, c\}, \{b, d\}$

...

$\{a, b, c\}, \{d\}$

$\{a, b, d\}, \{c\}$

...

$\{a, b, c, d\}$

aus den Partitionen von M_3?

d ist bei jeder Partition in einer Teilmenge enthalten.

Die Partitionen können daher nach Typen unterschieden werden:

1. $\{d\}$
2. $\{d, x\}$
3. $\{d, x, y\}$
4. $\{d, x, y, z\}$, $\quad x, y, z \in M_3$

Wir ermitteln die Anzahlen.

1. $\{d\}$ Hiervon gibt es $B(3) = 5$ Partitionen, da noch 3 Elemente verbleiben.
2. $\{d, x\}$ Für x gibt es $\binom{3}{1}$ Möglichkeiten, es verbleiben 2 Elemente, $\binom{3}{1} \cdot B(2) = 3 \cdot 2 = 6$.
3. $\{d, x, y\}$ Für x, y gibt es $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten, es verbleibt 1 Element, $\binom{3}{2} \cdot B(1) = 3 \cdot 1 = 3$.
4. $\{d, x, y, z\}$ Dies ist nur mit $\{d, a, b, c\}$ möglich, formal: $\binom{3}{3} \cdot B(0) = 1 \cdot 1 = 1$, mit $B(0) := 1$.

Allgemein:

$$B(n+1) = \binom{n}{0} B(n) + \binom{n}{1} B(n-1) + \binom{n}{2} B(n-2) + \ldots + \binom{n}{n-1} B(1) + \binom{n}{n} B(0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(i)$$

beachte: $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ $\qquad B(4) = 15,\ B(5) = 52,\ B(6) = 203,\ B(7) = 877,\ B(8) = 4140$

Für weitere Zahlen siehe GeoGebra-Datei.