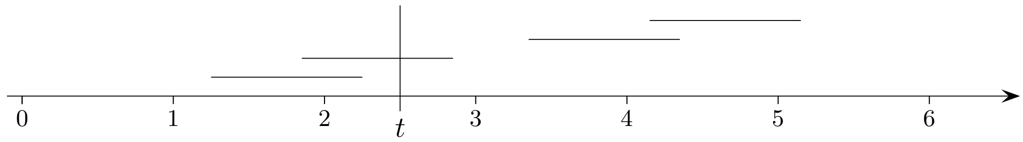
Auslastungsmodell

In einem Büro benötigt im Schnitt jede der $n = 4$ Personen einen der zwei vorhandenen Kopierer für jeweils $m = 10$ Minuten pro Stunde. Wie oft kommt es zu Wartezeiten?



Wir stellen uns vereinfachend vor, dass jede Person unabhängig von den übrigen Nutzern die benötigten Zeiten (zufallsbedingt) der Sekretärin mailt, die die Wünsche in einer Grafik festhält. Die Anzahl der Geräte wird hier noch nicht berücksichtigt. Zu jedem festen Zeitpunkt t und für jeden Nutzer beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass t in der jeweiligen Nutzungszeit enthalten ist, $p = \frac{m}{60}$ (siehe Ergänzung).
Die Anzahl X der Überdeckungen von t kann die Werte $k = 0, 1, \ldots n$ annehmen.
Es ist anzumerken, dass dies ein theoretischer Nutzungsplan ist, falls $X > 2$ ist.

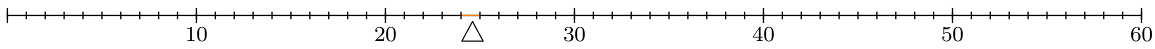
Lösung der Aufgabe
$P^4_{1/6}(X > 2) = 1{,}6\,\%$ (Binomialverteilung)
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1,6 % muss eine Person
(, die zu einem beliebigen Zeitpunkt kommt,) warten.

Mit den Wahrscheinlichkeiten $P^n_p(X \leq k)$ kann die Anzahl der benötigten Geräte abgeschätzt werden.

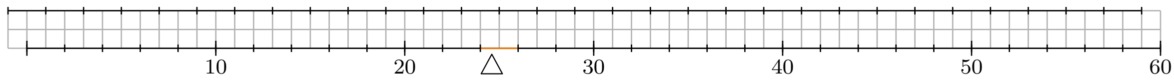
Beispiele:
$n = 5$ Personen pro Stunde
$p = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ Tätigkeitsdauer 20 Minuten
$P^5_{1/3}(X \leq 2) = 0{,}790$ Wahrscheinlichkeit für höchstens 2 Überdeckungen (Geräte)
$P^5_{1/3}(X \leq 3) = 0{,}955$
3 Geräte reichen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,5 % aus.

Während der Öffnungszeiten von 8 Uhr bis 12 Uhr kommen im Mittel 50 Kunden.
Ihre Bedienzeit beträgt durchschnittlich 10 Minuten.
Pro Stunde ist dies ein Anteil von $p = \frac{10}{240}$.
3 Kundenbetreuer reichen mit einer Wahrscheinlichkeit von 84,6 % aus,
4 mit einer Wahrscheinlichkeit von 94,4 %.

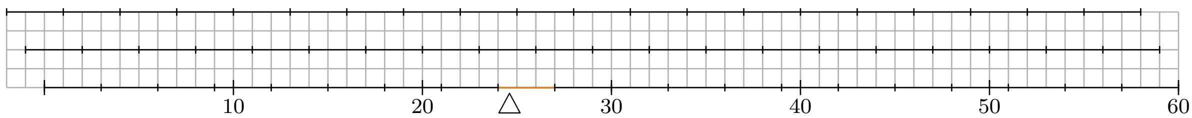
Auslastungsmodell   Ergänzung



Falls eine Minute aus 60 Minuten ausgewählt wird, beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Zeitpunkt $p = \frac{1}{60}$.



Wird nun eine Zeitspanne von 2 Minuten im Schnitt einmal aus 60 Minuten ausgewählt, beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Zeitpunkt $p = \frac{2}{60}$.
Es gibt hier zwei Arten von Intervallen, die den Zeitpunkt überdecken können. Dies geschieht mit gleichen Wahrscheinlichkeiten. Statt die 60 Überdeckungsmöglichkeiten zu betrachten, kann die Überdeckung auch zweistufig gesehen werden: Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ wird die Intervallart gewählt, die Überdeckung erfolgt dann mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{30}$, also insgesamt:
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{30}$



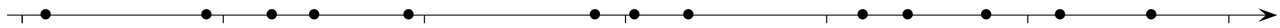
Wird eine Zeitspanne von 3 Minuten im Schnitt einmal aus 60 Minuten ausgewählt, beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Zeitpunkt $p = \frac{3}{60}$.
Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ wird die Intervallart gewählt, die Überdeckung erfolgt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20}$, also insgesamt: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} \cdot 3 = \frac{1}{20}$

Wird eine Zeitspanne von 10 Minuten im Schnitt einmal aus 60 Minuten ausgewählt, beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Zeitpunkt $p = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$.

An der grundsätzlichen Überlegung ändert sich nichts, wenn wir zu einer feineren Unterteilung (Sekunden) übergehen würden.

Auslastungsmodell   Poisson-Prozess

Um das zeitliche Eintreffen der Nutzer zu modellieren, wäre der Ablauf als Poisson-Prozess zu erfassen.



Die letzte Fragestellung soll unter dieser Blickrichtung noch einmal bearbeitet werden.

Während der Öffnungszeiten von 8 Uhr bis 12 Uhr kommen im Mittel 50 Kunden.
Ihre Bedienzeit beträgt durchschnittlich 10 Minuten.
Der Erwartungswert für 10 Minuten beträgt dann $\mu = \frac{50}{24}$ Kunden.
$P_{50/24}(X \leq 3) = 0{,}842$ (Poissonverteilung)
$P_{50/24}(X \leq 4) = 0{,}940$

3 Kundenbetreuer reichen mit einer Wahrscheinlichkeit von 84,2 % aus,
4 mit einer Wahrscheinlichkeit von 94,0 %.