Ausfließvorgang

Aus einem Gefäß fließt Wasser durch eine Öffnung am Boden aus. Gesucht ist der Graph, der die Höhe y des Wasserspiegels in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

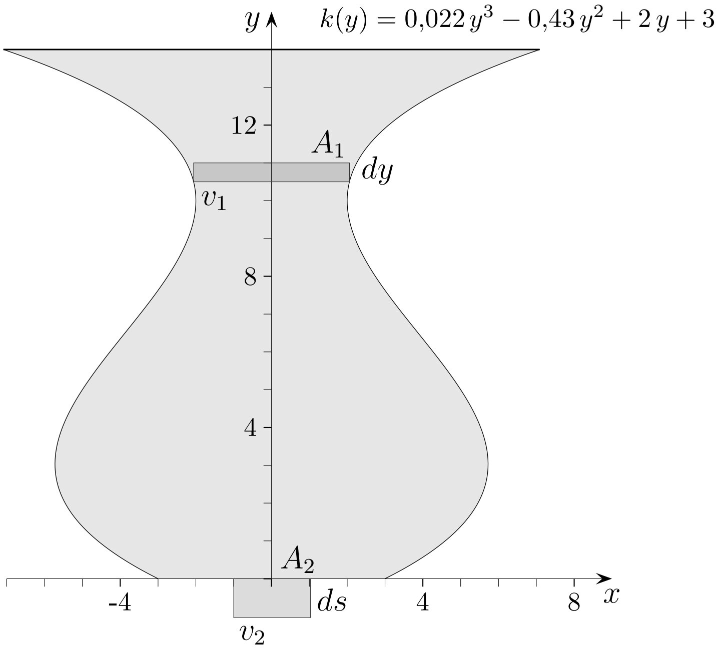
Für den Flüssigkeitsspiegel A_1 und der Bodenöffnung A_2 (und allgemein für je zwei Schnittflächen innerhalb der Flüssigkeit) gilt, da das Volumen im Gefäß in dem Maße abnimmt, wie Flüssigkeit austritt:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot\; dy &= A_2 \cdot\; ds \qquad | : dt \\ A_1 \cdot \frac{dy}{dt} &= A_2 \cdot \frac{ds}{dt} \\ A_1 \cdot\; v_1 &= A_2 \cdot\; v_2 \end{aligned}$$

v_1 und v_2 sind die zugehörigen Fließgeschwindigkeiten. Betrachten wir A_1, so ist v_1 die Sinkgeschwindigkeit des Flüssigkeitsspiegels. Für v_2 gilt: $v_2 = \mu \cdot \sqrt{2\,g\,y}$ (Torricelli), da die potentielle Energie $\Delta m\,g\,y$ (g Fallbeschleunigung) in kinetische Energie $\frac{1}{2}\Delta m\,v_2^2$ umgewandelt wird:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Delta m\,v_2^2 &= \Delta m\,g\,y \\ \Longrightarrow \quad v_2 &= \sqrt{2\,g\,y} \end{aligned}$$

Für den reibungsfreien Fall gilt $\mu = 1$, für Wasser aufgrund der Viskosität $\mu = 0{,}6$.



Damit erhalten wir:

$$f'(t) = -\frac{A_2}{A_1} \cdot \mu \cdot \sqrt{2\,g\,f(t)}$$

Die Schnittfläche A_1 hängt im Allgemeinen von der Höhe y ab.
Falls z. B. ein Rotationskörper der Höhe h vorliegt, das Profil durch die Funktion $k(y)$ erfasst wird und der Radius der kreisförmigen Bodenöffnung r ist, lautet die DGL:

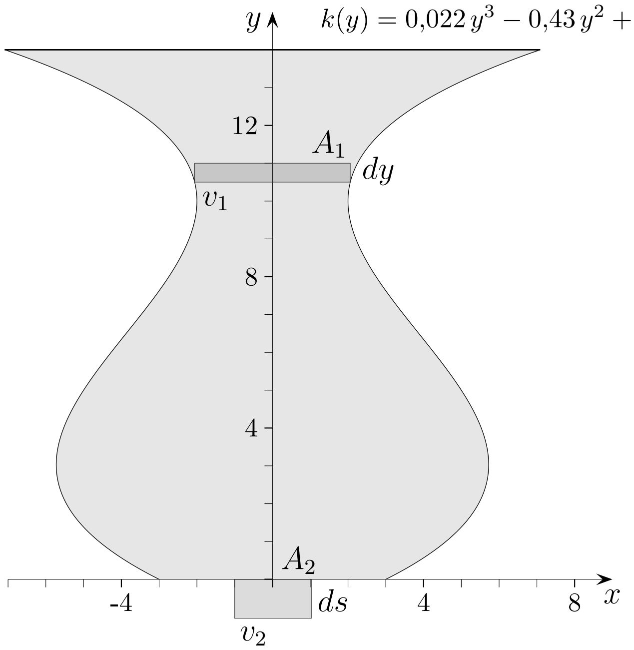
$$f'(t) = -\frac{r^2}{[k(f(t))]^2} \cdot \mu \cdot \sqrt{2\,g\,f(t)}\,, \qquad f(0) = h$$

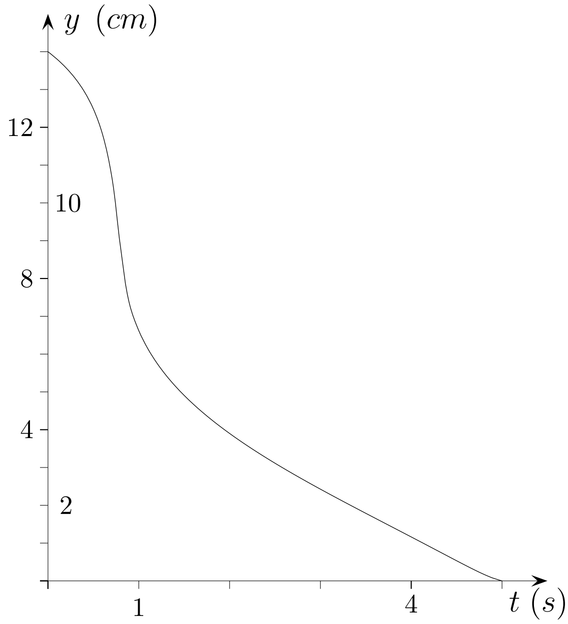
Ausfließvorgang

Die Iterationsgleichung lautet:

$$y_{n+1} \;=\; y_n - \frac{r^2}{[k(y_n)]^2} \cdot \mu \cdot \sqrt{2\,g\,y_n} \cdot \Delta t\,, \qquad y_0 = h$$

$g = 981\ cm/s^2$





Um die Zeit T zu berechnen, in der das Wasser abfließt, gehen wir wie folgt vor:

$$\frac{dy}{dt} \;=\; -\,\frac{r^2}{[k(y)]^2} \cdot \mu \cdot \sqrt{2\,g\,y}\,, \qquad y(0) = h$$

$$\frac{dt}{dy} \;=\; -\,\frac{[k(y)]^2}{r^2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2\,g\,y}}$$

$$T \;=\; -\int_h^0 \frac{[k(y)]^2}{r^2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2\,g\,y}}\;dy \;=\; \int_0^h \frac{[k(y)]^2}{r^2 \cdot \mu \cdot \sqrt{2\,g\,y}}\;dy$$

Für das Beispiel $(h = 14\ cm\,,\ r = 1\ cm)$ erhalten wir $T = 5{,}15\ s$.