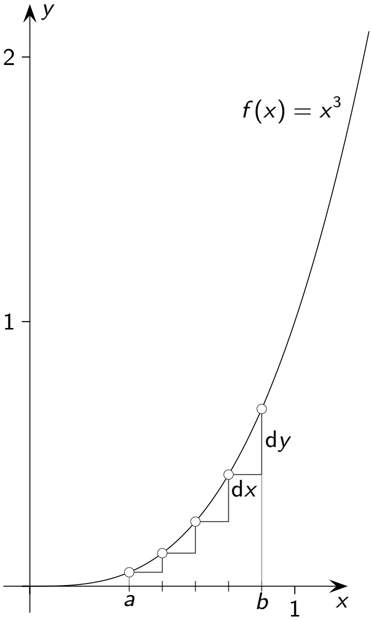
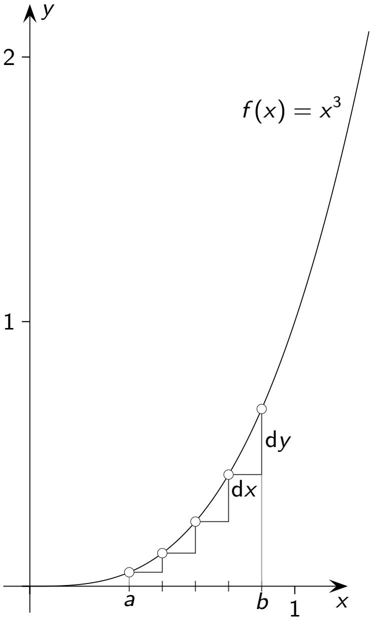
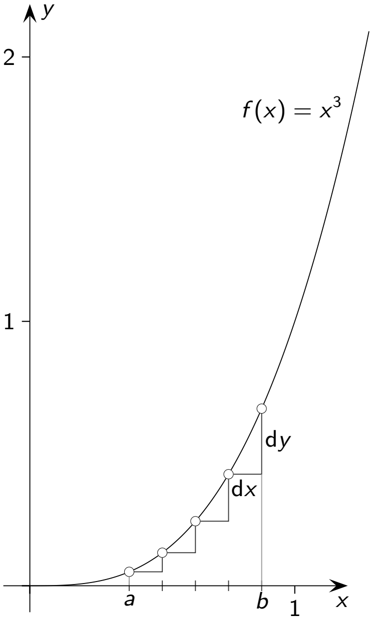
Leibniz-Kalkül

groolfs.de


y
2
1
$f(x) = x^3$
dy
dx
a
b
1
x

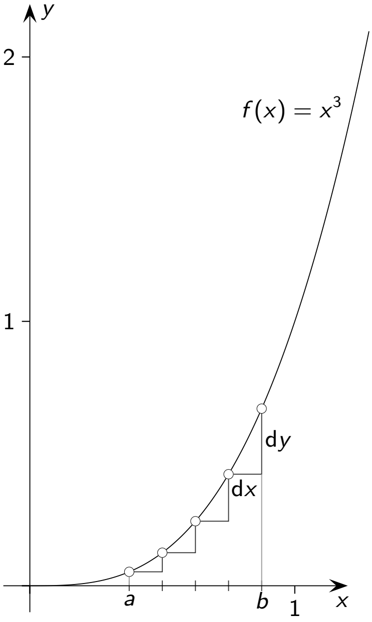


Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.



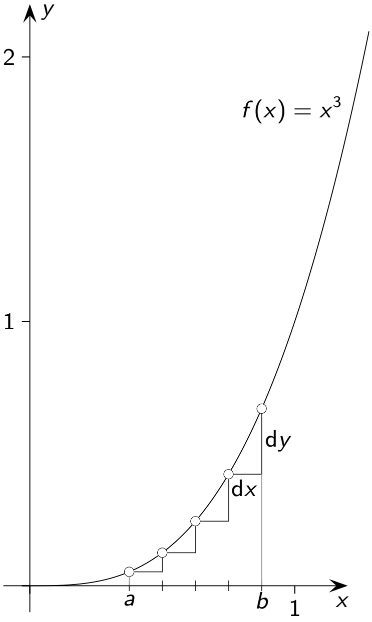
Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$\mathrm{d}y =$$



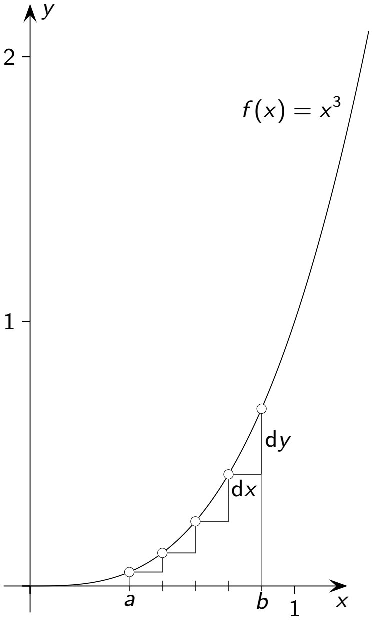
Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= f(x + \mathrm{d}x) - f(x) \\ &= \end{aligned}$$



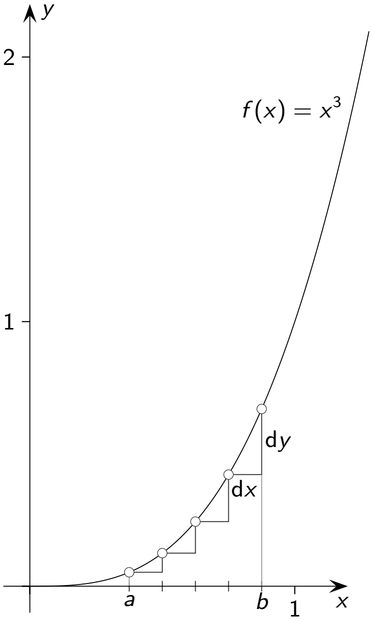
Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\ &= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\ &= \end{aligned}$$



Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

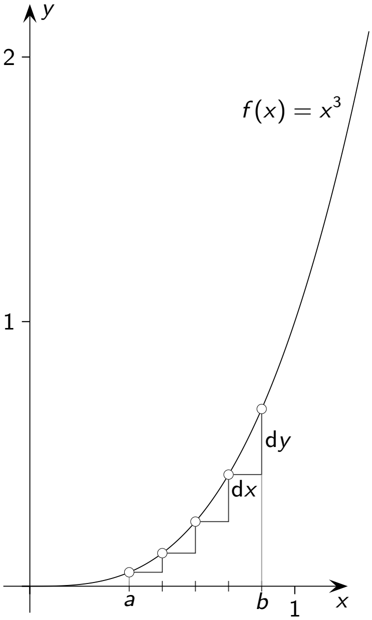
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\
&= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\
&=
\end{aligned}$$



Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs $\mathrm{d}y$ in Abhängigkeit von x und $\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\
&= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\
&= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3
\end{aligned}
$$

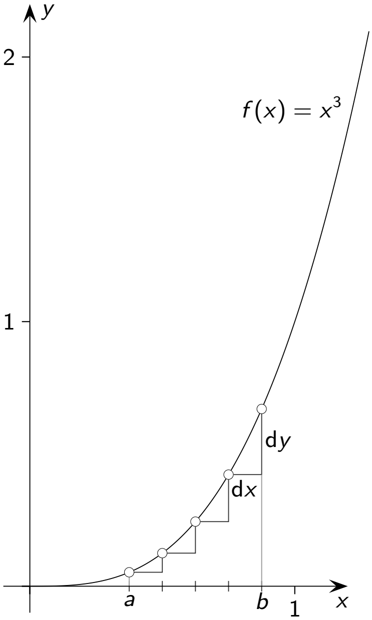
$$\mathrm{d}y \approx$$



Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs $\mathrm{d}y$ in Abhängigkeit von x und $\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\ &= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\ &= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}y \approx 3x^2\mathrm{d}x$$

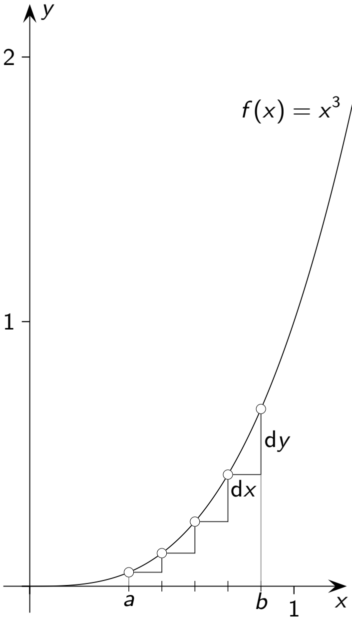


Für kleines dx sind dx^2 und dx^3 verschwindend klein.

Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= f(x + \mathrm{d}x) - f(x) \\ &= (x + \mathrm{d}x)^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\ &= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}y \approx 3x^2\mathrm{d}x$$

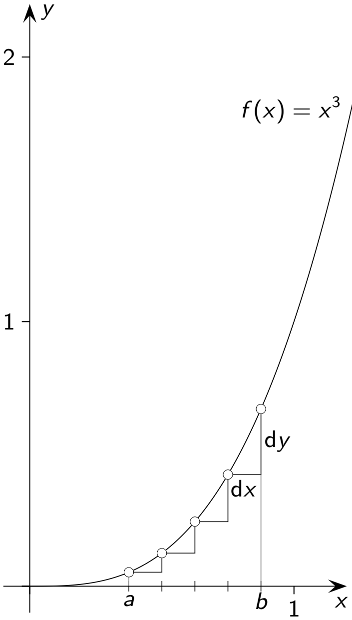


$3x^2\mathrm{d}x$ kann als Näherung für dy betrachtet werden.

Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\
&= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\
&= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}y \approx 3x^2\mathrm{d}x$$

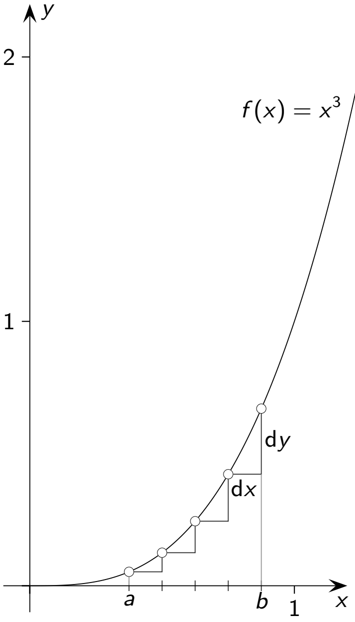


$3x^2\mathrm{d}x$ kann als Näherung für $\mathrm{d}y$ betrachtet werden.
$\mathrm{d}x$ kann so klein gewählt werden, dass jeder vorgegebene

Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs $\mathrm{d}y$ in Abhängigkeit von x und $\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\
&= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\
&= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}y \approx 3x^2\mathrm{d}x$$

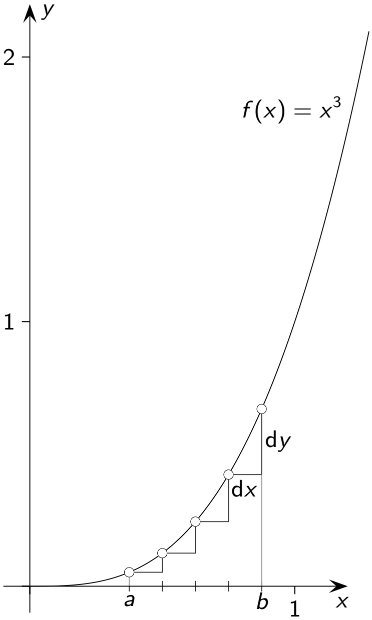


$3x^2\mathrm{d}x$ kann als Näherung für dy betrachtet werden.
dx kann so klein gewählt werden, dass jeder vorgegebene Näherungsfehler (z. B. für die Tangentensteigung dy/dx)

Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\
&= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\
&= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}y \approx 3x^2\mathrm{d}x$$

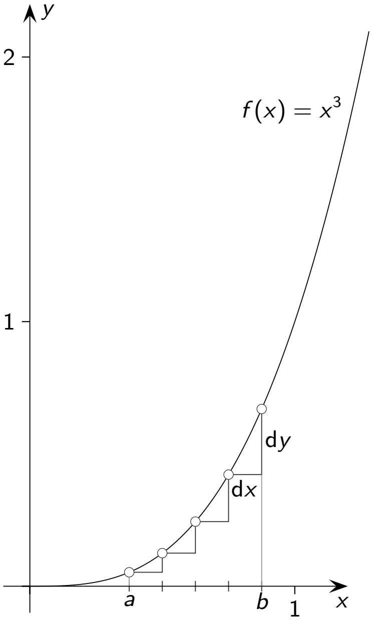


$3x^2\mathrm{d}x$ kann als Näherung für dy betrachtet werden.
dx kann so klein gewählt werden, dass jeder vorgegebene Näherungsfehler (z. B. für die Tangentensteigung dy/dx) nicht überschritten wird. Sprechweisen:

Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\
&= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\
&= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}y \approx 3x^2\mathrm{d}x$$

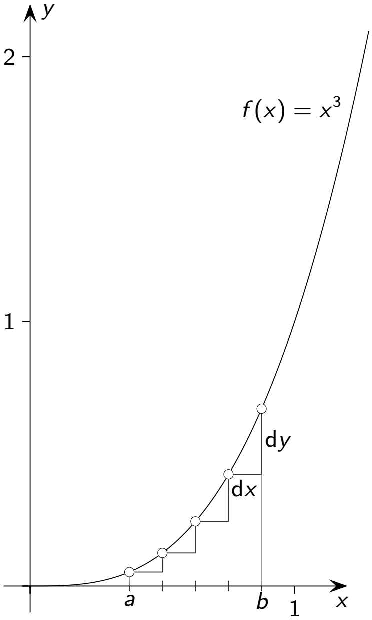


dx und dy sind infinitesimale Größen oder Differentiale.

Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= f(x + \mathrm{d}x) - f(x) \\ &= (x + \mathrm{d}x)^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\ &= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}y \approx 3x^2\mathrm{d}x$$

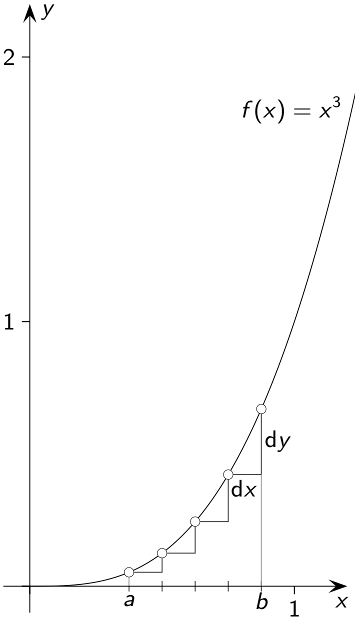


dx und dy sind infinitesimale Größen oder Differentiale.
Statt des $\approx$-Zeichens wird das $=$-Zeichen verwendet.

Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= f(x + \mathrm{d}x) - f(x) \\ &= (x + \mathrm{d}x)^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\ &= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}y \approx 3x^2\mathrm{d}x$$

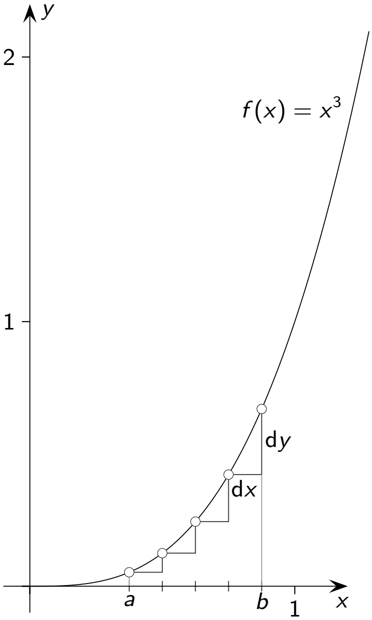


dx und dy sind infinitesimale Größen oder Differentiale. Statt des $\approx$-Zeichens wird das $=$-Zeichen verwendet.

Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= f(x + \mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x + \mathrm{d}x)^3 - x^3 \\
&= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\
&= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x$$

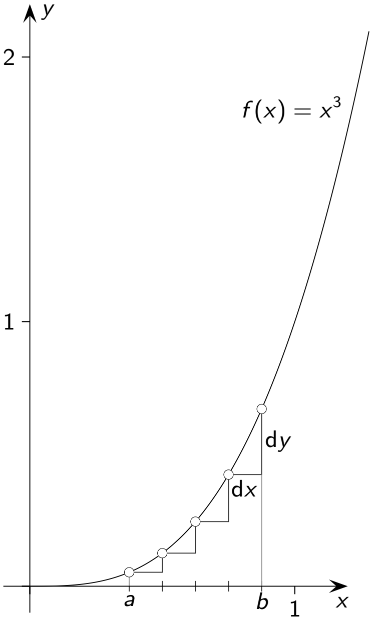


dx und dy sind infinitesimale Größen oder Differentiale.
Statt des $\approx$-Zeichens wird das $=$-Zeichen verwendet.
Missverständlich: dx und dy sind unendlich klein.

Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\
&= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\
&= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x$$

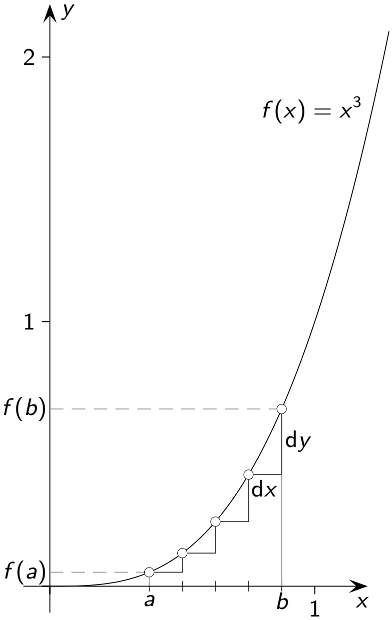


dx und dy sind infinitesimale Größen oder Differentiale.
Statt des $\approx$-Zeichens wird das $=$-Zeichen verwendet.
Missverständlich: dx und dy sind unendlich klein.

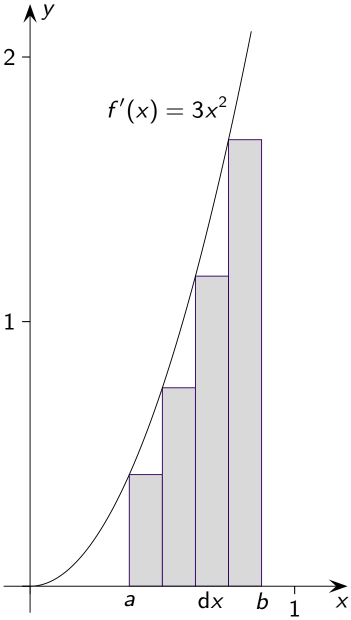
Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs dy in Abhängigkeit von x und dx.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x) \\
&= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3 \\
&= x^3 + 3x^2\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3 \\
&= \underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3
\end{aligned}$$

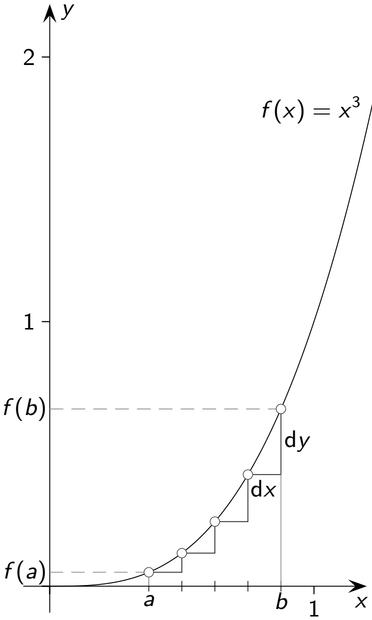
$\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x$ wird als Rechtecksinhalt interpretiert

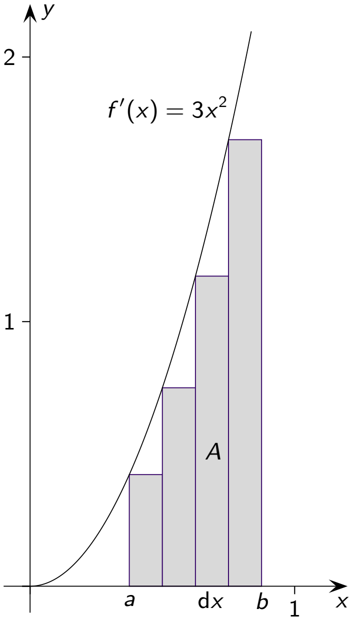


y
2
1
f(x) = x^3
f(b)
f(a)
dy
dx
a
b
1
x

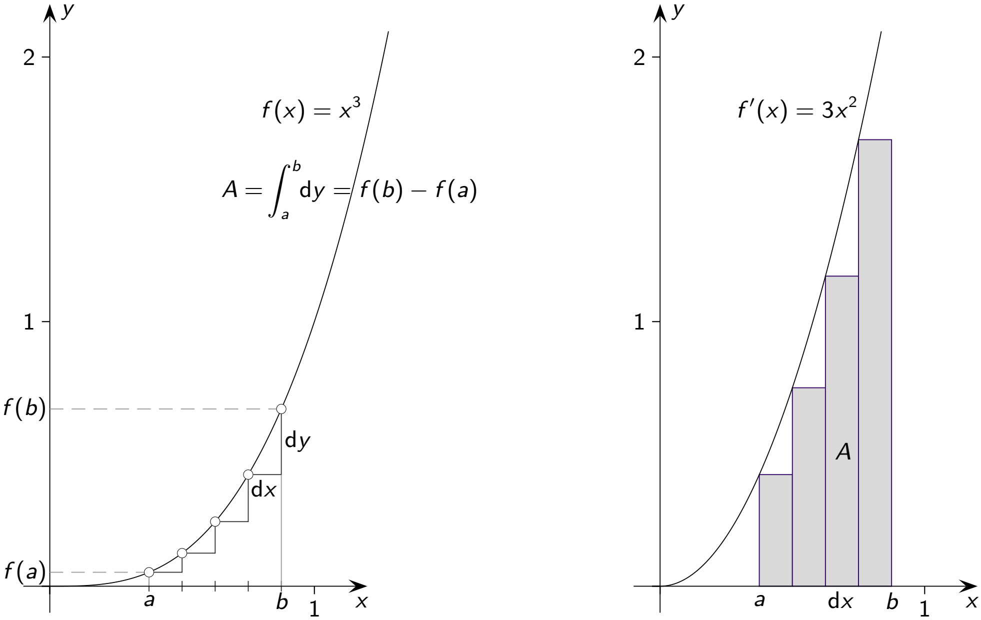


y
2
1
f′(x) = 3x^2
a
dx
b
1
x

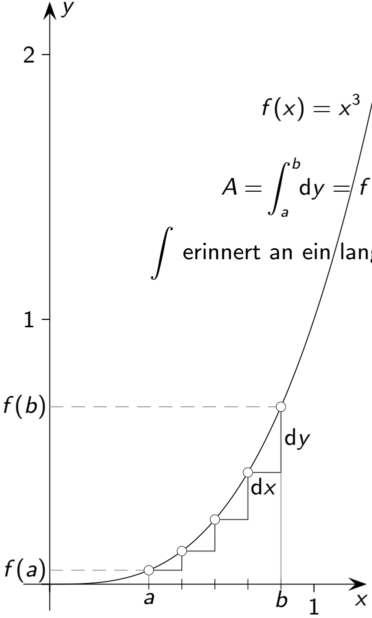




Wegen $\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x$ kann die Summe der Rechtecksinhalte mit der Summe der Zuwächse $\mathrm{d}y$ gebildet werden.

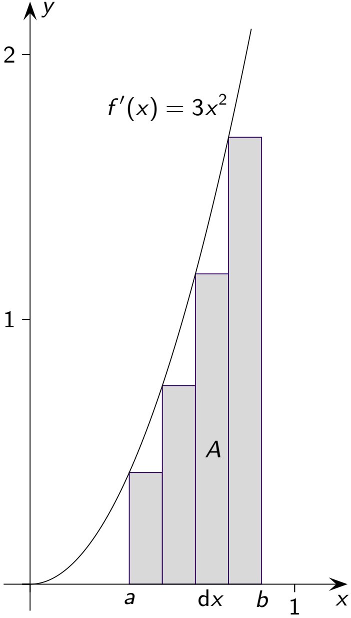


Wegen $\mathrm{d}y = 3x^2 \mathrm{d}x$ kann die Summe der Rechtecksinhalte mit der Summe der Zuwächse $\mathrm{d}y$ gebildet werden.

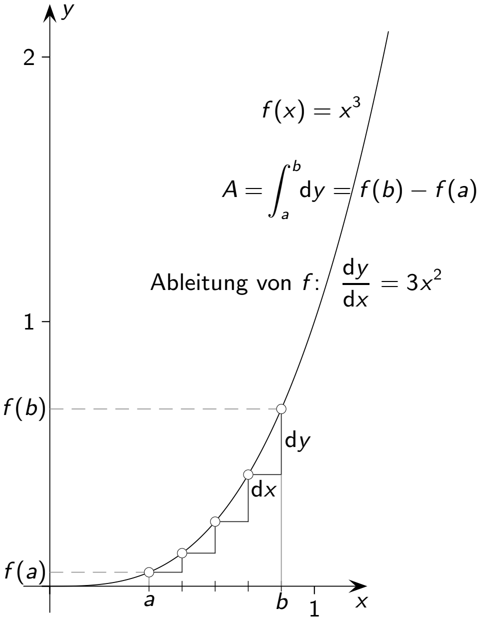


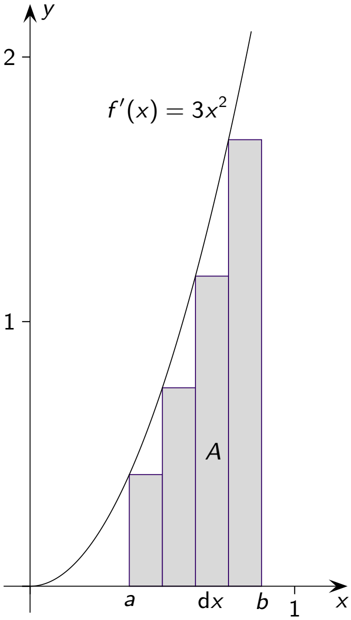
$$A = \int_a^b \mathrm{d}y = f(b) - f(a)$$

$\int$ erinnert an ein langgezogenes S(umme).

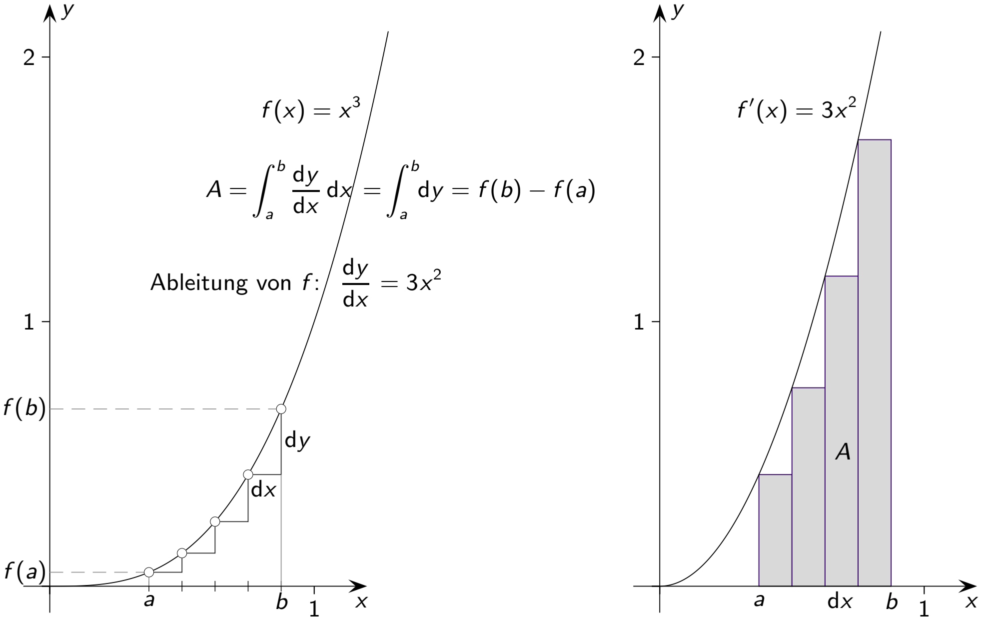


Wegen $\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x$ kann die Summe der Rechtecksinhalte mit der Summe der Zuwächse $\mathrm{d}y$ gebildet werden.

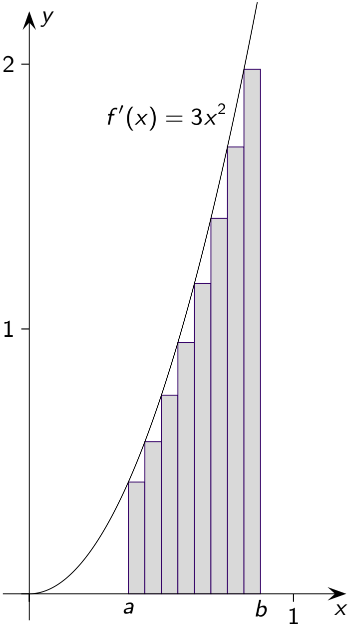




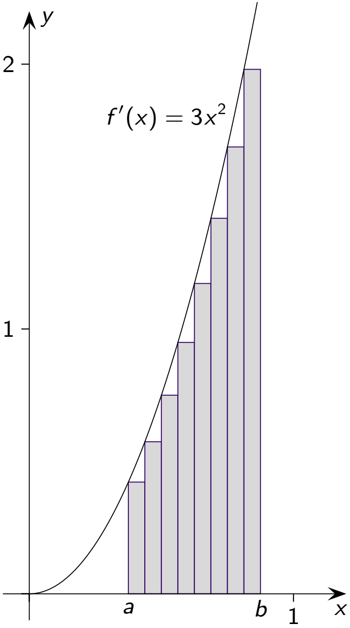
Wegen $\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x$ kann die Summe der Rechtecksinhalte mit der Summe der Zuwächse $\mathrm{d}y$ gebildet werden.

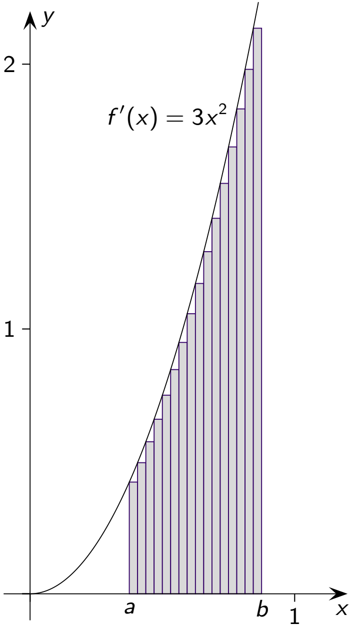


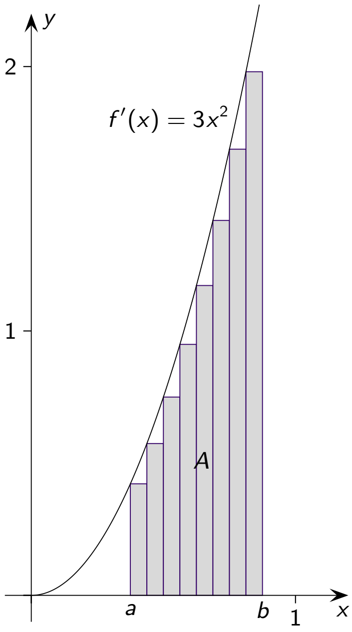
Wegen $dy = 3x^2 dx$ kann die Summe der Rechtecksinhalte mit der Summe der Zuwächse dy gebildet werden.



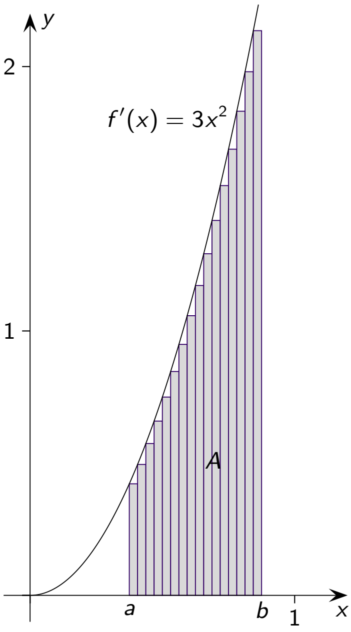
y
2
1
$f'(x) = 3x^2$
a
b
1
x


y
2
1
$f'(x) = 3x^2$
a
b
1
x

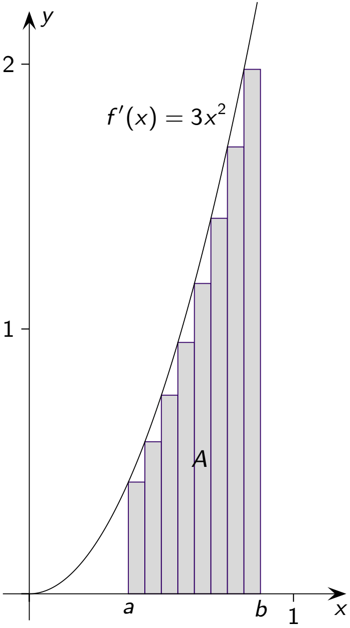

y
2
1
$f'(x) = 3x^2$
a
b
1
x



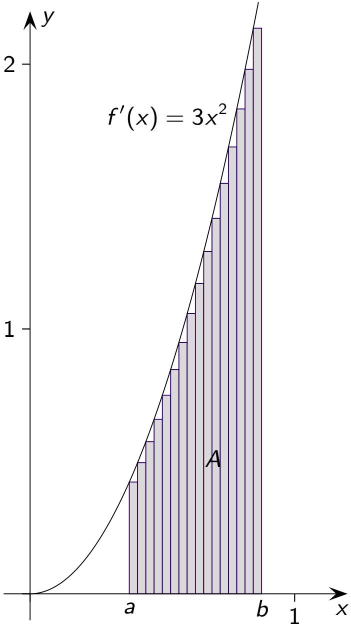
y
2
1
$f'(x) = 3x^2$
A
a
b
1
x



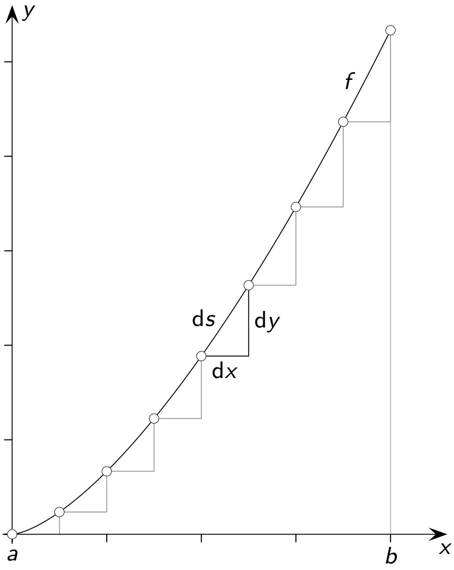
y
2
1
$f'(x) = 3x^2$
A
a
b
1
x



$$A = f(b) - f(a)$$

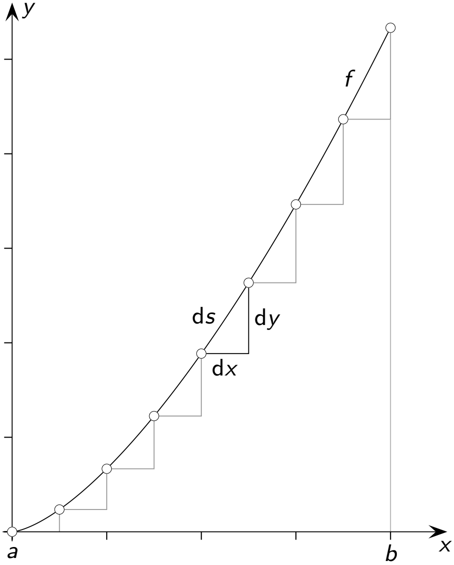


Bogenlänge



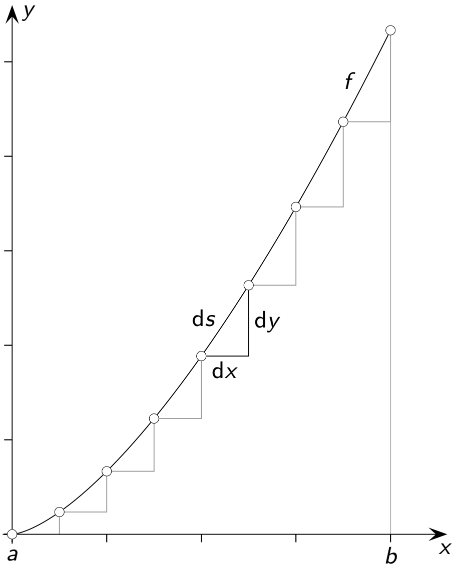
$L =$

Bogenlänge



$$L = \int_a^b \mathrm{d}s$$

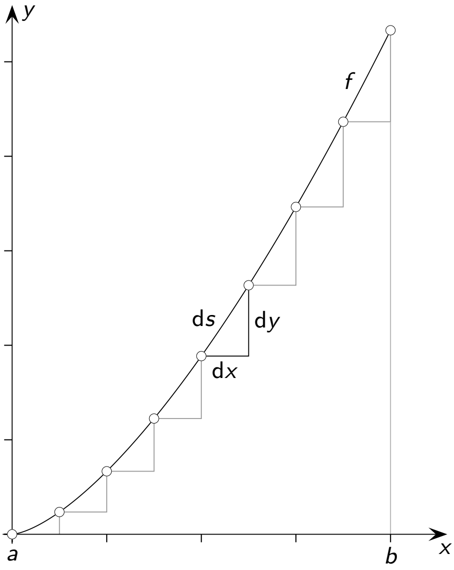
Bogenlänge



$$L = \int_a^b ds$$

$$ds^2 =$$

Bogenlänge

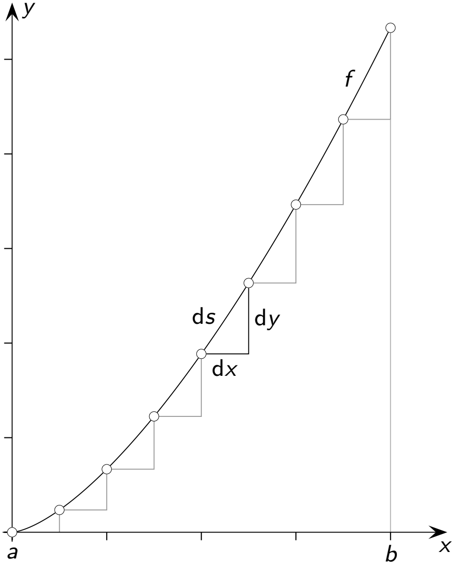


$$L = \int_a^b \mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}s =$$

Bogenlänge

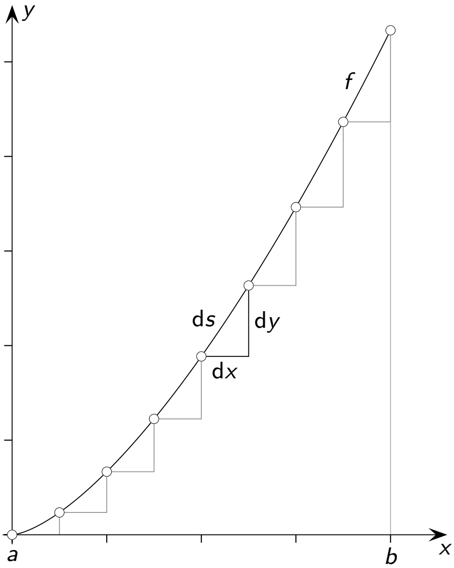


$$L = \int_a^b \mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

Bogenlänge



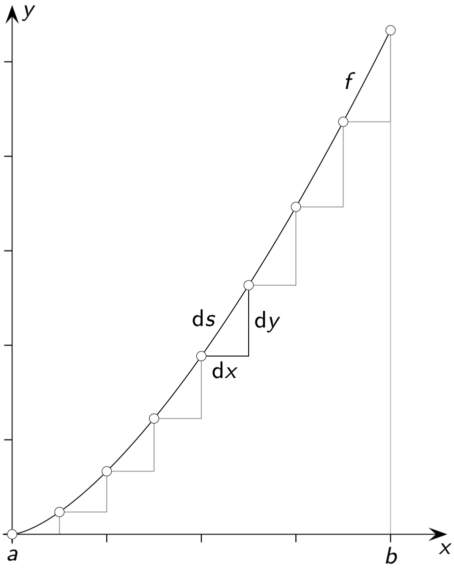
$$L = \int_a^b \mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

Bogenlänge



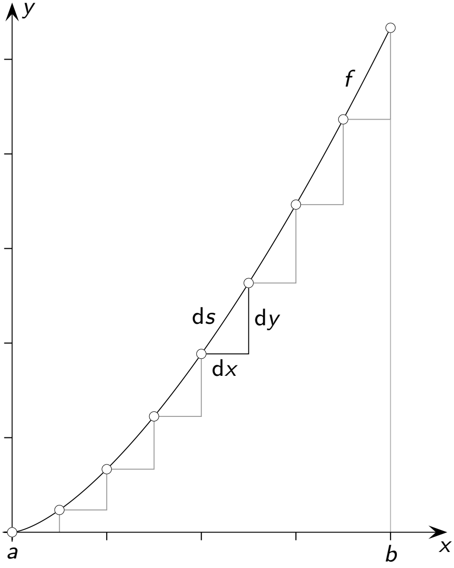
$$L = \int_a^b \mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Bogenlänge



$$L = \int_a^b \mathrm{d}s$$

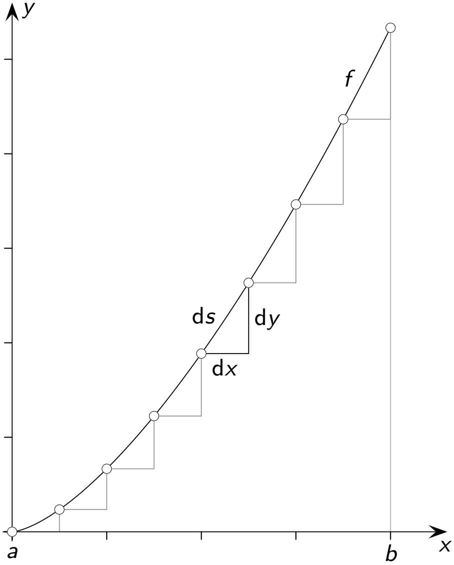
$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Bogenlänge



$$L = \int_a^b \mathrm{d}s$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$$