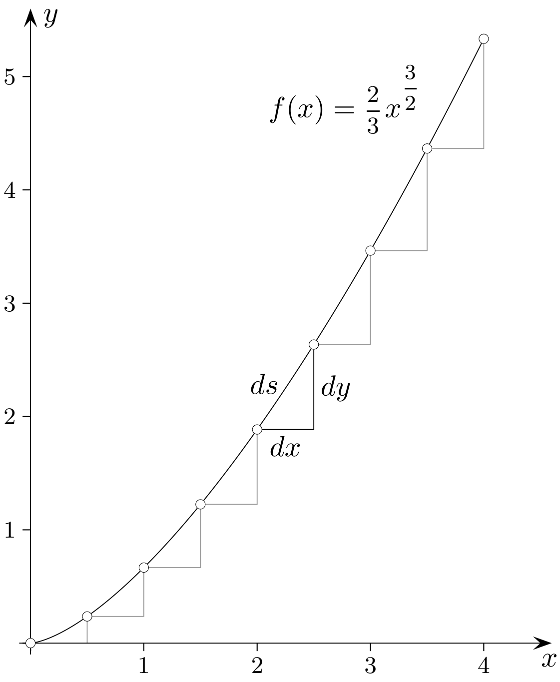
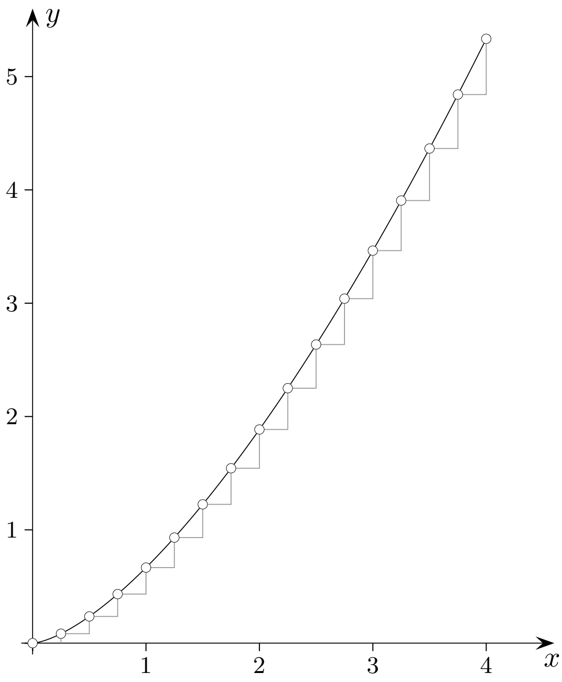
Analysis

In der höheren Mathematik geht es darum, Krummliniges in den Griff zu bekommen, z. B. die Länge eines Graphen zu ermitteln.





Mit einem Computer-Programm und hinreichend feiner Unterteilung erhält man für das abgebildete Kurvenstück $L \approx 6{,}787$ LE.

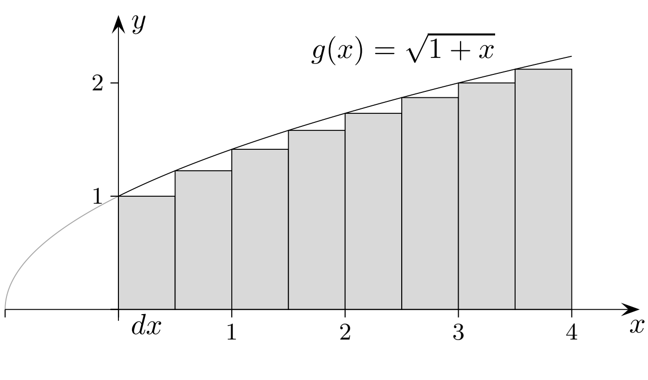
Wie kann L errechnet werden?

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$L \approx \sum_{dx} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \approx \sum_{dx} \sqrt{1+x}\, dx \qquad \text{mit } f'(x) = \sqrt{x}$$

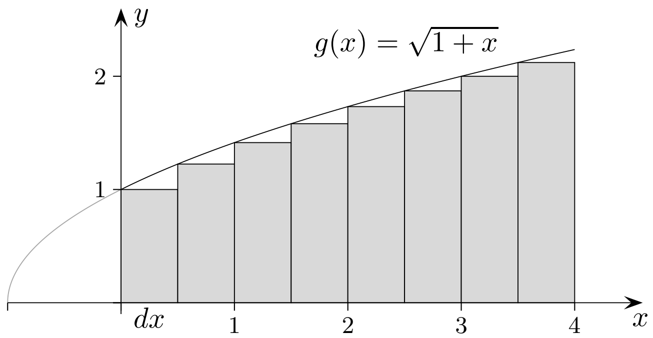
$$f'(x) \approx \frac{dy}{dx}$$

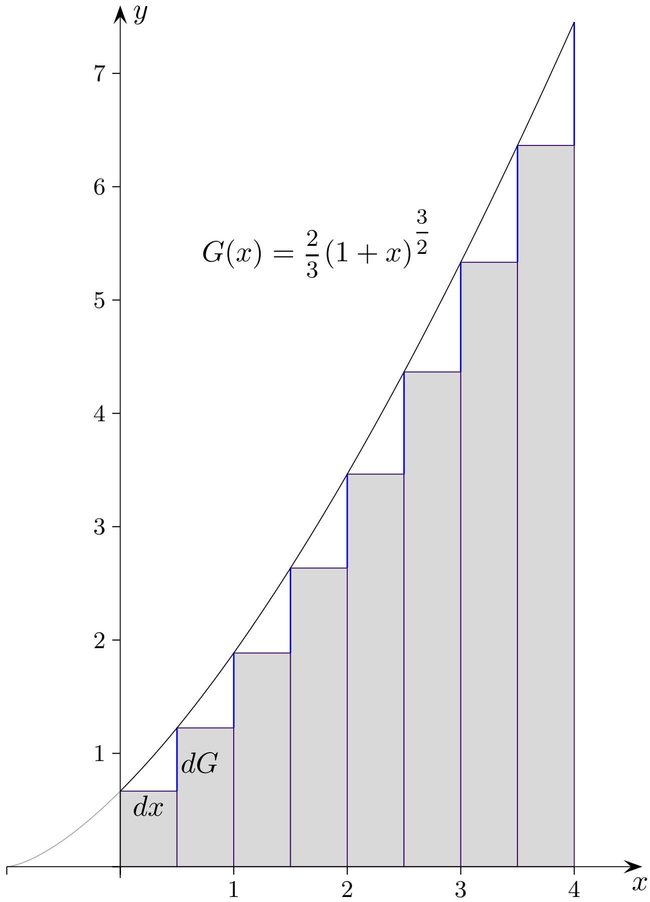


$\sum_{dx} \sqrt{1+x}\, dx$ wird durch den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von g approximiert.

Auf der nächsten Seite sehen wir, wie diese Fläche ohne Summenbildung berechnet werden kann.

Analysis





Zur Berechnung der Fläche A unter dem Graphen von g in den Grenzen von 0 bis 4 verwenden wir eine Funktion G, für die $G' = g$ gilt (Stammfunktion, Aufleitung). Mit dieser brillianten Idee führt die Summenbildung auf eine Differenz von Funktionswerten einer Stammfunktion.

$$\begin{aligned} g(x) &= G'(x) \\ \sqrt{1+x} &\approx \frac{dG}{dx} \\ \sqrt{1+x}\,dx &\approx dG \end{aligned}$$

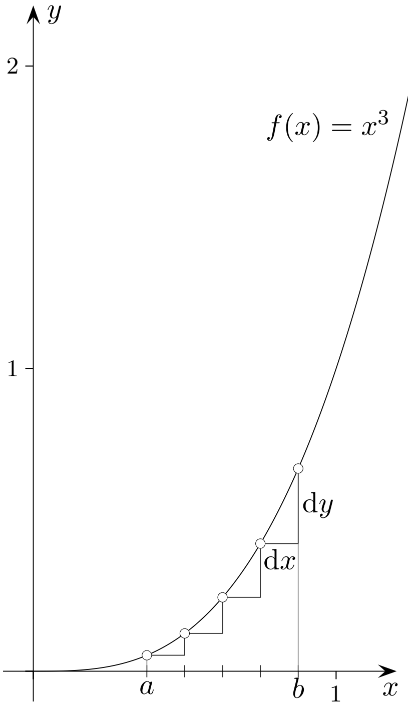
$$A \approx \sum_{dx} \sqrt{1+x}\,dx \approx \sum_{dx} dG = G(4) - G(0) \approx 6{,}7869$$

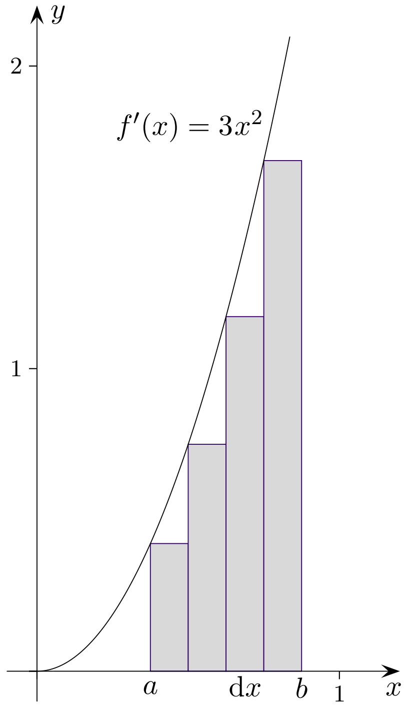
Das Ergebnis ist sehr exakt, trotz der vielen $\approx$-Zeichen.
Offensichtlich gilt (Beweis 1. Semester Mathematik): Mit kleiner werdendem dx streben die Näherungsfehler für die Kurvenlänge und den Flächeninhalt gegen null. Es verbleibt $A = G(4) - G(0)$.

Statt $dx \to 0$ und damit $dy \to 0$ und $ds \to 0$ zu notieren, wird einfacherweise die Schreibweise $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}s$ verwendet. Das symbolische Rechnen mit diesen Differentialen (Leibniz) vereinfacht das Erfassen vieler Zusammenhänge. An die Stelle des $\sum$-Zeichens tritt das Integralzeichen $\int$.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x, \quad A = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a), \quad A = \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}y = f(b) - f(a)$$

Leibniz-Kalkül





Wir stellen uns vor, dass der Graph von f durch einen Streckenzug auf dem Intervall $[a; b]$ approximiert wird, und ermitteln genähert den Zuwachs $\mathrm{d}y$ in Abhängigkeit von x und $\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= f(x+\mathrm{d}x) - f(x)\\
&= (x+\mathrm{d}x)^3 - x^3\\
&= x^3 + 3x^2\,\mathrm{d}x + 3x\,\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3 - x^3\\
&= \underbrace{3x^2\,\mathrm{d}x}_{\text{linearer Anteil}} + 3x\,\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3
\end{aligned}$$

Für kleines $\mathrm{d}x$ sind die Potenzen $\mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}x^3$ verschwindend klein, sie bleiben unberücksichtigt, $3x^2\,\mathrm{d}x$ ist für festes x linear in $\mathrm{d}x$.

$$\mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x$$

$3x^2\,\mathrm{d}x$ wird als Rechtecksinhalt interpretiert, siehe rechter Graph.

Die Summe der Inhalte der eingezeichneten Rechtecke ergibt sich als Summe der Zuwächse $\mathrm{d}y$, mithin also als Differenz $f(b) - f(a)$ der Funktionswerte an den Intervallgrenzen.
Werden $\mathrm{d}x$ und damit $\mathrm{d}y$ verkleinert, so wird auch der Näherungsfehler kleiner (strebt gegen null), die Differenz $f(b) - f(a)$ bleibt erhalten.

Schreibweise von Leibniz: $A = \displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}y = f(b) - f(a)$, Ableitung von f: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$

An die Stelle des $\sum$-Zeichens tritt das Integralzeichen $\int$, da den Differentialen $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ kein konkreter Wert zugeordnet werden kann, schon gar nicht „unendlich klein“. Es kann nachgewiesen werden, dass zu jedem beliebig kleinen Näherungsfehler $\mathrm{d}x$ so gewählt werden kann, dass der Fehler nicht überschritten wird. Für glatte Funktionen erscheint dies offensichtlich, siehe nächste Seite. Statt des $\approx$-Zeichens wird das $=$-Zeichen verwendet.

Leibniz-Kalkül