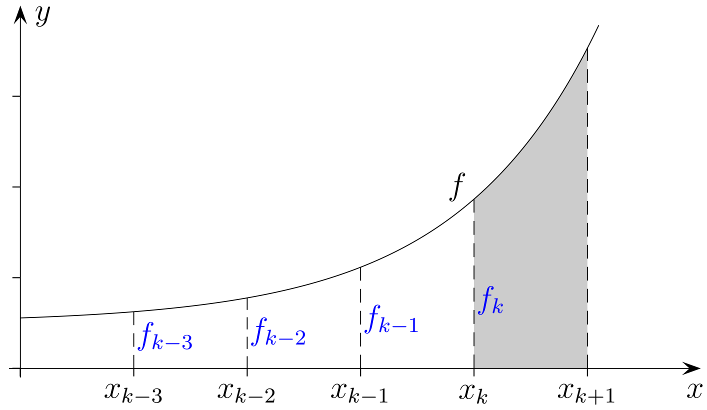
Adams-Bashforth-Verfahren

$$y' = f(x,y) \qquad \text{diskretisiert} \qquad y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)\,dx$$



Approximiere f unter Verwendung der Stützstellen x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k
mit einem Lagrange-Polynom (hier 3. Grades) und integriere.
Jeweils zwei benachbarte Stützstellen haben den Abstand h zueinander.

Das Interpolationspolynom ist dann:

$$L(x) = f_{k-3} \cdot L_{k-3}(x) + f_{k-2} \cdot L_{k-2}(x) + f_{k-1} \cdot L_{k-1}(x) + f_k \cdot L_k(x)$$

mit z. B.

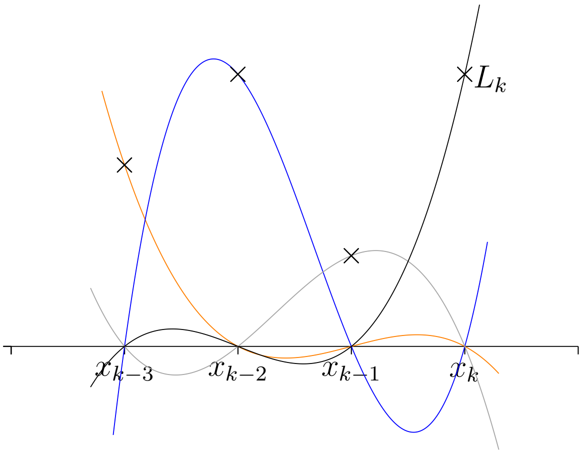
$$L_k = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k-2})(x-x_{k-3})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k-2})(x_k-x_{k-3})} \qquad \frac{\text{es fehlt} \quad (x-x_k)}{(x_k-x_k)}$$

$$L_{k-1} = \frac{(x-x_k)(x-x_{k-2})(x-x_{k-3})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k-2})(x_{k-1}-x_{k-3})} \qquad \frac{\text{es fehlt} \quad (x-x_{k-1})}{(x_{k-1}-x_{k-1})}$$

Die Polynome können aufgrund ihrer regelmäßigen Struktur sofort angegeben werden.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
y(x_{k+1}) &= y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)\,dx \\
&= y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f_{k-3} \cdot L_{k-3}(x) + f_{k-2} \cdot L_{k-2}(x) + f_{k-1} \cdot L_{k-1}(x) + f_k \cdot L_k(x)\right] dx \\
&= y(x_k) + f_{k-3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-3}(x)dx + f_{k-2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-2}(x)dx + f_{k-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-1}(x)dx + f_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_k(x)dx
\end{aligned}$$

Adams-Bashforth-Verfahren



Mit der Schrittweite h ist z. B. das Polynom 3. Grades mit $L_k(x_k) = 1$:

$$L_k = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k-3})} = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})}{h \cdot 2h \cdot 3h}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_k(x)\,dx &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k-2})(x - x_{k-3})}{h \cdot 2h \cdot 3h}\,dx \qquad \text{Substitution } x = x_k + h\xi,\ dx = hd\xi \\
&= \int_0^1 \frac{(x_k + h\xi - x_{k-1})(x_k + h\xi - x_{k-2})(x_k + h\xi - x_{k-3})}{h \cdot 2h \cdot 3h}\,hd\xi \\
&= \int_0^1 \frac{(h + h\xi)(2h + h\xi)(3h + h\xi)}{6h^3}\,hd\xi \\
&= \int_0^1 \frac{h^3(1 + \xi)(2 + \xi)(3 + \xi)}{6h^3}\,hd\xi \\
&= \frac{h}{6}\int_0^1 (6 + 11\xi + 6\xi^2 + \xi^3)\,d\xi = \frac{55}{24}h
\end{aligned}$$

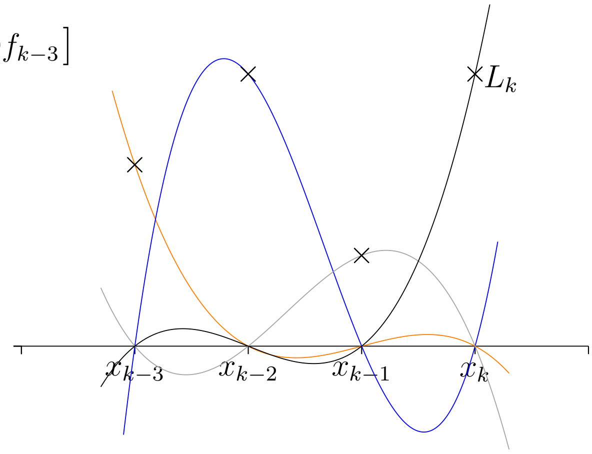
Auf diese Weise ermittelt man auch die anderen Koeffizienten.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left[55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right]$$

Um y_{k+1} zu ermitteln, benötigt man nur eine Funktionsauswertung von $f_k = f(x_k, y_k)$, der rechten Seite der Differentialgleichung. Die anderen Werte liegen schon aufgrund der vorherigen Rechnung vor.

Adams-Bashforth-Verfahren 3. Grades

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left[55 f_k - 59 f_{k-1} + 37 f_{k-2} - 9 f_{k-3}\right]$$



Mit der Schrittweite h ist

$$L_{k-1} = \frac{(x-x_k)(x-x_{k-2})(x-x_{k-3})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k-2})(x_{k-1}-x_{k-3})} = \frac{(x-x_k)(x-x_{k-2})(x-x_{k-3})}{(-h)\cdot h\cdot 2h}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-1}(x)\,dx &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x-x_k)(x-x_{k-2})(x-x_{k-3})}{(-h)\cdot h\cdot 2h}\,dx \qquad \text{Substitution } x = x_k + h\xi,\ dx = h d\xi \\
&= \int_0^1 \frac{(x_k+h\xi-x_k)(x_k+h\xi-x_{k-2})(x_k+h\xi-x_{k-3})}{(-h)\cdot h\cdot 2h}\,h d\xi \\
&= \int_0^1 \frac{h\xi(2h+h\xi)(3h+h\xi)}{-2h^3}\,h d\xi \\
&= \ldots = -\frac{59}{24}h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-2}(x)dx &= \int_0^1 \frac{(3h+h\xi)(h+h\xi)h\xi}{h\cdot(-h)\cdot(-2h)}\,h d\xi \\
&= \ldots = \frac{37}{24}h
\end{aligned}$$

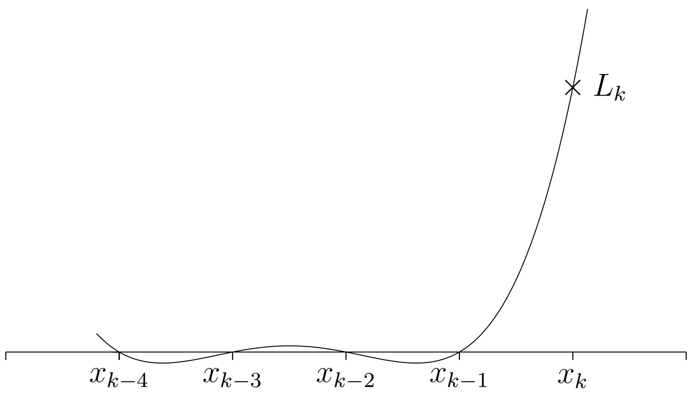
$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-3}(x)dx &= \int_0^1 \frac{(2h+h\xi)(h+h\xi)h\xi}{(-h)\cdot(-2h)\cdot(-3h)}\,h d\xi \\
&= \ldots = -\frac{9}{24}h
\end{aligned}$$

Adams-Bashforth-Verfahren 4. Grades

Interpolationspolynom 4. Grades (5 Stützstellen):

$$L(x) = f_{k-4} \cdot L_{k-4}(x) + f_{k-3} \cdot L_{k-3}(x) + f_{k-2} \cdot L_{k-2}(x) + f_{k-1} \cdot L_{k-1}(x) + f_k \cdot L_k(x)$$

$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{h}{720}\left[1901 f_k - 2774 f_{k-1} + 2616 f_{k-2} - 1274 f_{k-3} + 251 f_{k-4}\right]$$



Mit der Schrittweite h ist z. B.

$$L_k = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k-2})(x-x_{k-3})(x-x_{k-4})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k-2})(x_k-x_{k-3})(x_k-x_{k-4})} = \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k-2})(x-x_{k-3})(x-x_{k-4})}{h \cdot 2h \cdot 3h \cdot 4h}$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_k(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k-2})(x-x_{k-3})(x-x_{k-4})}{24h^4}\,dx \qquad \text{Substitution } x = x_k + h\xi$$

$$= \int_0^1 \frac{(x_k+h\xi-x_{k-1})(x_k+h\xi-x_{k-2})(x_k+h\xi-x_{k-3})(x_k+h\xi-x_{k-4})}{24h^4}\,hd\xi$$

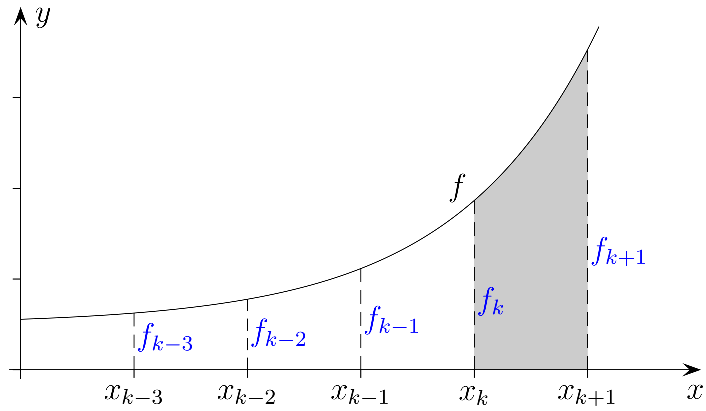
$$= \int_0^1 \frac{(h+h\xi)(2h+h\xi)(3h+h\xi)(4h+h\xi)}{24h^4}\,hd\xi$$

$$= \int_0^1 \frac{h^4(1+\xi)(2+\xi)(3+\xi)(4+\xi)}{24h^4}\,hd\xi$$

$$= \tfrac{h}{24}\int_0^1 (24 + 50\xi + 35\xi^2 + 10\xi^3 + \xi^4)\,d\xi = \tfrac{1901}{720}\,h$$

Adams-Moulton-Verfahren

$$y' = f(x,y) \qquad \text{diskretisiert} \qquad y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)\,dx$$



Wir befinden uns an der Stelle x_k.
Um f auf dem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ zu approximieren, wurden bisher nur zurückliegende Stützstellen verwendet. Die Verwendung von f_{k+1} verspricht eine Verbesserung.

Für ein Lagrange-Polynom 3. Grades (4 Stützstellen x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) führt dies auf

$$y_{k+1} \;=\; y_k + \tfrac{h}{24}\big[9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}\big],$$

für 4. Grades (5 Stützstellen x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) auf

$$y_{k+1} \;=\; y_k + \tfrac{h}{720}\big[251f_{k+1} + 646f_k - 264f_{k-1} + 106f_{k-2} - 19f_{k-3}\big].$$

Zur Funktionsauswertung von $f_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$ ist leider y_{k+1} erforderlich.
Es ähnelt der Situation, sich am eigenen Schopf aus dem Sumpf zu ziehen. Hier gelingt das.

y_{k+1} wird zunächst mit dem Adams-Bashforth-Verfahren geschätzt
(vorausgesagt engl. predicted), z. B. (Grad 2)

$$y_{k+1}^{(P)} \;=\; y_k + \tfrac{h}{12}\big[23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}\big]$$

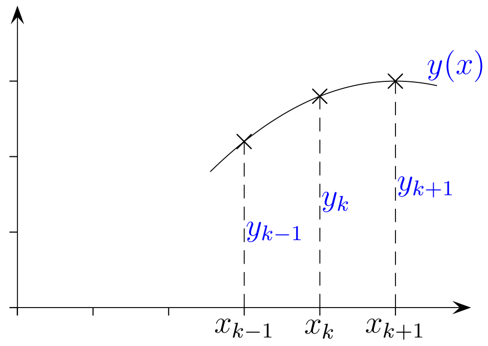
und dann mit dem Adams-Moulton-Verfahren verbessert
(Prädiktor-Korrektor-Methode), z. B. (Grad 3)

$$y_{k+1} \;=\; y_k + \tfrac{h}{24}\big[9f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(P)}) + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}\big].$$

Wird an der Stelle x_k auch f_{k+1} verwendet, ist das Verfahren *implizit*, sonst *explizit*.

BDF-Verfahren Backward-Differential-Formulae

$y' = f(x,y)$



Wir befinden uns an der Stelle x_k, haben die Werte y_k, y_{k-1} usw. ermittelt und suchen y_{k+1}. Zuerst stellen wir (z. B.) mit 3 Stützstellen x_{k-1}, x_k, x_{k+1} und den Stützwerten y_{k-1}, y_k, y_{k-1} das Lagrange-Polynom 2. Grades auf.

$$L(x) = y_{k-1} \cdot L_{k-1}(x) + y_k \cdot L_k(x) + y_{k+1} \cdot L_{k+1}(x)$$

$L(x)$ approximiert nun also $y(x)$.
An der Stelle x_{k+1} sollte dann $L'(x_{k+1}) = f(x_{k+1}, y_{k+1})$ gelten, wegen $y' = f(x,y)$.

Aus dieser Gleichung kann y_{k+1} ermittelt werden. Eine Rechnung (Ableitung, siehe unten) ergibt:

$$3y_{k+1} - 4y_k + y_{k-1} \; = \; 2hf(x_{k+1}, y_{k+1}) \; .$$

Dies ist auch schon die Iterationsgleichung für die Ermittlung der y-Werte der Lösungsfunktion.

$$L(x) = y_{k-1} \frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(-h)(-2h)} + y_k \frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{h(-h)} + y_{k+1} \frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{2hh}$$

Klammern auflösen
ableiten
$x = x_{k+1}$ einsetzen
vereinfachen mit $x_k = x_{k+1} - h, \; x_{k-1} = x_{k+1} - 2h$ ergibt

$$L'(x_{k+1}) = \frac{1}{2h} \left[y_{k-1} - 4y_k + 3y_{k+1} \right] = f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Für ein Lagrange-Polynom 3. Grades ist

$$L'(x_{k+1}) = \frac{1}{6h} \left[-2y_{k-2} + 9y_{k-1} - 18y_k + 11y_{k+1} \right] = f(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Für 4. Grad gilt:

$$L'(x_{k+1}) = \frac{1}{12h} \left[3y_{k-3} - 16y_{k-2} + 36y_{k-1} - 48y_k + 25y_{k+1} \right] = f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Siehe auch: Numerische Integration
Lagrange-Interpolation