Merkhilfe Vektorrechnung

1. Was ist ein Vektor?

2. Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = ?$

3. Punkte A und B, Gerade g
   Punkte A, B und C, Ebene E

4. Mitte M der Strecke $\overline{AB}$ $\overrightarrow{OM} = ?$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

5. Betrag des Vektors $|\vec{a}| = ?$

6. Einheitsvektor $\vec{a}^{\circ} = ?$

7. Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$
   oder
   Rechenregeln

8. Vektorprodukt
   $\vec{a} \times \vec{b} = ?$
   $A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = ?$
   $A_{\text{Dreieck}} = ?$
   Rechenregeln

9. Punkte A, B und C, Normalenform der Ebenengleichung
   HNF
   Koordinatenform

10. P teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 2:1 $\overrightarrow{OP} = ?$

11. Winkel α zwischen
    Vektoren
    Geraden
    Ebenen
    Gerade und Ebene

12. $\vec{a}$, $\vec{b}$ linear abhängig (kollinear)

13. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear abhängig (komplanar)

14. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear unabhängig

15. Abstand

Punkt A, Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
GTR

Punkt A, Ebene E: $\vec{n}^{\circ}\,\vec{x} - a = 0$

Ursprung, Ebene E: $\vec{n}^{\circ}\,\vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden
g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$

Fußpunkte

16. Q liegt auf dem Dreieck, das durch die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben ist.

17. Volumen eines Spats $\qquad V_{\text{Spat}} = ?$
Volumen einer Pyramide

18. Winkelhalbierende, Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

19. Lagebeziehung zwischen Ebenen

E_1: $\vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$
E_2: $\vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$

$E_1 \parallel E_2,\ E_1 \neq E_2$
$E_1 = E_2$
$E_1 \perp E_2$
E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden.

20. Lagebeziehung zwischen Geraden

$g\colon\ \vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$

$h\colon\ \vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$

$g \parallel h,\ g \neq h$

$g = h$

$g \perp h$

g und h haben genau einen Schnittpunkt.

g und h sind windschief.

21. Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

$g\colon\ \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$

$E\colon\ \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$

$g \parallel E,\ g \subsetneq E$

$g \subset E$

$g \perp E$

g und E schneiden sich in einem Punkt.

22. Spurpunkte einer Geraden
Spurgerade einer Ebene

23. Lagebeziehungen GTR

Gerade/Gerade

Gerade/Ebene

Ebene/Ebene

allgemein

24. Punkt A spiegeln

an der Ebene E

am Punkt Q

an der Geraden g

25. Schwerpunkt eines Dreiecks

26. Punkte A, B, C ergänzen zu

einem Parallelogramm

einer Raute

einem Quadrat

27. Schnitt einer Geraden mit einer Ebene in
Normalenform
Koordinatenform

28. Ebenenbüschel E_a , Trägergerade g (gemeinsame Schnittgerade)
g gegeben, Nachweis: g ist die Trägergerade von E_a
g ermitteln
Ebene G, Nachweis: $G \in E_a$

[zum Anfang](#)

Mit Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ (entsprechend im $\mathbb{R}^2$) können Punkte oder Richtungen festgelegt werden.

Die verschiedenen Bezeichnungen wie

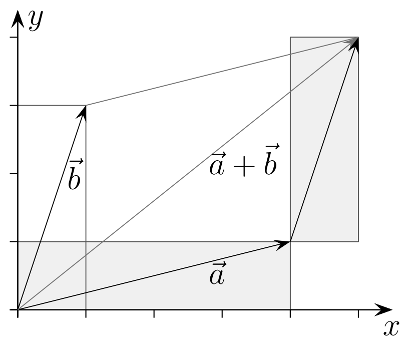
Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ (Stützvektor), Ursprung O, lat. origo, engl. origin

Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ (Verschiebungsvektor),

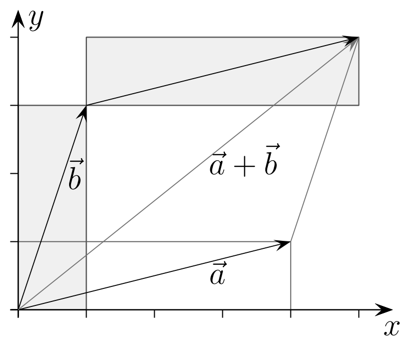
Richtungsvektor $\vec{u}$ (die Länge ist unerheblich)

ergeben sich daraus, ob in erster Linie ein Punkt oder eine Richtung festgelegt werden soll.
Für Vektoren sind beide Interpretationen (gleichzeitig) möglich.
Vektoren sind in der Geometrie daher von zwittriger Natur.
Neben der Bezeichnung bestimmt der Anwendungskontext den Verwendungsschwerpunkt.

Bei der Addition $\vec{a} + \vec{b}$ von Vektoren beinhaltet ein Vektor (Verschiebungsvektor) die Koordinatenänderungen des anderen Vektors (Ortsvektor). Ein Vektor wird an den anderen drangehängt.



Ortsvektor $\vec{a}$, Verschiebungsvektor $\vec{b}$

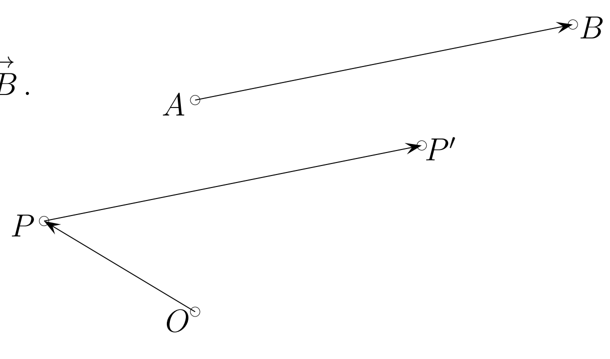


Ortsvektor $\vec{b}$, Verschiebungsvektor $\vec{a}$

$\longleftarrow$

$A(1\,|\,3\,|\,2)$, $B(4\,|\,5\,|\,1)$

Verschiebe $P(2\,|\,2\,|\,4)$ in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AB}$.



vector (lat.) Träger, „trägt (verschiebt) A nach B“

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

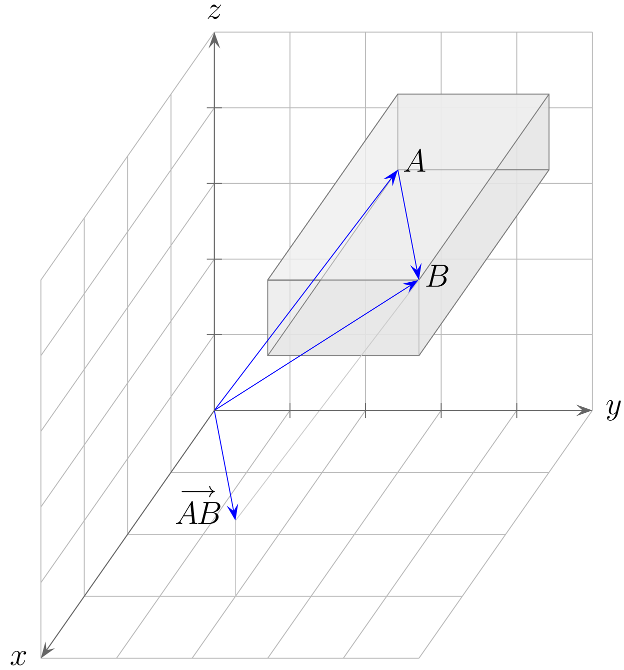
$P'(5 \mid 4 \mid 3)$

$\longleftarrow$

Verbindungsvektor $\qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \qquad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

„Spitze minus Fuß“ oder „rechts vor links“

⟵

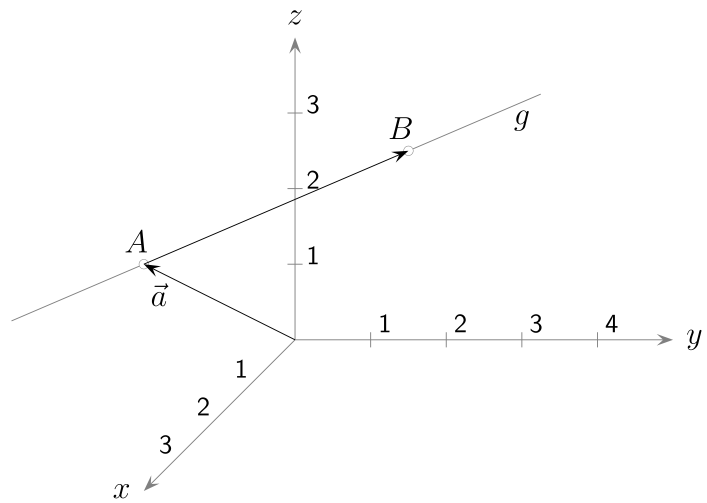


$A(1\,|\,3\,|\,4)$, $B(4\,|\,5\,|\,5)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkte A und B, Gerade g $\qquad$ $g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{AB}$ $\quad$ (z.B.)

Punkte A, B und C, Ebene E



$\longleftarrow$

$A(-1\,|\,2\,|\,-3)$, $B(-3\,|\,-1\,|\,2)$ liegen auf der Geraden g.

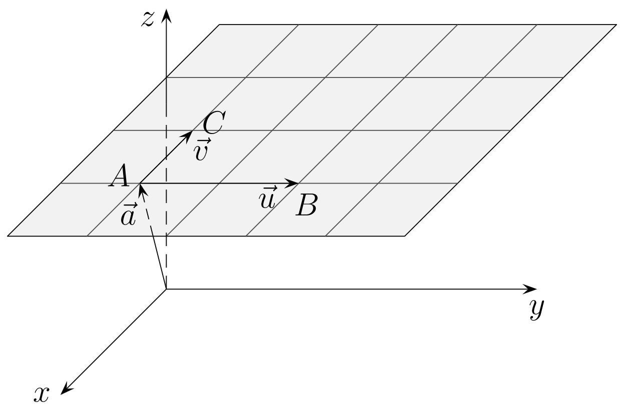
Geradengleichung

$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{AB}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punkte A und B, Gerade g

Punkte A, B und C, Ebene E $\qquad E\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$ (z.B.)



$\longleftarrow$

$A(1\,|\,{-2}\,|\,3)$, $B(-4\,|\,{-1}\,|\,5)$ und $C(2\,|\,{-3}\,|\,{-4})$ liegen in der Ebene E.

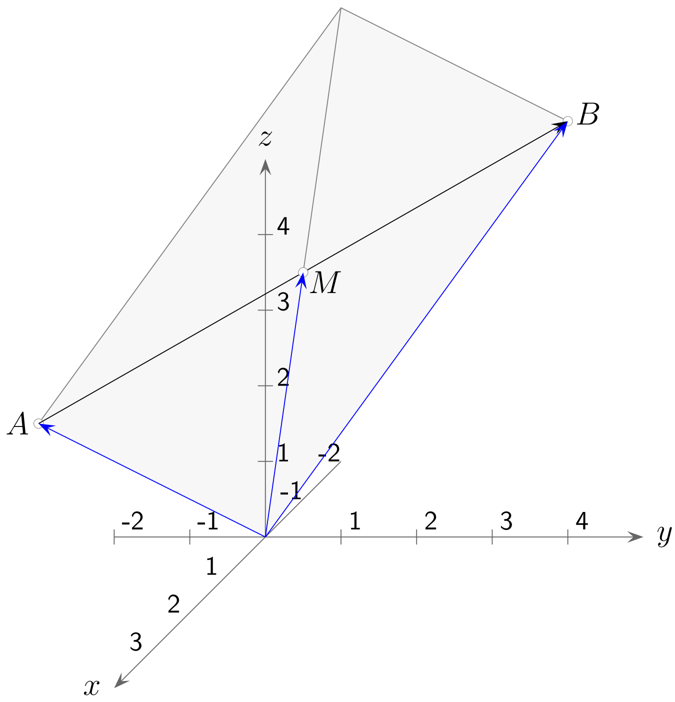
Parameterform

$E\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

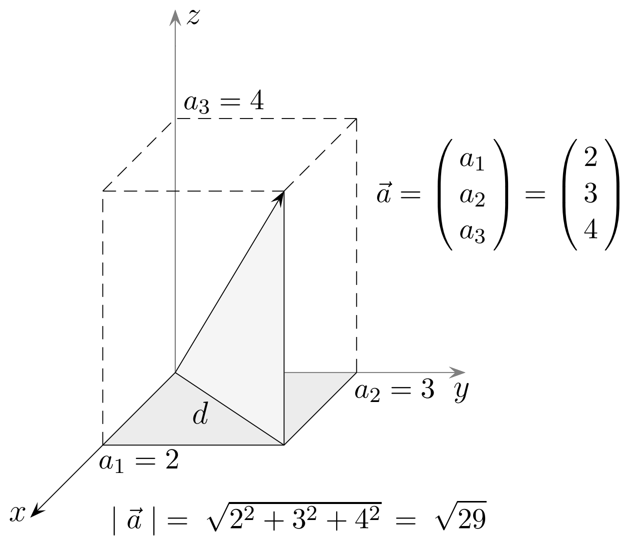
Mitte M der Strecke $\overline{AB}$ $\qquad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

oder $\qquad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



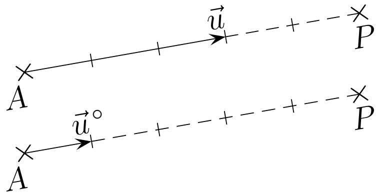
⟵

Betrag des Vektors $\qquad |\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$



$\longleftarrow$

Einheitsvektor $\qquad \vec{a}^\circ = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$



$|\,\vec{u}\,| = 3$. Vektoren wie $\vec{u}^\circ = \frac{1}{3}\vec{u}$ mit der Länge 1 heißen Einheitsvektoren. Mit ihnen können Punkte mit vorgegebener Entfernung und Richtung ermittelt werden.

$\longleftarrow$

$$\vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^\circ \;=\; \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

oder

Rechenregeln

⟵

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Skalarprodukt

oder $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

Rechenregeln

$\longleftarrow$

Skalarprodukt
oder

Rechenregeln

Satz: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Rechenregeln:

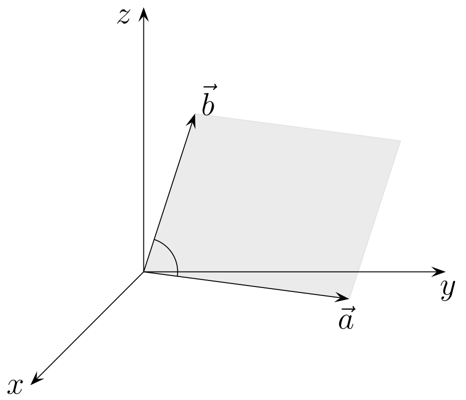
1.) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2.) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

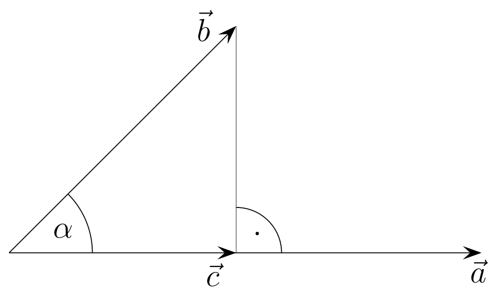
3.) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$

4.) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\,\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$

wobei gilt: $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$



⟵



$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \overset{*}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \qquad (* \quad 0° \le \alpha \le 90°)$

$\vec{c}$ ist die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf die durch $\vec{a}$ bestimmte Richtung.

Vektorprodukt $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

$A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = ?$

$A_{\text{Dreieck}} = ?$

Rechenregeln

$\longleftarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

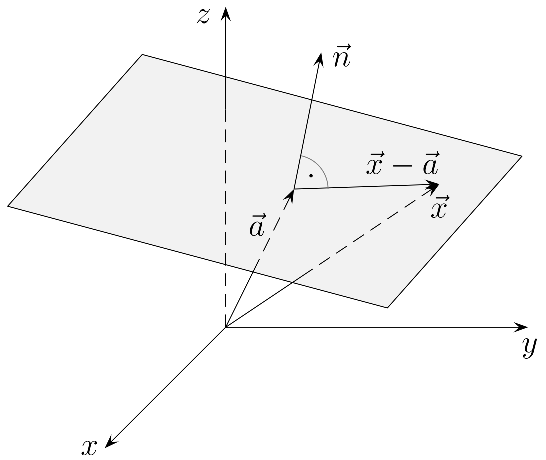
Probe: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Punkte A, B und C, Normalenform der Ebenengleichung $\quad \vec{n}\cdot(\vec{x}-\overrightarrow{OA})=0$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} \qquad \text{(z. B.)}$$

HNF

Koordinatenform



$\longleftarrow$

Punkte A, B und C, Normalenform der Ebenengleichung

HNF Hessesche Normalenform $\vec{n}^\circ \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = 0$

Koordinatenform

$\longleftarrow$

$$\text{Normalenform} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \vec{x} - 4 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{5}$$

$$\text{HNF} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \vec{x} - \frac{4}{5} = 0$$

Punkte A, B und C, Normalenform der Ebenengleichung
HNF
Koordinatenform

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot(\vec{x}-\overrightarrow{OA}) &= 0\\ \vec{n}\cdot\vec{x}\;-a &= 0\\ \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\vec{x}-a &= 0\\ n_1x+n_2y+n_3z &= a \qquad \text{Koordinatenform}\end{aligned}$$

$\longleftarrow$

$A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,4\,|\,0)$ und $C(0\,|\,0\,|\,-4)$ liegen in der Ebene E.
Wie lautet die Koordinatenform von E?

Parameterform
$E\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA}+\lambda\,\overrightarrow{AB}+\mu\,\overrightarrow{AC}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}$$

Normalenform

$$\vec{n}\cdot(\vec{x}-\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-16\\-16\\16\end{pmatrix} = -16\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right] = 0$$

Koordinatenform

$$x+y-z=4$$

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = ?$$

$$A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,|$$

$$A_{\text{Dreieck}} = ?$$

Rechenregeln

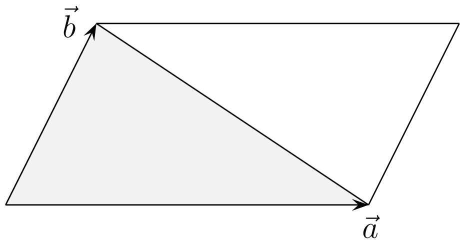
Beachte die Vereinfachung, wenn ein Rechteck vorliegt.

⟵

Vektorprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= ? \\ A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} &= ? \\ A_{\text{Dreieck}} &= \frac{1}{2}\,|\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \end{aligned}$$

Rechenregeln



Beachte die Vereinfachung, wenn das Dreieck rechtwinklig ist.

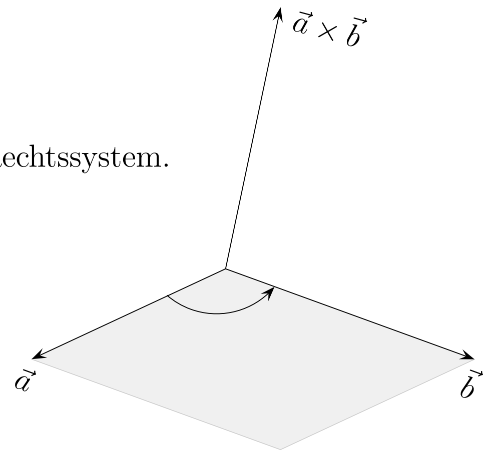
⟵

Vektorprodukt

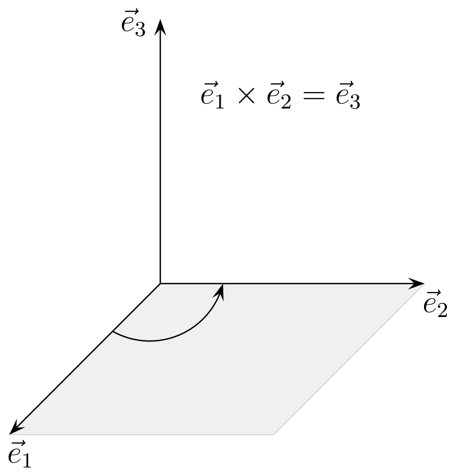
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= ? \\ A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} &= ? \\ A_{\text{Dreieck}} &= ? \end{aligned}$$

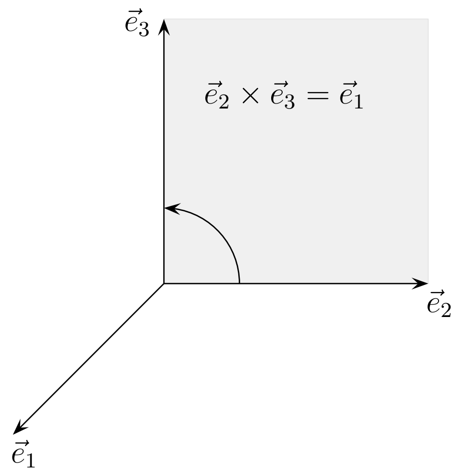
Rechenregeln

1. Genau dann ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, wenn $\vec{a}$, $\vec{b}$ kollinear sind.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a}$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
4. $\vec{a} \times (\lambda\,\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a} \times \vec{b})$
5. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

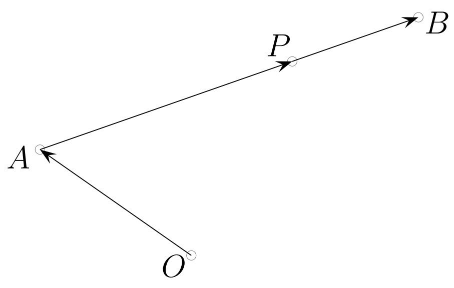


⟵



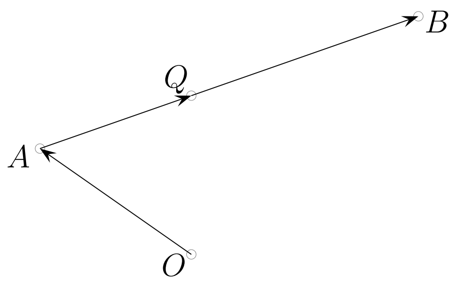


$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



P teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 2:1 $\quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$

$\longleftarrow$



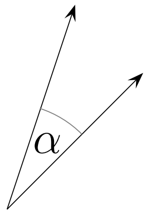
Q teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 2:3 $\quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\,\overrightarrow{AB}$

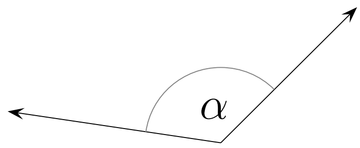
Winkel α zwischen | Vektoren | $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

Geraden

Ebenen

Gerade und Ebene





⟵

Winkel α zwischen

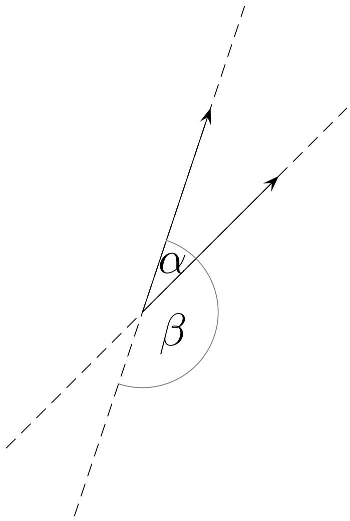
Vektoren

Geraden $\quad |\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

Ebenen

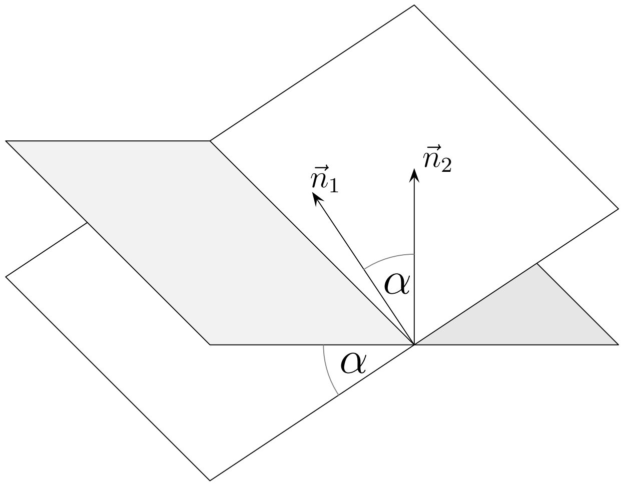
Gerade und Ebene

$\longleftarrow$



Beachte: Kanten können auch den Winkel $\beta = 180° - \alpha$ einschließen.

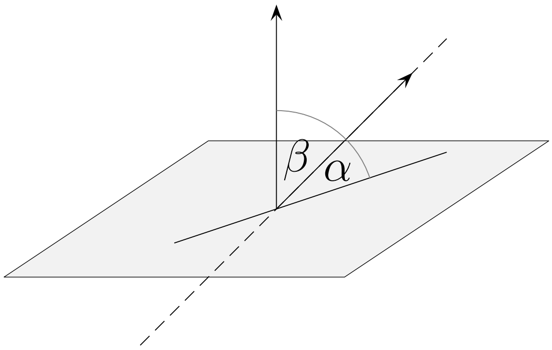
Winkel α zwischen	Vektoren	
	Geraden	
	Ebenen	$\lvert \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \rvert = \lvert \vec{n}_1 \rvert \cdot \lvert \vec{n}_2 \rvert \cdot \cos\alpha$
	Gerade und Ebene	



←

Beachte: (Dach-)Flächen können auch den Winkel $\beta = 180° - \alpha$ einschließen.

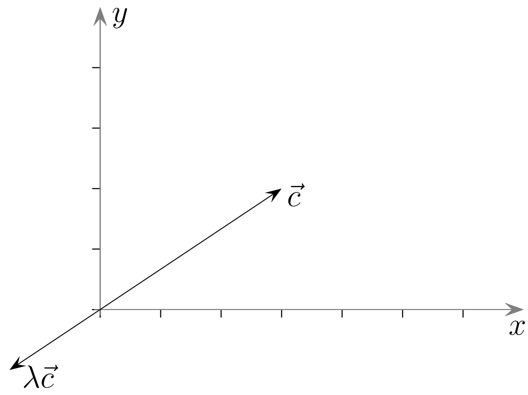
Winkel α zwischen	Vektoren	
	Geraden	
	Ebenen	
	Gerade und Ebene	$\lvert\vec{u}\cdot\vec{n}\rvert = \lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert\cdot\sin\alpha$
		verschiedene Objekte, sin verwenden



⟵

$\vec{a}$, $\vec{b}$ linear abhängig (kollinear) $\qquad \vec{a} = \lambda\vec{b}$

⟵

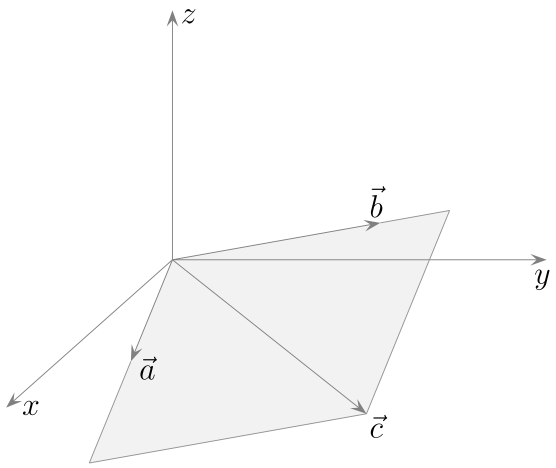


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

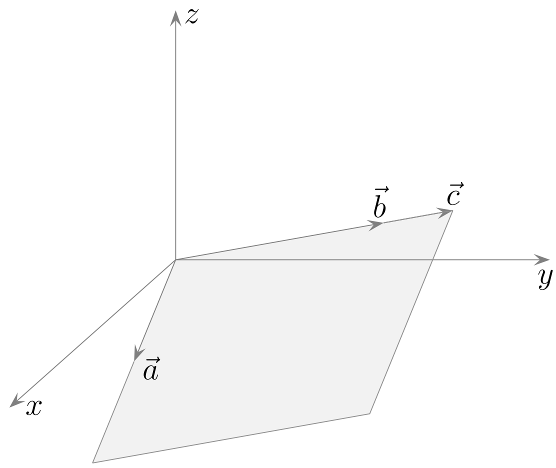
$$\vec{a} = (-2) \cdot \vec{b}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear abhängig (komplanar)

Ein Vektor (mindestens) kann als Linearkombination der Übrigen dargestellt werden.



z. B. $\vec{b} = r\vec{a} + s\vec{c}$



z. B. $\vec{c} = t\vec{b} + 0 \cdot \vec{a}$

←

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = (-2) \cdot \vec{a} + 2\vec{b}$$

Das Spatvolumen ist genau dann null.

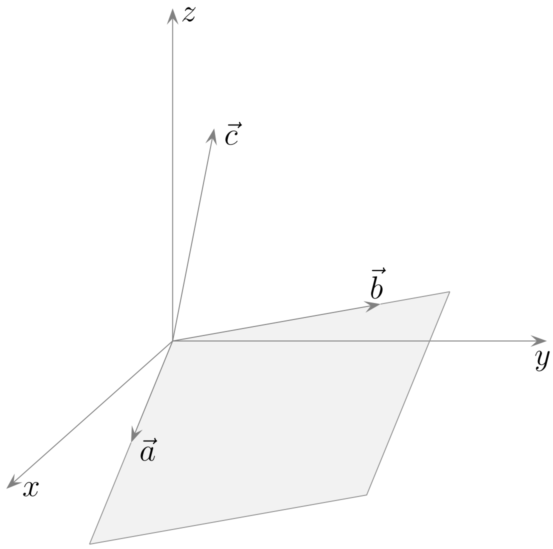
$$(\vec{d} \times \vec{e}) \cdot \vec{f} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{d} \times \vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear unabhängig

Kein Vektor kann als Linearkombination der Übrigen dargestellt werden.
Aus $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}$ folgt, dass alle λ_i null sind.

⟵



Abstand

Punkt A, Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

Bedingung $\overrightarrow{AP} \perp \vec{u}$

laufender Punkt $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

oder $\overrightarrow{PA} \perp \vec{u}$ (auf Klammern achten)

GTR

Punkt A, Ebene E: $\vec{n}^\circ\, \vec{x} - a = 0$

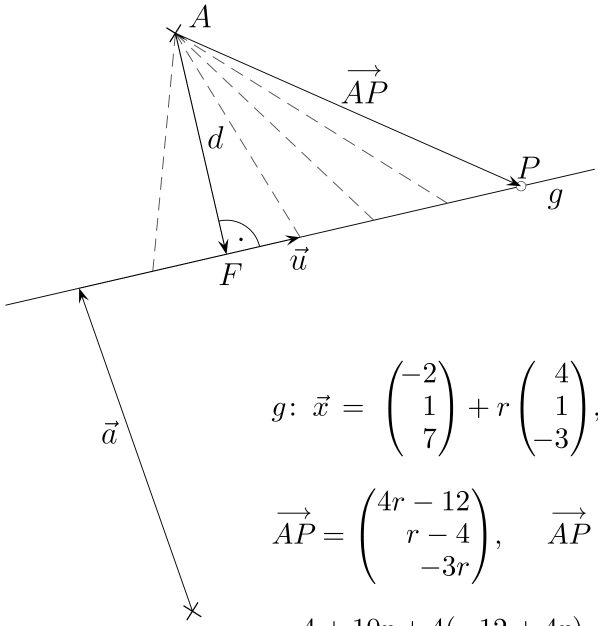
Ursprung, Ebene E: $\vec{n}^\circ\, \vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden

g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$

Fußpunkte



$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad A(10\,|\,5\,|\,7)$$

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4r-12 \\ r-4 \\ -3r \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AP} \perp \vec{u}$$

$$\begin{aligned} -4 + 10r + 4(-12+4r) &= 0 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Fußpunkt $F(6\,|\,3\,|\,1)$, $\quad d(A,g) = |\overrightarrow{AF}| = \sqrt{56} \approx 7{,}483$

alternativ:

Wir legen zunächst eine Ebene (Normalenform) durch A, die senkrecht auf g steht.
Als Stützvektor nehmen wir $\overrightarrow{OA}$, als Normalenvektor den Richtungsvektor der Geraden g.
Dann berechnen wir den Schnittpunkt F dieser Ebene mit g.
Der gesuchte Abstand d wird dann mit $d = |\overrightarrow{FA}|$ bestimmt.

alternativ:

λ lässt sich aus $(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OA}) \cdot \vec{u} = 0$ allgemein berechnen: $\quad \lambda = \dfrac{(\overrightarrow{OA} - \vec{a}\,) \cdot \vec{u}}{\vec{u}^{\,2}}$

λ eingesetzt in die Geradengleichung ergibt den Fußpunkt F und schließlich gilt: $d = |\,\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA}\,|$.

Abstand

Punkt A, Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

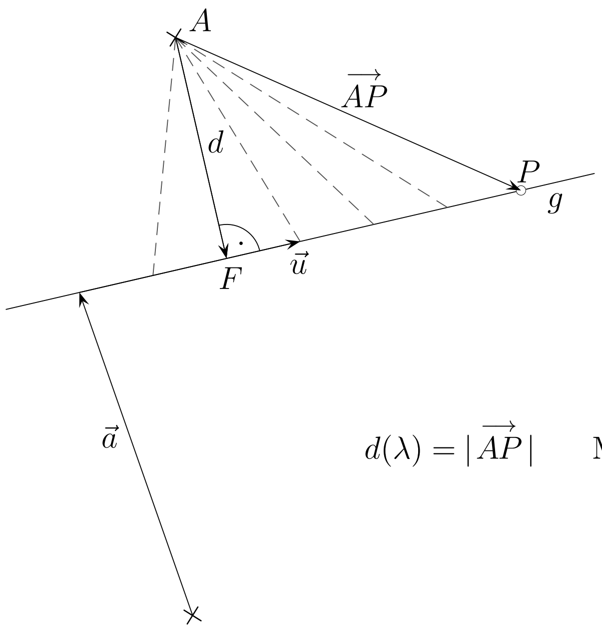
GTR $\qquad d(\lambda) = |\,\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OA}\,|$ $\quad$ Minimum

Punkt A, Ebene E: $\vec{n}^{\circ}\,\vec{x} - a = 0$

Ursprung, Ebene E: $\vec{n}^{\circ}\,\vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden
g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$

Fußpunkte



$d(\lambda) = |\,\overrightarrow{AP}\,|$ $\quad$ Minimum

⟵

Empfehlenswert ist, die Vektoren $\vec{a}$ und $\overrightarrow{OA}$ zusammenzufassen.
Der Betrag wird wie üblich mit einer Wurzel aus einer Quadratsumme gebildet.

$$d(\lambda) = \sqrt{(\ldots + \lambda u_1)^2 + (\ldots + \lambda u_2)^2 + (\ldots + \lambda u_3)^2}$$

Berechne den Fußpunkt und den Abstand: $\qquad P(5\,|\,1\,|\,-2), \qquad g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $F(4\,|\,2\,|\,-4), \quad \lambda = 2, \quad d = \sqrt{6}$

Abstand

Punkt A, Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
GTR

Punkt A, Ebene E: $\vec{n}^\circ\,\vec{x} - a = 0$ $\qquad d = |\,\vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OA} - a\,|$

Ursprung, Ebene E: $\vec{n}^\circ\,\vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden
g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$

Fußpunkte

$\longleftarrow$

Um den Abstand eines Punktes A von einer Ebene E zu bestimmen, setzt man für $\vec{x}$ in die linke Seite der Hesseschen Normalenform den Vektor $\overrightarrow{OA}$ ein und nimmt den Betrag.

$$A(2\,|\,3\,|\,3), \qquad E: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\vec{x} - 4 = 0 \qquad |\cdot\frac{1}{5}$$

$$\text{HNF} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\vec{x} - \frac{4}{5} = 0$$

$$d(A,E) = \left|\,\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\,\right| = |-2| = 2$$

Abstand

Punkt A, Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
GTR

Punkt A, Ebene E: $\vec{n}^\circ\,\vec{x} - a = 0$

Ursprung, Ebene E: $\vec{n}^\circ\,\vec{x} - a = 0$ $\qquad d = a$

windschiefe Geraden
g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$

Fußpunkte

$\longleftarrow$

Um den Abstand des Ursprungs von einer Ebene E zu bestimmen, setzt man für $\vec{x}$ in die linke Seite der Hesseschen Normalenform den Nullvektor $\vec{0}$ ein und nimmt den Betrag.

Für die HNF $\vec{n}^\circ\,\vec{x} - a = 0$ mit $a \geq 0$ ist der Abstand der Ebene zum Ursprung daher a.
Der Normalenvektor $\vec{n}^\circ$ zeigt für $a > 0$ als Ortsvektor in Richtung von E,
da für den Schnitt mit der Geraden $\vec{x} = r\,\vec{n}^\circ$ der Parameter r positiv wäre.

Für $\vec{n}^\circ\,\vec{x} + a = 0$ mit $a > 0$ multipliziere man die Normalenform mit -1.

$$\text{Normalenform} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \vec{x} - 4 = 0 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{5}$$

$$\text{HNF} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \vec{x} - \frac{4}{5} = 0$$

$$d(O,E) = \frac{4}{5}$$

Abstand

Punkt A, Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
GTR

Punkt A, Ebene E: $\vec{n}^\circ\,\vec{x} - a = 0$

Ursprung, Ebene E: $\vec{n}^\circ\,\vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden

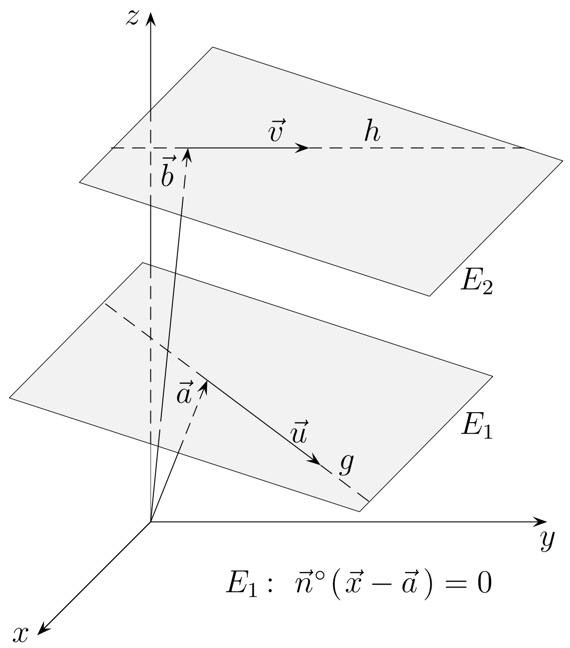
g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$

$d(g,h) = |\,\vec{n}^\circ\,(\vec{b} - \vec{a}\,)\,|$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

Fußpunkte



$E_1: \ \vec{n}^\circ(\vec{x} - \vec{a}\,) = 0$

⟵

Abstand

Punkt A, Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
GTR

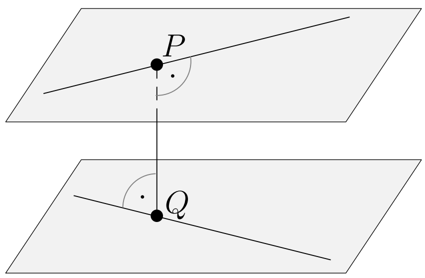
Punkt A, Ebene E: $\vec{n}^\circ\, \vec{x} - a = 0$

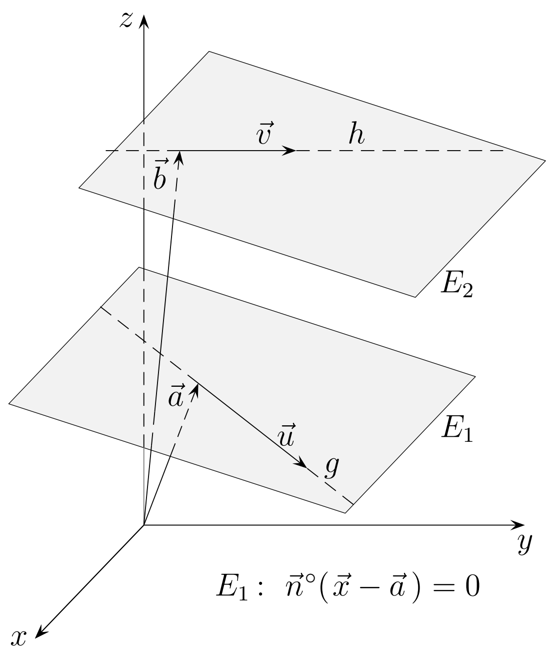
Ursprung, Ebene E: $\vec{n}^\circ\, \vec{x} - a = 0$

windschiefe Geraden
g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$

Fußpunkte

Bedingungen (Gleichungssystem für λ und μ
$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u},\ \overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$
laufende Punkte auf g und h:
$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \lambda\vec{u},\ \overrightarrow{OQ} = \vec{b} + \mu\vec{v}$





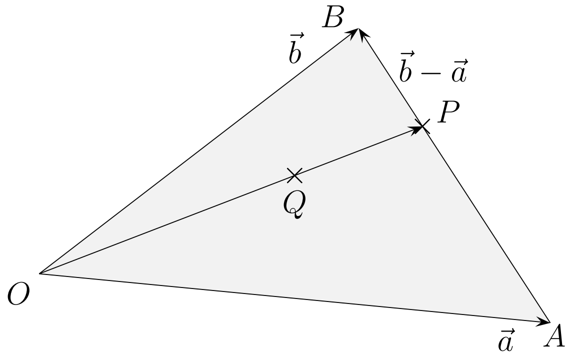
$\longleftarrow$

Q liegt auf dem Dreieck, das durch
die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben ist.

Wenn $\overrightarrow{OQ}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt wird, muss die Summe der Koeffizienten kleiner gleich 1 sein.

Für einen Punkt P auf der Strecke $\overline{AB}$ gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a}\,) \qquad \text{mit} \qquad 0 \le m \le 1 \\ &= \vec{a} + m\vec{b} - m\vec{a} \\ &= \underbrace{(1-m)}_{n}\,\vec{a} + m\vec{b}\end{aligned}$$



P liegt daher genau dann auf der Strecke $\overline{AB}$, wenn für $\overrightarrow{OP} = n\vec{a} + m\vec{b}$
die Summe der (nicht negativen) Koeffizienten 1 ergibt, $n + m = 1$.

⟵

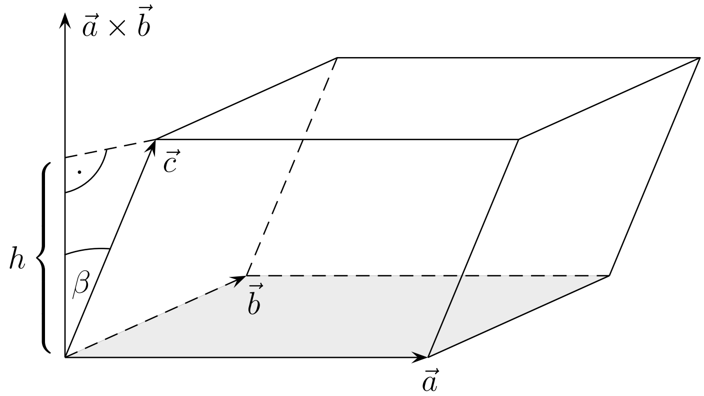
Volumen eines Spats $\qquad V_{\text{Spat}} = |\,(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,| = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\,|$

Volumen einer Pyramide

(Tipp: $h = |\,\vec{c}\,| \cdot \cos\beta$)

Ein Spat ist ein gescherter Quader.
Genauer müsste der Betrag genommen werden, da beim Vertauschen der Vektoren das Ergebnis auch negativ werden kann.

Sind zwei Vektoren linear abhängig, so ist das Volumen null.
Der Term $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ heißt auch Determinante.



⟵

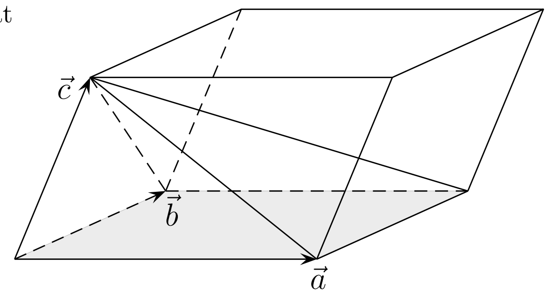
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\ [VE] \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

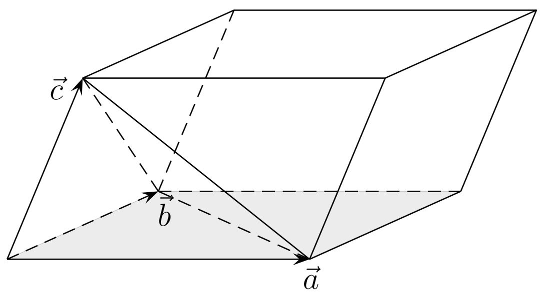
Volumen eines Spats $V_{\text{Spat}} = |\,(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|$

Volumen einer Pyramide

$V_{\text{Pyramide (Grundfläche Parallelogramm)}} = \frac{1}{3}\, V_{\text{Spat}}$

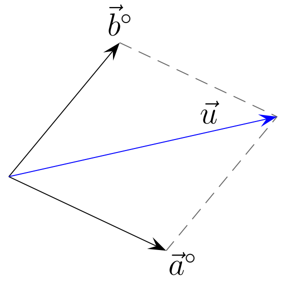


$V_{\text{Pyramide (Grundfläche Dreieck)}} = \frac{1}{6}\, V_{\text{Spat}}$



$\longleftarrow$

Winkelhalbierende, Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{a}^\circ + \vec{b}^\circ$



$\longleftarrow$

Lagebeziehung zwischen Ebenen

E_1: $\vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

E_2: $\vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$

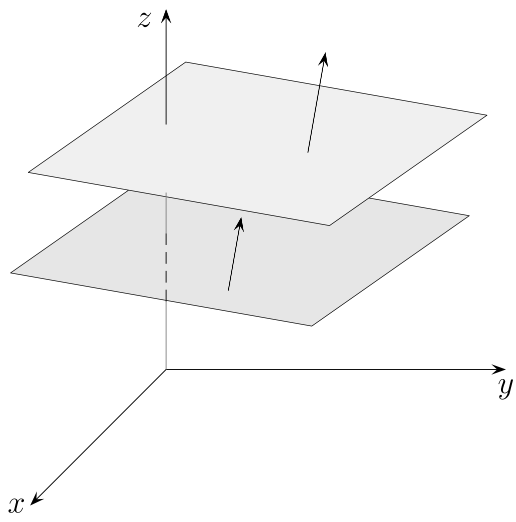
$E_1 \parallel E_2,\ E_1 \subsetneq E_2$ $\qquad$ $\vec{n}_1 = r\,\vec{n}_2,$ $\quad$ die Normalenvektoren sind kollinear (linear abhängig) und der Ortsvektor $\vec{a}$ führt nicht zu E_2.

$E_1 = E_2$

$E_1 \perp E_2$

E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden.

$\longleftarrow$



Lagebeziehung zwischen Ebenen

E_1: $\vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

E_2: $\vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$

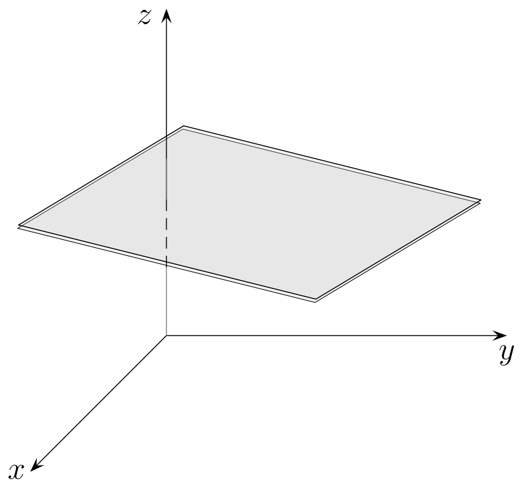
$E_1 \parallel E_2,\ E_1 \subsetneq E_2$

$E_1 = E_2$ $\qquad$ $E_1 \parallel E_2$ und der Ortsvektor $\vec{a}$ führt zu E_2.

$E_1 \perp E_2$

E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden.

$\longleftarrow$



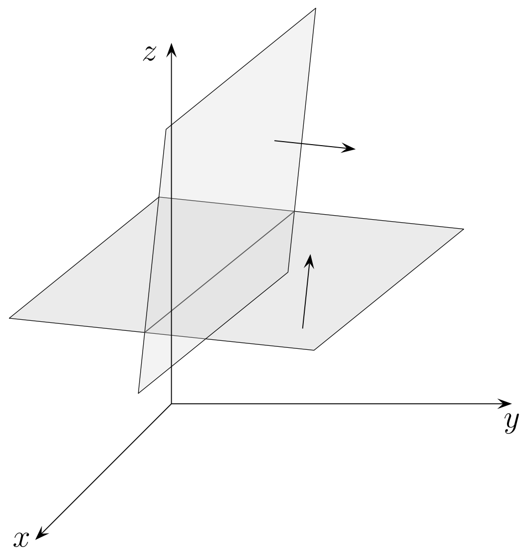
Lagebeziehung zwischen Ebenen

E_1: $\vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

E_2: $\vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$

$E_1 \parallel E_2,\ E_1 \subsetneq E_2$
$E_1 = E_2$
$E_1 \perp E_2$ $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$
E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden.

$\longleftarrow$



Lagebeziehung zwischen Ebenen

E_1: $\vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$
E_2: $\vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$

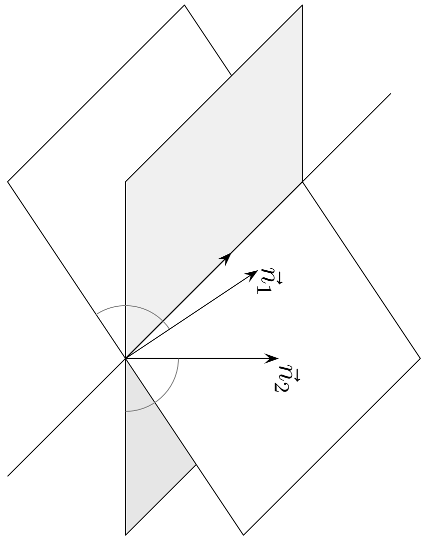
$E_1 \parallel E_2, \; E_1 \subsetneq E_2$
$E_1 = E_2$
$E_1 \perp E_2$
E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden.

$\longleftarrow$

Gegeben sind die beiden Ebenen:

$$E_1\colon \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0 \qquad E_2\colon \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 6 = 0$$

Gesucht ist eine Gleichung der Schnittgeraden.



Der Richtungsvektor der Schnittgeraden zweier Ebenen steht senkrecht auf den Normalenvektoren beider Ebenen.

Ein Richtungsvektor ergibt sich daher aus dem Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 26 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Ein Stützvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ müsste beiden Ebenengleichungen genügen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 6 = 0$$

Hierbei kann eine Koordinate, hier z.B. $z = 0$, vorgegeben werden, x und y sind dann auszurechnen.

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & - & 4y & = & 1 \\ 5x & + & 2y & = & 6 \\ \hline & & x & = & 1 \\ & & y & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir eine Gleichung der Schnittgeraden: $\quad g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$

$\uparrow$

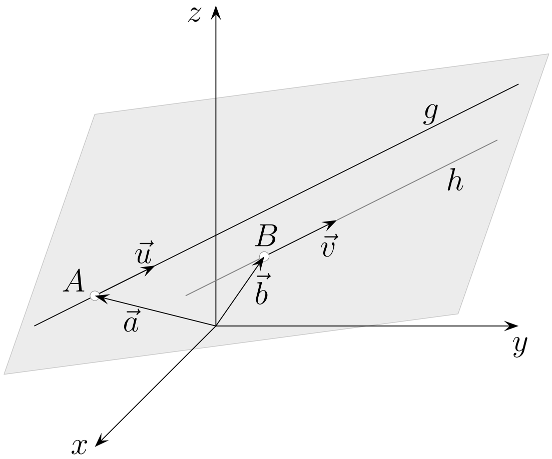
Lagebeziehung zwischen Geraden

g: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$
h: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$

$g \parallel h$, $g \neq h$ $\quad$ $\vec{u} = r\vec{v}$ $\quad$ Richtungsvektoren sind kollinear (linear abhängig) und der Stützvektor von g führt nicht zu h.

$g = h$
$g \perp h$
g und h haben genau einen Schnittpunkt.
g und h sind windschief.

$\longleftarrow$

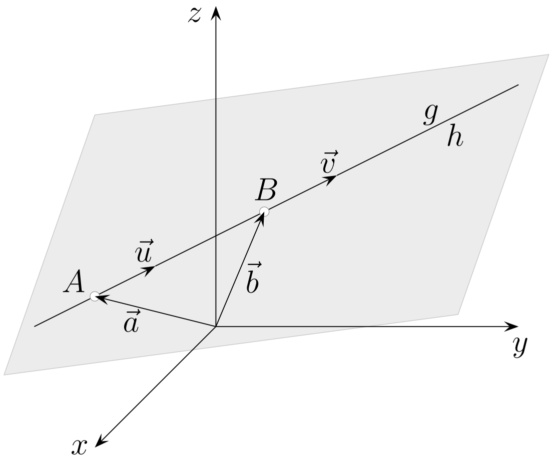


Lagebeziehung zwischen Geraden

g: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$
h: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$

$g \parallel h$, $g \neq h$
$g = h$ identisch, $g \parallel h$ und der Stützvektor von g führt zu h.
$g \perp h$
g und h haben genau einen Schnittpunkt.
g und h sind windschief.

⟵



Lagebeziehung zwischen Geraden

$g\colon\ \vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$
$h\colon\ \vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$

$g \parallel h,\ g \neq h$

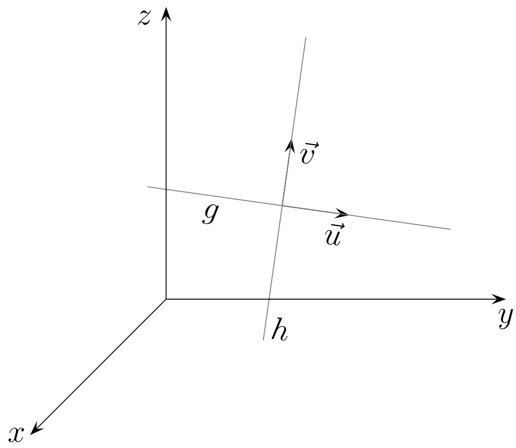
$g = h$

$g \perp h$ $\quad\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0,\ $ d. h. die Richtungsvektoren sind orthogonal.

g und h haben genau einen Schnittpunkt.

g und h sind windschief.

$\longleftarrow$

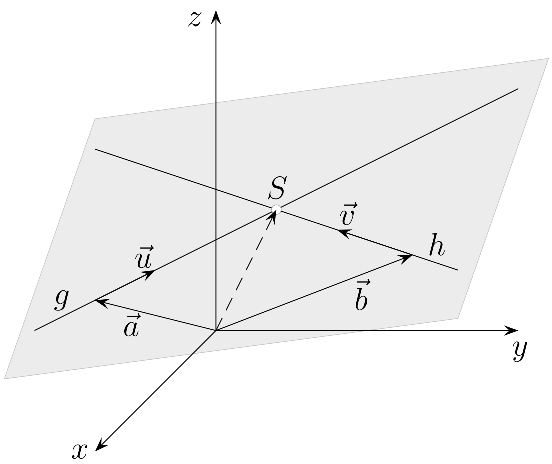


Lagebeziehung zwischen Geraden

g: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$
h: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$

$g \parallel h$, $g \neq h$
$g = h$
$g \perp h$
g und h haben genau einen Schnittpunkt. $\vec{a} + s\vec{u} = \vec{b} + t\vec{v}$ für je ein $s, t \in \mathbb{R}$
g und h sind windschief.

$\longleftarrow$

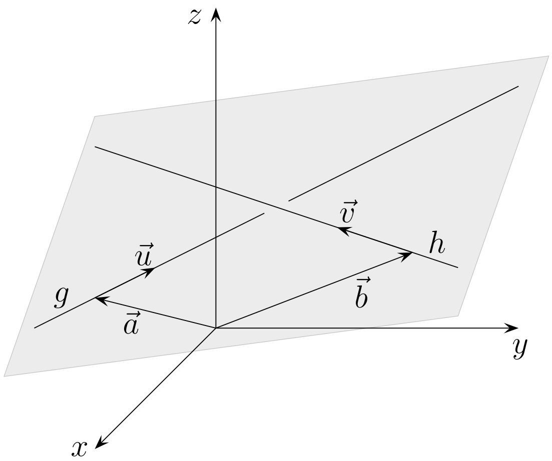


Lagebeziehung zwischen Geraden

g: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$
h: $\vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$

$g \parallel h$, $g \neq h$
$g = h$
$g \perp h$
g und h haben genau einen Schnittpunkt.
g und h sind windschief. g und h sind nicht parallel und schneiden sich nicht.

$\longleftarrow$



Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

E: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$

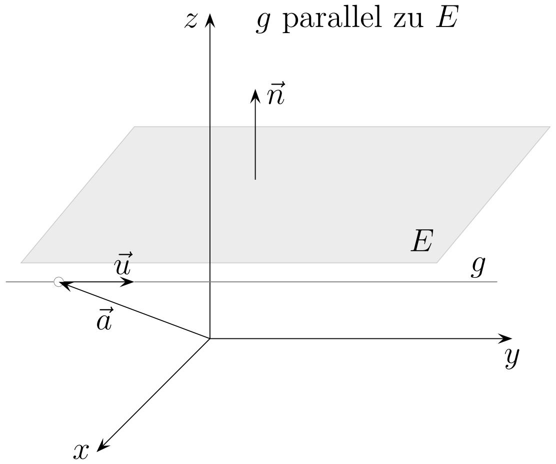
$g \parallel E,\; g \subsetneq E$ $\qquad\qquad$ $\vec{u} \perp \vec{n},\; \vec{a} \notin E$

$g \subset E$

$g \perp E$

g und E schneiden sich in einem Punkt.

⟵



Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

E: $\vec{n} \cdot (\vec{x}\; - \vec{b}) = 0$

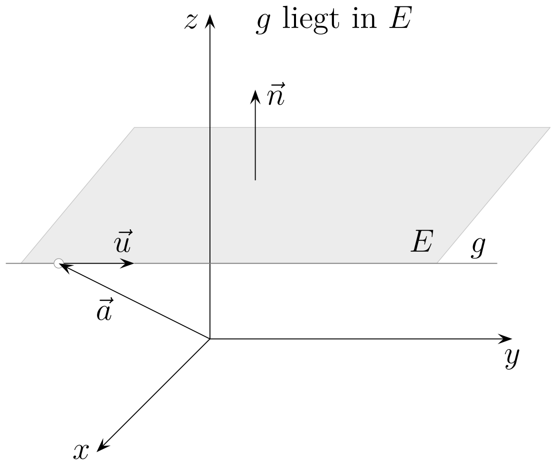
$g \parallel E,\; g \subsetneq E$

$g \subset E$ $\qquad\qquad$ $\vec{u} \perp \vec{n},\; \vec{a} \in E$

$g \perp E$

g und E schneiden sich in einem Punkt.

$\longleftarrow$



Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

E: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$

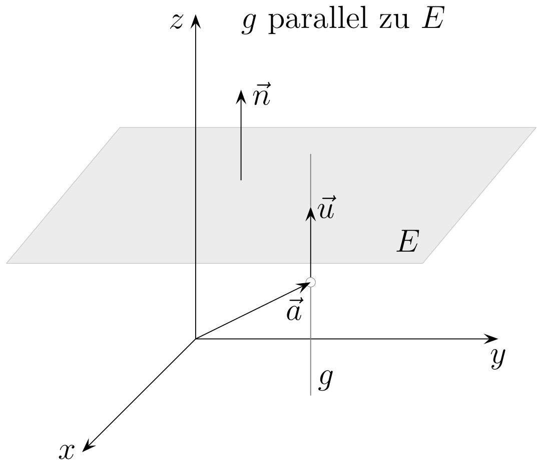
$g \parallel E$, $g \subsetneq E$

$g \subset E$

$g \perp E$ $\qquad\qquad$ $\vec{u} = r\vec{n}$

g und E schneiden sich in einem Punkt.

$\longleftarrow$



Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$

E: $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$

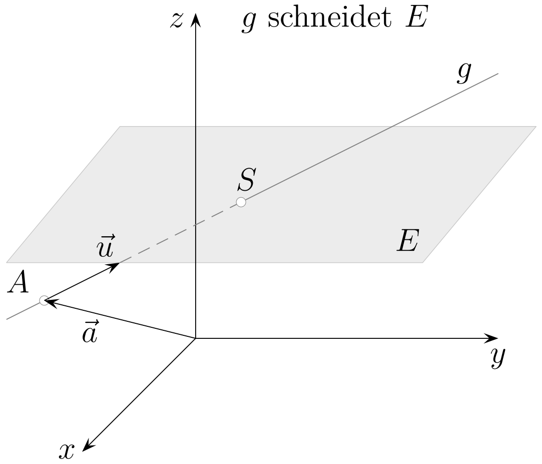
$g \parallel E,\ g \subsetneq E$

$g \subset E$

$g \perp E$

g und E schneiden sich in einem Punkt. g in E einsetzen, es gibt genau ein t.

$\longleftarrow$

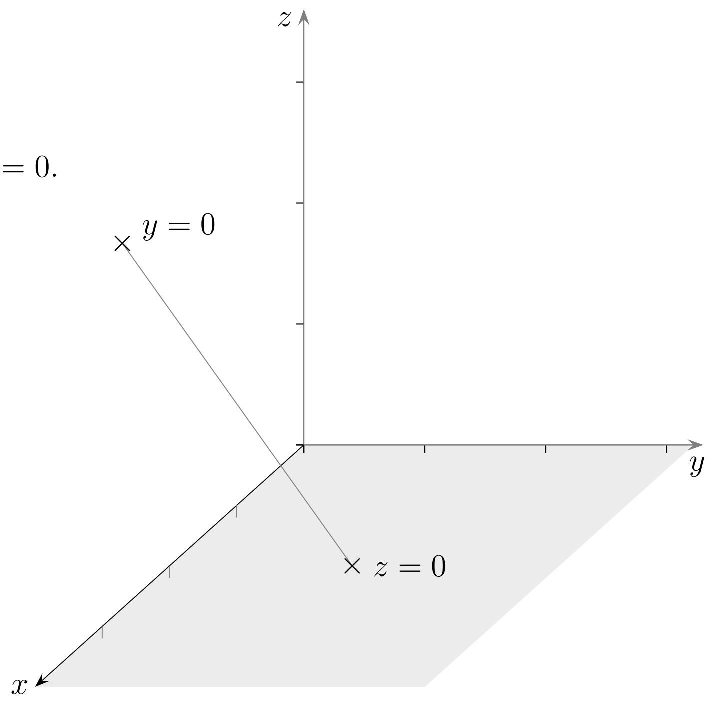


Spurpunkte einer Geraden
Spurgerade einer Ebene

<u>Spurpunkte einer Geraden</u>

Die Punkte, in denen die Gerade die Koordinatenebenen schneidet, heißen Spurpunkte.

$$g\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$



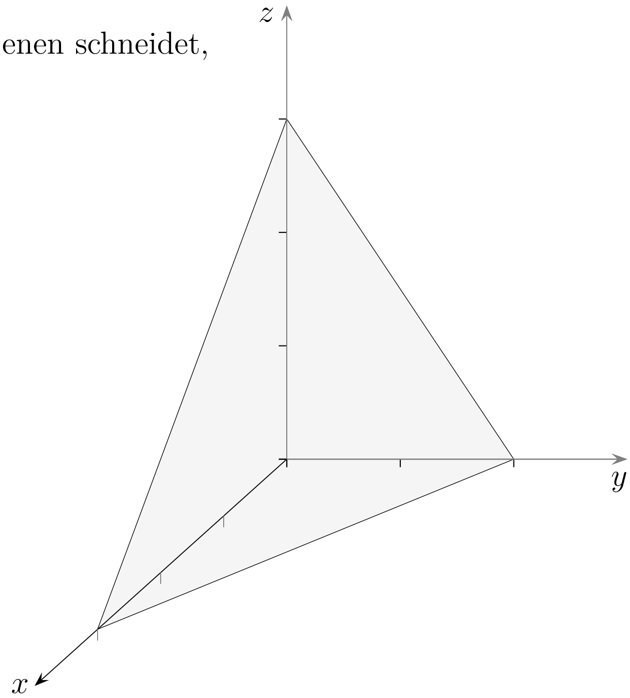
Für den Spurpunkt auf der xy-Ebene gilt $z = 0$.
Es muss für diesen Punkt $0 = a_3 + \lambda u_3$ sein.
Diese Beziehung wird nach λ aufgelöst und in die Geradengleichung eingesetzt.

⟵

Spurpunkte einer Geraden
Spurgerade einer Ebene

Spurgerade einer Ebene

Die Geraden, in denen die Ebene die Koordinatenebenen schneidet, heißen Spurgeraden.



$$E\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Für die Spurgerade in der xy-Ebene gilt $z = 0$. Es muss für diese Gerade $0 = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$ sein. Diese Beziehung wird nach λ oder μ aufgelöst und in die Ebenengleichung eingesetzt, anschließend wird zusammengefasst.

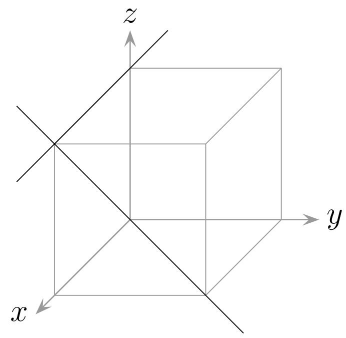
⟵

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \qquad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

a)

r	s	
1	0	3
0	1	2
0	0	0

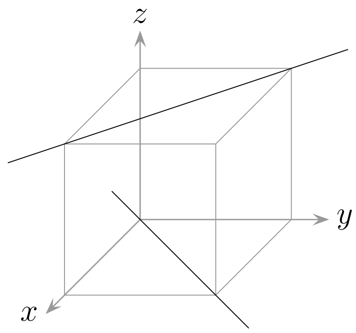
Das LGS ist eindeutig lösbar, $r = 3$, $s = 2$.
Die Geraden schneiden sich.
Die 3. Zeile $r \cdot 0 + s \cdot 0 = 0$ ist für beliebige r und s erfüllt.



b)

r	s	
1	0	0
0	1	0
0	0	1

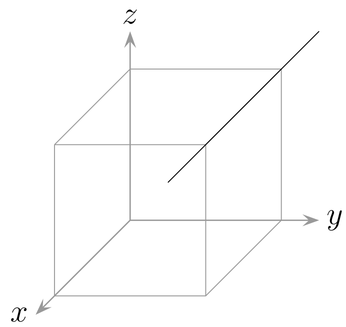
$r = 0,\ \ s = 0$
Bis hier sieht es nach einer eindeutigen Lösung aus.
3. Zeile: Widerspruch $s \cdot 0 = 1$
Die Geraden sind windschief.



c)

r	s	
1	5	4
0	0	0
0	0	0

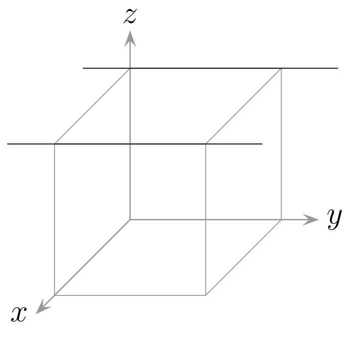
Für r und s gibt es unendlich viele Lösungen $r + s \cdot 5 = 4$.
2. und 3. Zeile sind ohne Belang.
Die Geraden sind identisch.



d)

r	s	
1	5	4
0	0	1
0	0	0

1. Zeile: unendl. viele Lösungen
2. Zeile: Widerspruch, also kein Schnittpunkt
3. Zeile: ohne Belang
Die Geraden sind parallel und nicht identisch.



Die erste Gleichung enthält genau eine freie Variable (ein Wert kann beliebig gewählt werden). Eine weitere Gleichung, die nicht nur aus Nullen besteht, verringert hier die Anzahl der freien Variablen des LGSs auf null. Denn die Gleichung könnte nach einer Variablen aufgelöst und in die Erste eingesetzt werden. Ein Schnittpunkt läge vor, wenn nicht noch eine Widerspruchzeile folgte.

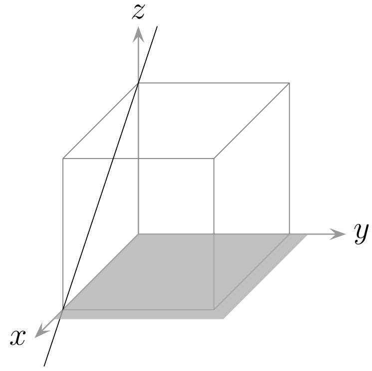
Gerade/Gerade
Gerade/Ebene
Ebene/Ebene
allgemein

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \qquad E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

a)

t	r	s	
1	0	0	−1
0	1	0	2
0	0	1	1

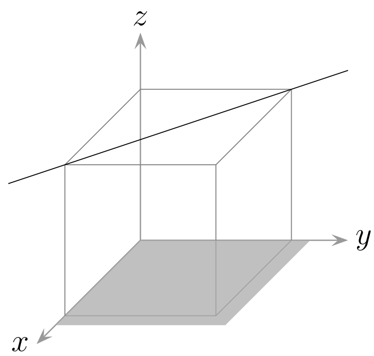
genau eine Lösung
genau ein Schnittpunkt



b)

t	r	s	
1	0	1	0
0	1	2	0
0	0	0	1

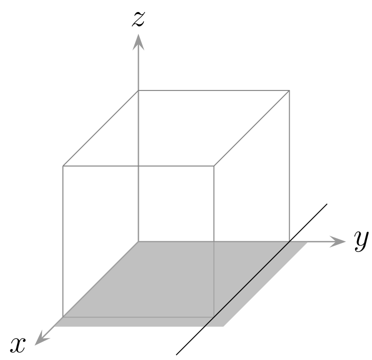
2 freie Variablen
1 freie Variable, Gerade
Widerspruch, keine Lösung
g und E sind parallel



c)

t	r	s	
1	0	1	1
0	1	2	1
0	0	0	0

2 freie Variablen
1 freie Variable, Gerade
Schnitt ist eine Gerade
g liegt in E



⟵

Gerade/Gerade

Gerade/Ebene

Ebene/Ebene

allgemein

$$E_1\colon\ \vec{x} = \Big(\ \Big) + r\Big(\ \Big) + s\Big(\ \Big), \qquad E_2\colon\ \vec{x} = \Big(\ \Big) + u\Big(\ \Big) + v\Big(\ \Big)$$

a)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	1	3	2

3 freie Variablen
2 freie Variablen
1 freie Variable

Es liegt eine Schnittgerade vor.
Die 3. Zeile $u + v \cdot 3 = 2$ kann nach einer Variablen aufgelöst werden. Durch Einsetzen gelangt man zur Geradengleichung.

b)

r	s	u	v	
1	0	0	3	4
0	1	0	-1	2
0	0	0	1	0

3 freie Variablen
2 freie Variablen
1 freie Variable

Es liegt eine Schnittgerade vor.
Die 3. Zeile liefert $v = 0$.
Durch Einsetzen gelangt man zur Geradengleichung.

c)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	0

3 freie Variablen
2 freie Variablen, Ebene

Die Ebenen sind identisch.

d)

r	s	u	v	
1	0	4	3	0
0	1	2	5	0
0	0	0	0	1

3 freie Variablen
2 freie Variablen, Ebene
Widerspruch
Die Ebenen sind parallel aber nicht identisch.

Schnittgerade:
Falls keine einfache Beziehung wie $v = 0$ (siehe b)) existiert, so sucht man sich eine Gleichung, in der nur r und s oder aber nur u und v vorkommen (siehe a)). Da der eine Parameter vom anderen abhängt, kommt man durch Einsetzen in die entsprechende Ebenengleichung zu einer Geradengleichung. Wenn auch dies nicht möglich ist, sind 2 Gleichungen zu verwenden, die einen Parameter gemeinsam haben. Durch Eliminieren gelangt man zu einer Beziehung von r und s bzw. u und v.

Gerade/Gerade

Gerade/Ebene

Ebene/Ebene

allgemein

Die verschiedenen Möglichkeiten der Lagebeziehungen von gleichen oder verschiedenen Objekten
(Geraden, Ebenen) lassen sich aus der Dreiecksform auf einheitliche Weise ablesen.

t	r	s		
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	2 freie (unabhängige) Variablen, Ebene
0	$\square$	$\square$	$\square$	1 freie Variable, Gerade
0	0	$\square$	$\square$	keine freie Variable, Punkt

Wir ermitteln die Anzahl der freien Variablen des LGSs und beginnen mit der 1. Gleichung.
Sie hat (hier) 2 freie Variablen (2 könnten beliebig gewählt werden, der Wert der 3. Variablen ergäbe sich aus der Gleichung). Von n Variablen einer Gleichung sind $n-1$ unabhängig.
Jede weitere Gleichung, die nicht nur aus Nullen besteht, verringert die Anzahl der freien Variablen um 1 (eine Gleichung könnte nach einer Variablen aufgelöst und in die Andere eingesetzt werden).
Die Anzahl der freien Variablen bestimmt das (Schnitt-)Objekt.

Bei einer Widerspruchszeile der Form $0 \quad 0 \quad 0 \;\; | \;\; 1$ ergibt sich kein Schnittobjekt.
2 Ebenen, bzw. eine Gerade und eine Ebene verlaufen dann echt parallel, 2 Geraden entweder parallel oder windschief, je nachdem, welche Entscheidungslage vor dem Widerspruch vorlag.

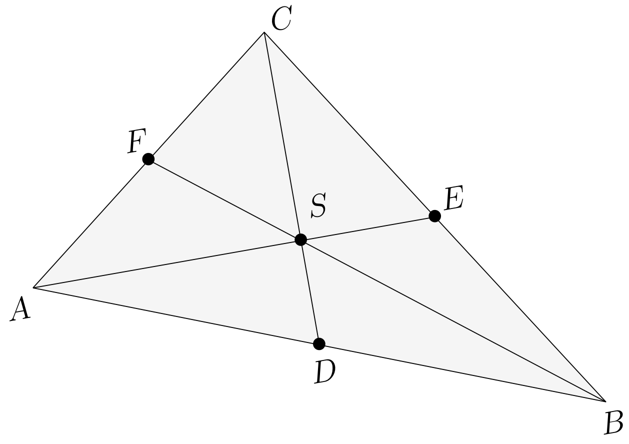
Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
Der Schnittpunkt teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2.
Dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks.

Sei A der Ursprung und $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *und* $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Gerade BF*:* $\quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda\, \overrightarrow{BF}$

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\,(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a})$$

Gerade AE*:* $\quad \vec{x} = \lambda\,\frac{1}{2}\,(\vec{a} + \vec{b})$



Schnitt: $\quad \vec{a} + \lambda\,(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}) \;=\; \mu\,\frac{1}{2}\,(\vec{a} + \vec{b})$

$$\iff \quad (1 - \lambda - \frac{1}{2}\mu)\,\vec{a} \;+\; (\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu)\vec{b} \;=\; \vec{0}$$

$$\iff \quad \lambda = \frac{2}{3}, \qquad \mu = \frac{2}{3}$$

Die Gerade CD *verläuft auch durch* S.

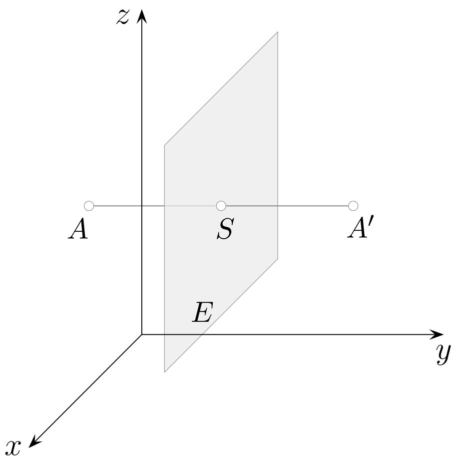
⟵

Punkt A spiegeln

an der Ebene E

am Punkt Q

an der Geraden g



$E\colon\ \vec{n}\cdot\vec{x}\ - c = 0$

Ermittle mit $g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\vec{n}$ den Schnittpunkt S.

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{AS}$

$\longleftarrow$

Spiegel den Punkt $P(-4\,|\,-9\,|\,-1)$ an der Ebene

a) $E\colon\ -2x + y + 2z = 6$ Schnittpunkt $S(-6\,|\,-8\,|\,1)$, $P'(-8\,|\,-7\,|\,3)$

b) $E\colon\ -x + y + 2z = 2$ $S(-11/2\,|\,-15/2\,|\,2)$, $P'(-7\,|\,-6\,|\,5)$

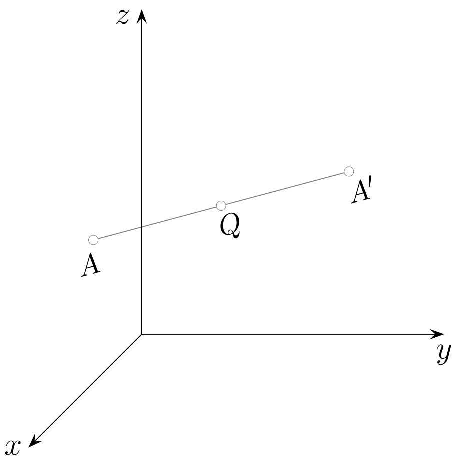
Punkt A spiegeln

an der Ebene E

am Punkt Q

an der Geraden g

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{AQ}$



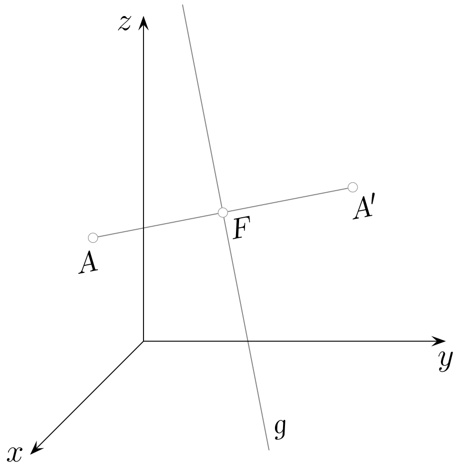
$\longleftarrow$

Spiegel den Punkt $A(-4\,|\,5\,|\,3)$ am Punkt

a) $Q(1\,|\,2\,|\,-2)$ $\qquad$ $A'(6\,|\,-1\,|\,-7)$

b) $R(-2\,|\,3\,|\,-2)$ $\qquad$ $A'(0\,|\,1\,|\,-7)$

Punkt A spiegeln
an der Ebene E
am Punkt Q
an der Geraden g



$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AF}$

Der Fußpunkt F wird benötigt,
siehe Abstand Punkt/Gerade.

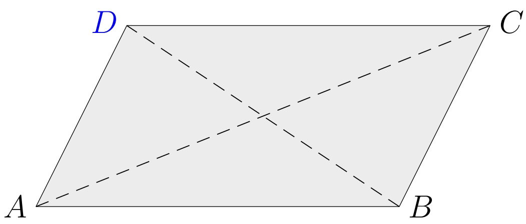
$\longleftarrow$

Spiegel den Punkt $P(6\,|\,3\,|\,-3)$ an der Geraden

a) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Fußpunkt $F(4\,|\,2\,|\,0)$, $P'(2\,|\,1\,|\,3)$

b) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $F(-1\,|\,{}^{7}\!/\!_{2}\,|\,{}^{-5}\!/\!_{2})$, $P'(-8\,|\,4\,|\,-2)$

Punkte A, B, C ergänzen zu
einem Parallelogramm
einer Raute
einem Quadrat



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

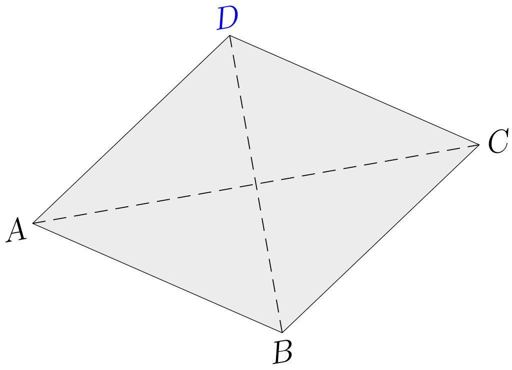
oder

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$

$\longleftarrow$

Gegeben sind die Punkte $A(4\,|\,2\,|\,3)$, $B(1\,|\,8\,|\,5)$ und $C(-2\,|\,1\,|\,-3)$.
Bestimme die Koordinaten eines weiteren Punktes D so,
dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. $D(1\,|\,-5\,|\,-5)$

Punkte A, B, C ergänzen zu
einem Parallelogramm
einer Raute
einem Quadrat



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

oder

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$

$\longleftarrow$

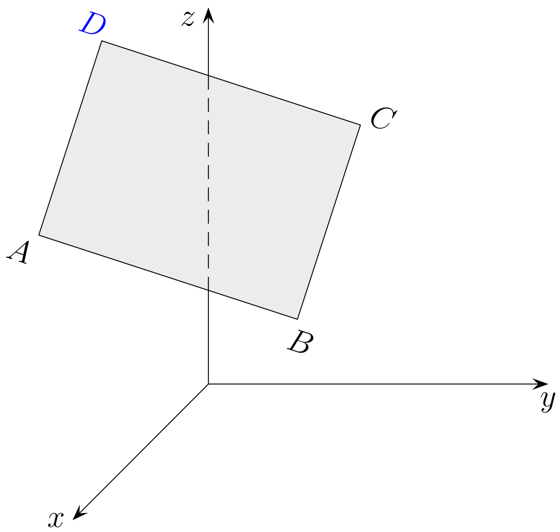
Gegeben sind die Punkte $A(2 \,|\, -2 \,|\, 0)$, $B(-2 \,|\, 1 \,|\, -3)$ und $C(-6 \,|\, 4 \,|\, 0)$.

a) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und nicht gleichseitig ist.

b) Bestimme die Koordinaten eines weiteren Punktes D so, dass das Viereck $ABCD$ eine Raute ist. $D(-2 \,|\, 1 \,|\, 3)$

Punkte A, B, C ergänzen zu
einem Parallelogramm
einer Raute
einem Quadrat

Skizze



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

oder

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$

$\longleftarrow$

Untersuche, ob die Punkte $A(3\,|\,12\,|\,2)$, $B(1\,|\,8\,|\,6)$ und $C(5\,|\,4\,|\,4)$ zu einem Quadrat ergänzt werden können.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AB}| = 6\,, \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{BC}| = 6$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D(7\,|\,8\,|\,0)$$

Die 4 Seiten des Vierecks sind gleich lang.
Ein Quadrat liegt vor, da gilt: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ (Skalarprodukt ist null)

Schnitt einer Geraden mit einer Ebene in
Normalenform
Koordinatenform

⟵

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$E\colon\ \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right] = 0 \qquad \text{oder} \quad E\colon\ \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\vec{x} - 4 = 0$$

$g \cap E$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right] = 0 \qquad g \text{ eingesetzt}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right] = 0 \qquad \text{zusammengefasst}$$

$$\begin{aligned} 0 - r &= 0\\ r &= 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt lautet $S(0\,|\,1\,|\,3)$.

Schnitt einer Geraden mit einer Ebene in
Normalenform
Koordinatenform

⟵

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$E\colon\ 2x - z = 4$

$g \cap E$

Normalenform von E

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\vec{x} &= 4 \\
\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right] &= 4 \qquad\qquad g \text{ eingesetzt} \\
1 - r &= 4 \\
r &= -3
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt lautet $S(2\,|\,-5\,|\,0)$.

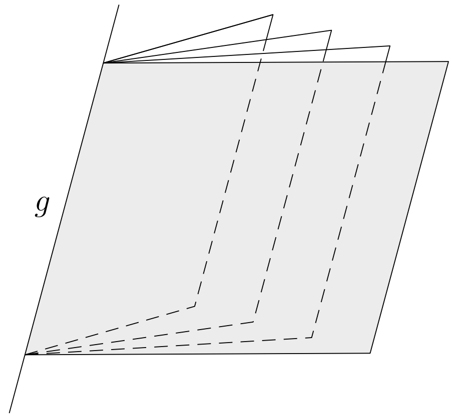
Ebenenbüschel E_a, Trägergerade g (gemeinsame Schnittgerade)

g gegeben, Nachweis: g ist die Trägergerade von E_a laufenden Punkt von g in E_a einsetzen

g ermitteln

Ebene G, Nachweis: $G \in E_a$

⟵



E_a: $x + (1-a)y + (a-3)z = 3,\ a \in \mathbb{R}$

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3 + 2\lambda + (1-a)\lambda + (a-3)\lambda &= 3 \\ &\dots \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Ebenenbüschel E_a , Trägergerade g (gemeinsame Schnittgerade)

g gegeben, Nachweis: g ist die Trägergerade von E_a

g ermitteln Schnittgerade g von E_0 und E_1 ermitteln, $g \subset E_a$ nachweisen

Ebene G, Nachweis: $G \in E_a$

$\longleftarrow$

$E_a\colon\ x + (1-a)y + (a-3)z = 3,\ \ a \in \mathbb{R}$

$E_0\colon\ x + y - 3z = 3$

$E_1\colon\ x - 2z = 3$

...

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

...

Ebenenbüschel E_a, Trägergerade g (gemeinsame Schnittgerade)

g gegeben, Nachweis: g ist die Trägergerade von E_a

g ermitteln

Ebene G, Nachweis: $G \in E_a$ G geeignet multiplizieren, $rG = E_a$, Koeffizientenvergleich

⟵

E_a: $x + (1-a)y + (a-3)z = 3, \; a \in \mathbb{R}$.

G: $2x - 6y + 2z = 6$

$$\begin{aligned} E_a &= G \cdot \tfrac{1}{2} \\ 1-a &= -3 \\ a-3 &= 1 \\ &\implies \quad a = 4 \\ E_4 &= G \end{aligned}$$