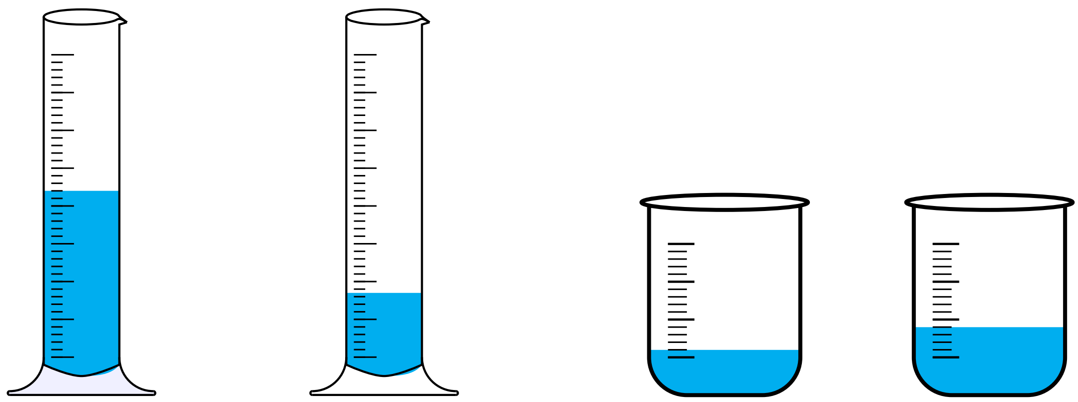
Matrizenrechnung Umfüllprozesse

In 2 Messzylindern A und B befinden sich anfänglich die Flüssigkeitsmengen m_1 und m_2.
Aus A wird der Anteil a entnommen, aus B der Anteil b (2 weitere Gefäße sind daher erforderlich). Anschließend werden die entnommenen Flüssigkeitsmengen jeweils in den anderen Zylinder geschüttet. Dieser Vorgang wird wiederholt.



$$\begin{aligned} A_{\text{neu}} &= (1-a)A_{\text{alt}} + bB_{\text{alt}} \\ B_{\text{neu}} &= aA_{\text{alt}} + (1-b)B_{\text{alt}} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A_{\text{neu}} \\ B_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{\text{alt}} \\ B_{\text{alt}} \end{pmatrix}$$

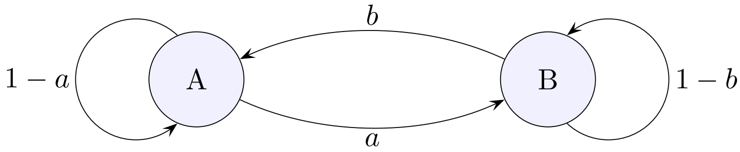
GTR: $[\mathcal{A}] * [\mathcal{B}] \to [\mathcal{B}]$, ENTER-Taste (wiederholt), der Startvektor $\mathcal{B}$ ist eine 2×1-Matrix.

Die Grenzverteilung kann mit der Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} aA &= bB \\ A + B &= m_1 + m_2 \end{aligned}$$

ermittelt werden.

Matrizenrechnung Umfüllprozesse



1. Beispiel: $a = \frac{1}{2}, \; b = \frac{1}{3}$

Mengenangaben (gerundet) in ml

Takt	A	B	Wechsel A $\to$ B	Wechsel A $\leftarrow$ B
0	200	150	100	50
1	150	200	75	67
2	142	208	71	69
3	140	210	70	70
4	140	210	70	70

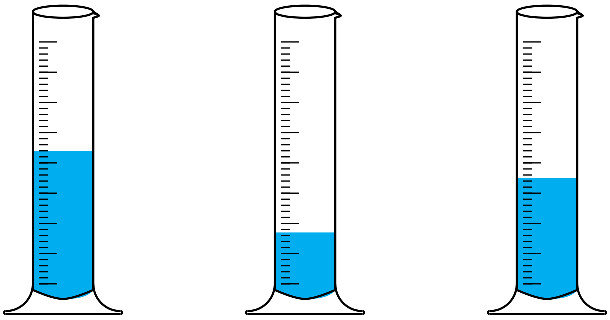
2. Beispiel: $a = \frac{1}{2}, \; b = \frac{1}{5}$

Mengenangaben (gerundet) in ml

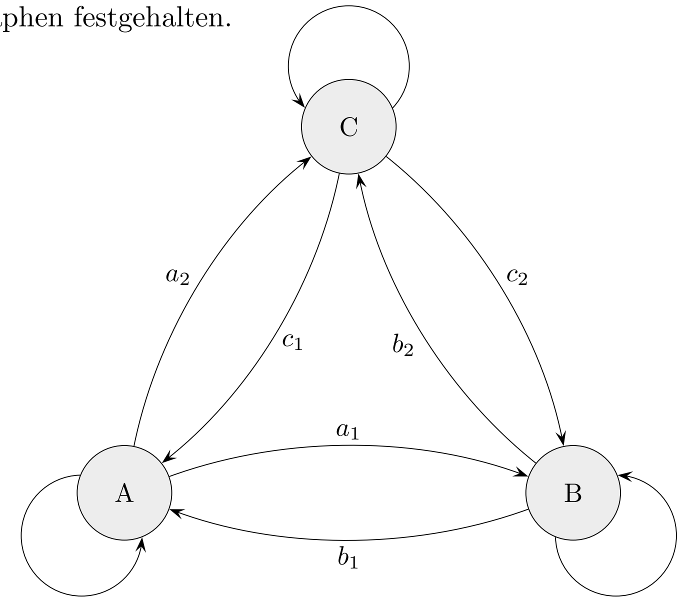
Takt	A	B	Wechsel A $\to$ B	Wechsel A $\leftarrow$ B
0	200	150	100	30
1	130	220	65	44
2	109	241	55	48
3	102	248	51	50
4	101	249	51	50
5	100	250	50	50
6	100	250	50	50

© Roolfs

Austauschprozesse



Der Austauschprozess soll anhand dreier Gefäße weiter untersucht werden.
Die Anteile (Übergänge) sind in einem Übergangsgraphen festgehalten.



$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{8} \\
a_2 &= \frac{1}{2} \\
b_1 &= \frac{1}{3} \\
b_2 &= \frac{1}{6} \\
c_1 &= \frac{1}{2} \\
c_2 &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Fülle die zugehörige Übergangsmatrix aus.

$$
\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \frac{1}{8} & & \\ & \frac{1}{6} & \end{pmatrix}
$$

Die Anfangsverteilung (in ml) sei $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix}$.

Ermittle die nächsten 3 Verteilungen (auf 2 Dezimalen) und die Grenzverteilung (stationäre Verteilung).

© Roolfs

Austauschprozesse

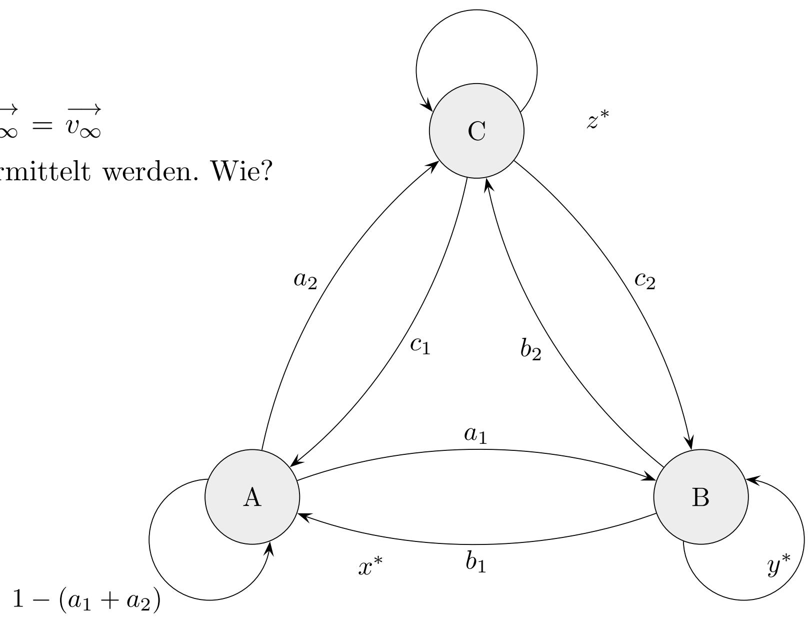
$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 75{,}83 \\ 67{,}50 \\ 56{,}67 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 79{,}27 \\ 57{,}40 \\ 63{,}33 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 80{,}53 \\ 54{,}44 \\ 65{,}03 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} 81{,}01 \\ 53{,}16 \\ 65{,}82 \end{pmatrix} \qquad \text{(aus } \overrightarrow{v_n} \text{ für } n \geq 10 \text{ erkennbar, GTR)}$$

Für den Grenzvektor gilt: $\mathcal{M}\cdot \overrightarrow{v_\infty} = \overrightarrow{v_\infty}$

Mit dieser Bedingung kann $\overrightarrow{v_\infty}$ ermittelt werden. Wie?



$\mathcal{M}\cdot \overrightarrow{v_\infty} = \overrightarrow{v_\infty}$ lautet ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1-(a_1+a_2) & b_1 & c_1 \\ a_1 & 1-(b_1+b_2) & c_2 \\ a_2 & b_2 & 1-(c_1+c_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation ergibt 3 Gleichungen.

Welche anschauliche Bedeutung hat (z. B.) die 1. Gleichung?

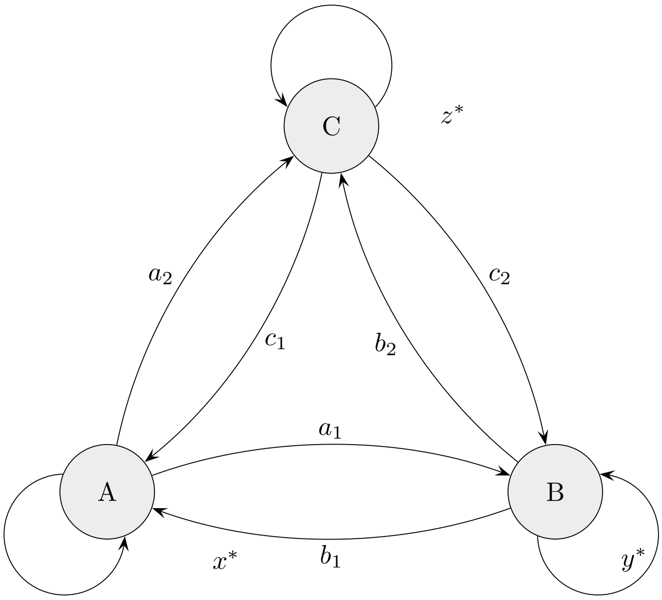
© Roolfs

Austauschprozesse

$$\overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$$

$b_1 y^* + c_1 z^* = (a_1 + a_2) x^*$

Zu- und Abfluss stimmen überein
(für A gezeigt).



$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Variiere die Anfangsverteilung, z. B. $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Was fällt dir auf?

Eine Verteilung kann (hier) stets in der Form $\overrightarrow{v_n} = 200 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ geschrieben werden,
wobei die Spaltensumme des Vektors 1 ist.
Erläutere dies.

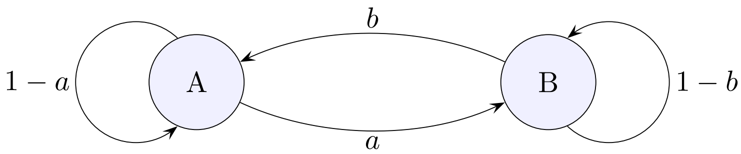
Für den Grenzvektor gilt: $\mathcal{M} \cdot \overrightarrow{v_\infty} = \overrightarrow{v_\infty}$

Mit dieser Bedingung kann $\overrightarrow{v_\infty}$ ermittelt werden. Wie?

Das Gleichungssystem kann nach einer kleinen Umformung (welcher?) mit dem GTR gelöst werden.
Die Lösung ist jedoch nicht eindeutig, da eine Zeile der Lösungsmatrix aus lauter Nullen besteht.
Algebraische Begründung: Aus zwei Gleichungen kann (durch Multiplikation und Addition) die dritte gewonnen werden. Die Lösungen zweier Gleichungen erfüllen dann auch die dritte Gleichung, die somit überflüssig ist.
Anschaulich: Wenn für je zwei Gefäße der Zu- und Abfluss übereinstimmt, muss dies auch für das dritte Gefäß gelten. Eine Gleichung wird daher durch die noch nicht berücksichtigte Bedingung $x + y + z = S$ ersetzt (S Spaltensumme der Anfangsverteilung, also gesamte Flüssigkeitsmenge).
Die Lösung ist die gesuchte Grenzverteilung.

© Roolfs

Umfüllprozesse



$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{x}_0$ als Anfangszustand (Anfangsverteilung) erhalten wir nach einer Zeiteinheit

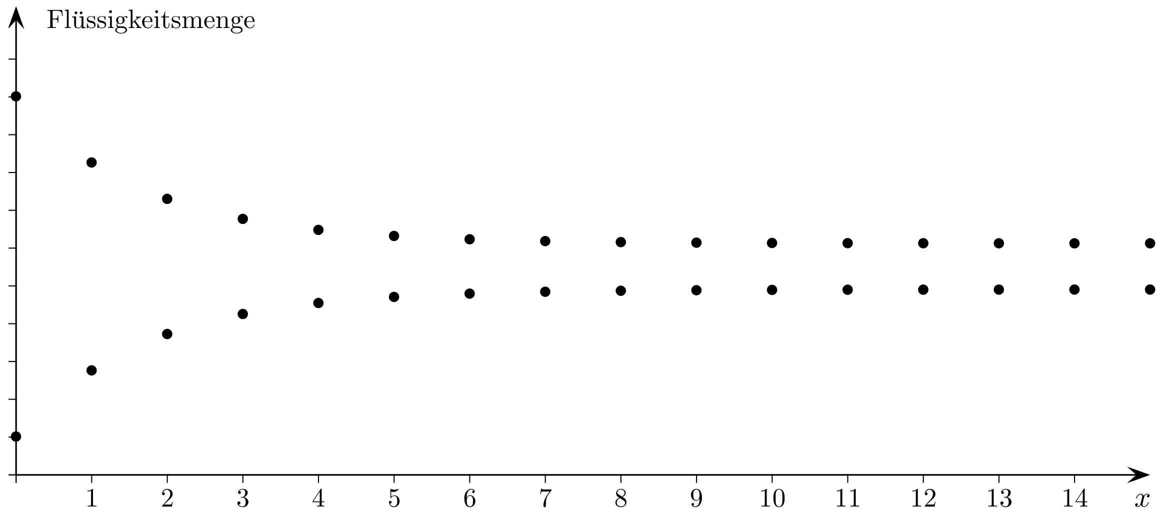
$\vec{x}_1 = \mathcal{M} \cdot \vec{x}_0$, nach 2 Zeiteinheiten: $\vec{x}_2 = \mathcal{M} \cdot \vec{x}_1 = \mathcal{M} \cdot (\mathcal{M} \cdot \vec{x}_0)$, usw.

Wie muss die Multiplikation $\mathcal{M} \cdot \mathcal{M} = \mathcal{M}^2$ von Matrizen beschaffen sein, damit gilt:

$$\mathcal{M} \cdot (\mathcal{M} \cdot \vec{x}_0) = \mathcal{M}^2 \cdot \vec{x}_0\,?$$

Die Frage beantwortet das Blatt Matrizenmultiplikation.

Typischer Graph



Matrizenmultiplikation $\mathcal{A}^2$

Es ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Wir fragen uns, wie die Multiplikation von Matrizen beschaffen sein muss, damit gilt:

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]}$$

$$= \begin{pmatrix} a(ax+by) + b(cx+dy) \\ c(ax+by) + d(cx+dy) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a^2+bc)x + (ab+bd)y \\ (ca+dc)x + (cb+d^2)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es muss also sein:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

Das Falksche Schema ist leicht zu merken,
Spalte mal Zeile. Das Ergebnis erinnert an das Skalarprodukt.

$$\begin{array}{r|l} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & b_1 \\ \cdot & \cdot & b_2 \\ \cdot & \cdot & b_3 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \blacksquare \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \end{array}$$

$$\blacksquare = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

© Roolfs

Matrizenmultiplikation $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

Es ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Wir fragen uns, wie die Multiplikation von Matrizen beschaffen sein muss, damit gilt:

$$\left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]}$$

$$= \begin{pmatrix} e(ax+by) + f(cx+dy) \\ g(ax+by) + h(cx+dy) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ea+fc)x + (eb+fd)y \\ (ga+hc)x + (gb+hd)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es muss also sein:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

Das Falksche Schema ist leicht zu merken,
Spalte mal Zeile. Das Ergebnis erinnert an das Skalarprodukt.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} . & . & b_1 \\ . & . & b_2 \\ . & . & b_3 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{A} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ . & . & . \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & \blacksquare \\ . & . & . \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \end{array}$$

$$\blacksquare = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Rechnen mit Matrizen

a) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

f) Überprüfe

$$\left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

g) Untersuche, ob für Matrizen $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$ gilt.

Rechnen mit Matrizen

a) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 1{,}1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 18 \\ 27 & 22 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) Die Seiten stimmen natürlich überein.

$$\left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

g) Im Allgemeinen gilt $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$.

Grenzmatrix

$$\underbrace{\mathcal{M}\cdot(\ldots(\mathcal{M}\cdot(\mathcal{M}\cdot\overrightarrow{v_0}))\ldots)}_{n \text{ Iterationen}} = \mathcal{M}^n\cdot\overrightarrow{v_0}$$

Das langfristige Verhalten eines Systems kann iterativ mit

$\overrightarrow{v_{n+1}} = \mathcal{M}\cdot\overrightarrow{v_n}$, Startvektor $\overrightarrow{v_0}$

oder explizit mit

$\overrightarrow{v_n} = \mathcal{M}^n\cdot\overrightarrow{v_0}$ untersucht werden.

GTR: $[M]*[B]\to[B]$, ENTER-Taste (wiederholt)
Der Startvektor ist eine 2×1-Matrix.

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Die Grenzmatrix (schon für $n \geq 6$ erkennbar)

$$\mathcal{M}^\infty = \begin{pmatrix} 0{,}405 & 0{,}405 & 0{,}405 \\ 0{,}266 & 0{,}266 & 0{,}266 \\ 0{,}329 & 0{,}329 & 0{,}329 \end{pmatrix}$$

hat folgende Struktur:

$$\mathcal{M}^\infty = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 & p_2 \\ p_3 & p_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

In jeder Zeile von $\mathcal{M}^n$ gleichen sich die Elemente pro Takt an.
Je Zeile wird das kleinste Element größer, das größte Element kleiner.
Der Beweis (siehe Stochastische Prozesse) ist hier nicht erforderlich.

Der Startvektor sei $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, die Spaltensumme $a+b+c=S$.

Die Grenzverteilung ist von der Anfangsverteilung unabhängig und lautet $\overrightarrow{v_\infty} = S\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ (siehe $\mathcal{M}^\infty$!). Begründung?

© Roolfs

Grenzmatrix

Die Grenzmatrix hat folgende Struktur:

$$\mathcal{M}^\infty = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 & p_2 \\ p_3 & p_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

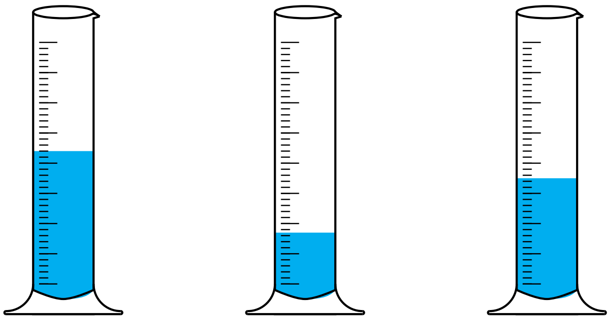
Der Startvektor sei $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, Spaltensumme $a + b + c = S$

Zeige, dass die Grenzverteilung unabhängig von der Anfangsverteilung ist.

$$\mathcal{M}^\infty \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} p_1 \cdot a + p_1 \cdot b + p_1 \cdot c \\ p_2 \cdot a + p_2 \cdot b + p_2 \cdot c \\ p_3 \cdot a + p_3 \cdot b + p_3 \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \cdot (a + b + c) \\ p_2 \cdot (a + b + c) \\ p_3 \cdot (a + b + c) \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

© Roolfs

Umfüllprozesse Ausblick



Der Umfüllprozess ist ein Modell für alle Übergangsprozesse, wobei Änderungen möglich sind, z. B. ein Gefäß hat ein Leck.

Uns interessiert, unter welchen Bedingungen sich langfristig eine Gleichgewichtsverteilung (stationäre Verteilung) einstellt und ob diese von der Anfangsverteilung abhängt.
Umfüllvorgänge, die durch stochastische Matrizen (Spaltensumme 1) beschrieben werden, kommen in die nähere Wahl. Betrachte jedoch hierzu:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ein Umfüllprozess gelangt vermutlich in einen von der Anfangsverteilung unabhängigen Gleichgewichtszustand, wenn ...

© Roolfs

die gesamte Flüssigkeitsmenge in der Weise verbunden ist, dass sich eine Einfärbung der Flüssigkeit eines Gefäßes auf alle Gefäße verbreiten würde, da kleine Flüssigkeitsmengen durch das (wiederholte) Umfüllen grundsätzlich in jedes Gefäß gelangen können.