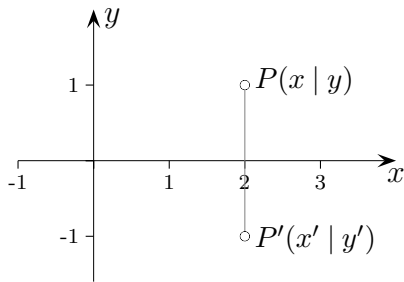


1. Abbildungen der Ebene Abbildungsmatrix Spiegelung
2. Lineare Abbildungen
3. Drehung um den Ursprung
4. Parallelprojektion auf die yz -Ebene
5. Parallelprojektion auf eine Ebene
6. Parallelprojektion auf die yz -Ebene Aufgaben mehrere Seiten
7. Parallelprojektion Einstieg
8. Parallelprojektion auf die yz -Ebene lineare Abbildung
9. Parallelprojektion auf die yz -Ebene Aufgabe
10. Zentralprojektion

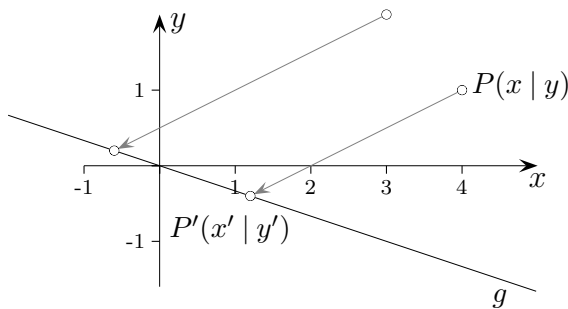
↑ Abbildungen der Ebene, Abbildungsmatrix

a) Spiegelung an der x -Achse



$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \\ \hline x' &= 1x + 0y \\ y' &= 0x - 1y \\ \hline \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Parallelprojektion auf eine Ursprungsgerade g , Projektionsrichtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$



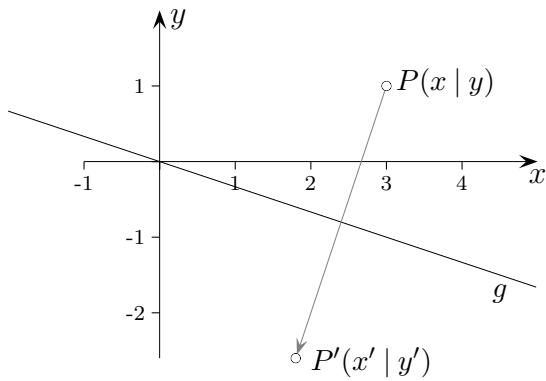
Schnitt der Geraden $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{v}$ und $g: x + 3y = 0$ ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y\right) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bei einer orthogonalen Projektion auf die Gerade g ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Die Abbildungsmatrix lautet: $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

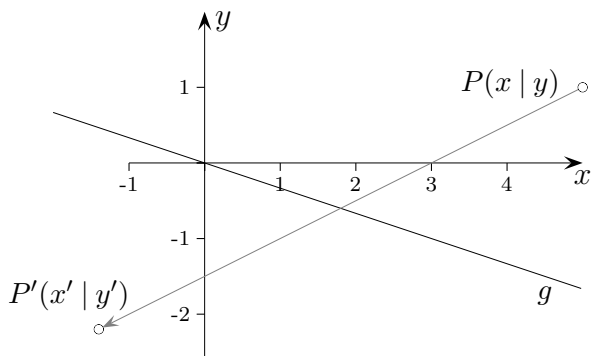
c) Spiegelung an einer Ursprungsgeraden g



Schnitt der Geraden $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{n}$ und $g: x + 3y = 0$ ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y$, siehe orthogonale Projektion. t wird verdoppelt. Es ist nicht nötig, den Schnittpunkt zu berechnen.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y\right) \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Schrägspiegelung an g , Projektionsrichtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

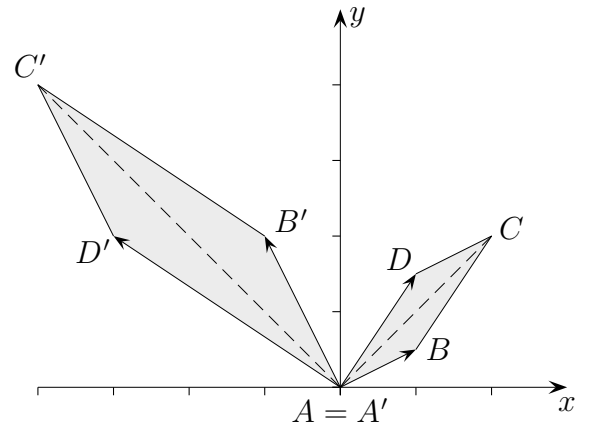


Schnitt der Geraden $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{v}$ und $g: x + 3y = 0$ ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y\right) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

↑ Lineare Abbildungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ dx + ey \end{pmatrix}$$



- a) Die Bilder der Einheitsvektoren sind die Spalten der Abbildungsmatrix.
- b) Durch Nachrechnen wird bestätigt: $A \cdot (\lambda \vec{x}) = \lambda (A \cdot \vec{x})$ und $A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y}$
 Das Bild einer Summe zweier Vektoren \vec{x} , \vec{y} kann auch als Summe der beiden Bildvektoren $A \cdot \vec{x}$, $A \cdot \vec{y}$ erhalten werden (siehe obige Grafik).
 Parallelogramme werden auf Parallelogramme abgebildet.

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

Sei C durch $B \cdot (A \cdot \vec{x}) = C \cdot \vec{x}$ festgelegt. Dann gilt: $C = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$

C wird als Produkt der Matrizen B und A aufgefasst: $C = B \cdot A$

Für die Bildung des Produkts gibt es eine einfache Merkregel:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

↑ Drehung um den Ursprung

Die Drehung ist eine lineare Abbildung, da die Linearitätsbedingungen anschaulich erfüllt sind. Daher ergibt sich die Abbildungsmatrix durch die Abbildung der Einheitsvektoren.

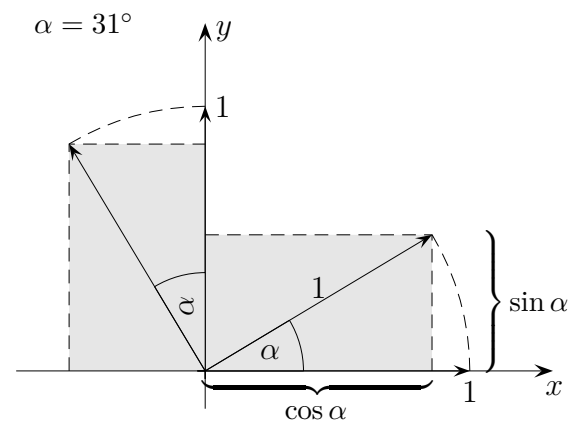
Erläutere:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \end{pmatrix}$$

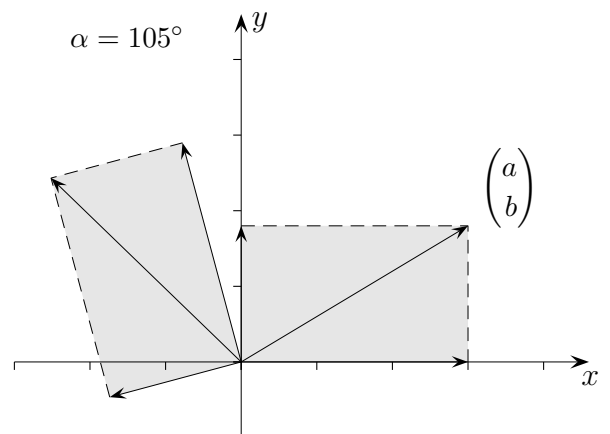
$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} -b \sin \alpha \\ b \cos \alpha \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \curvearrowright ?$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b \sin \alpha \\ b \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \curvearrowright \begin{pmatrix} a \cos \alpha - b \sin \alpha \\ a \sin \alpha + b \cos \alpha \end{pmatrix}$$



In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

↑ Parallelprojektion auf die yz -Ebene

Diese Abbildungsart ist rechnerisch einfach, wenn

die Projektionsrichtung durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ festgelegt wird.

Eine Gerade durch $P(x_0 | y_0 | z_0)$ mit dem Richtungsvektor \vec{v} ist mit der yz -Ebene zu schneiden.

Ergebnis: $\lambda = x_0$

P wird somit auf $P'(0 | ax_0 + y_0 | bx_0 + z_0)$ abgebildet, insbesondere $Q(1 | 0 | 0)$ auf $Q'(0 | a | b)$.

Die Abbildungsgleichungen lauten dann ($x'_0 = 0$):

$$y'_0 = ax_0 + y_0$$

$$z'_0 = bx_0 + z_0$$

oder in Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

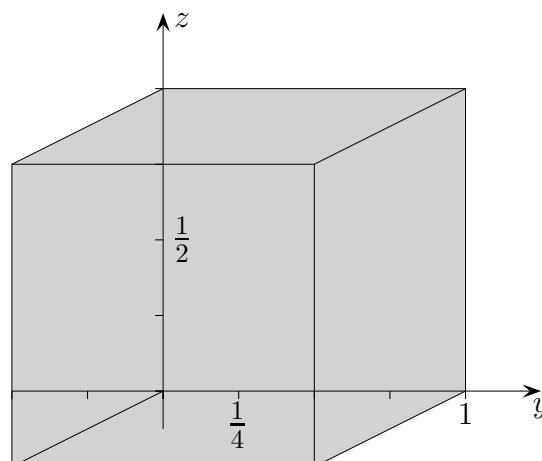
Die zweidimensionalen Spaltenvektoren der Matrix sind die Bilder der dreidimensionalen Basisvektoren \vec{e}_i .

Betrachten wir nun die Abbildung des Einheitswürfels für $a = -\frac{1}{2}$ und $b = -\frac{1}{4}$. Hierbei gilt z.B.:

$$E_1(1 | 0 | 0) \longrightarrow E'_1\left(0 \mid -\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{4}\right)$$

$$E_2(1 | 1 | 0) \longrightarrow E'_2\left(0 \mid \frac{1}{2} \mid -\frac{1}{4}\right)$$

Insgesamt ergibt sich das Bild:



Diese Art der Berechnung von Punktkoordinaten für Schrägbilder ist seit 2018 im KC Ni enthalten.

↑ Parallelprojektion auf eine Ebene

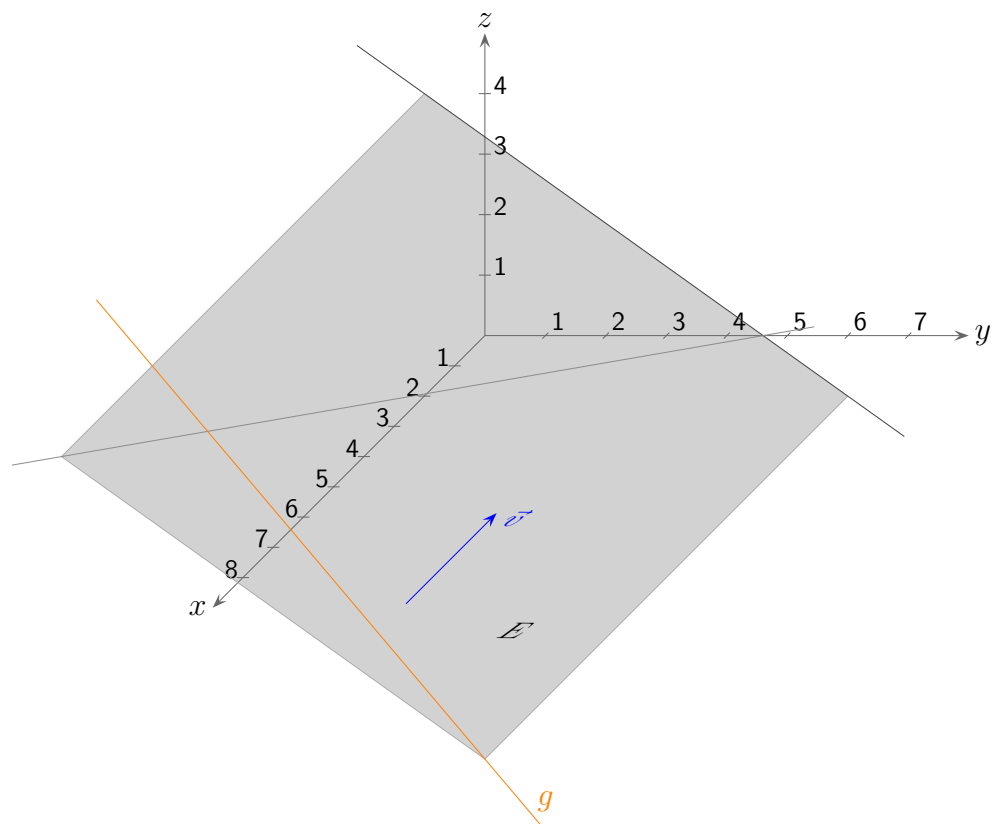
Wie lautet die Matrix A der Projektion, die beliebige Raumpunkte $P(x | y | z)$

parallel in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $E : x - y + z = 0$ abbildet?

Schnitt der Gerade $\vec{x} = \vec{OP} + t\vec{v}$ mit E ergibt (Einsetzen) $t = -x + y - z$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-x + y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

↑ Parallelprojektion auf die yz -Ebene

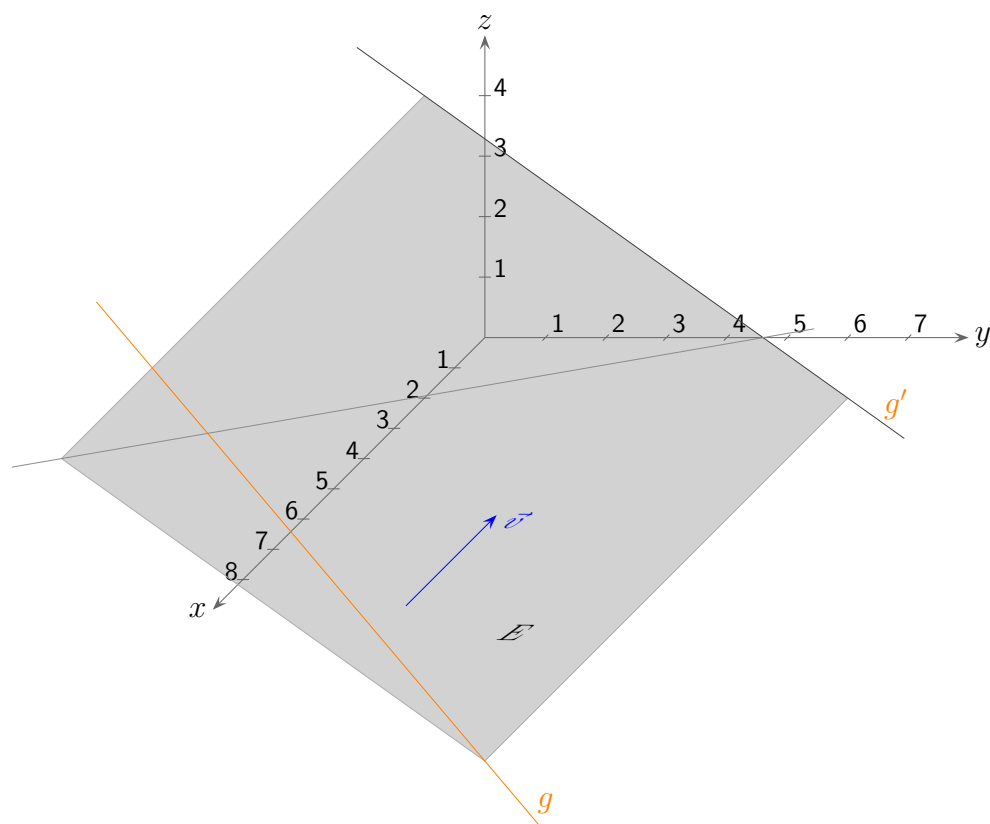


Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

Ermittle das Bild der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Die Grafik enthält die Spurgerade von E in der xy -Ebene.

↑ Parallelprojektion auf die yz -Ebene



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

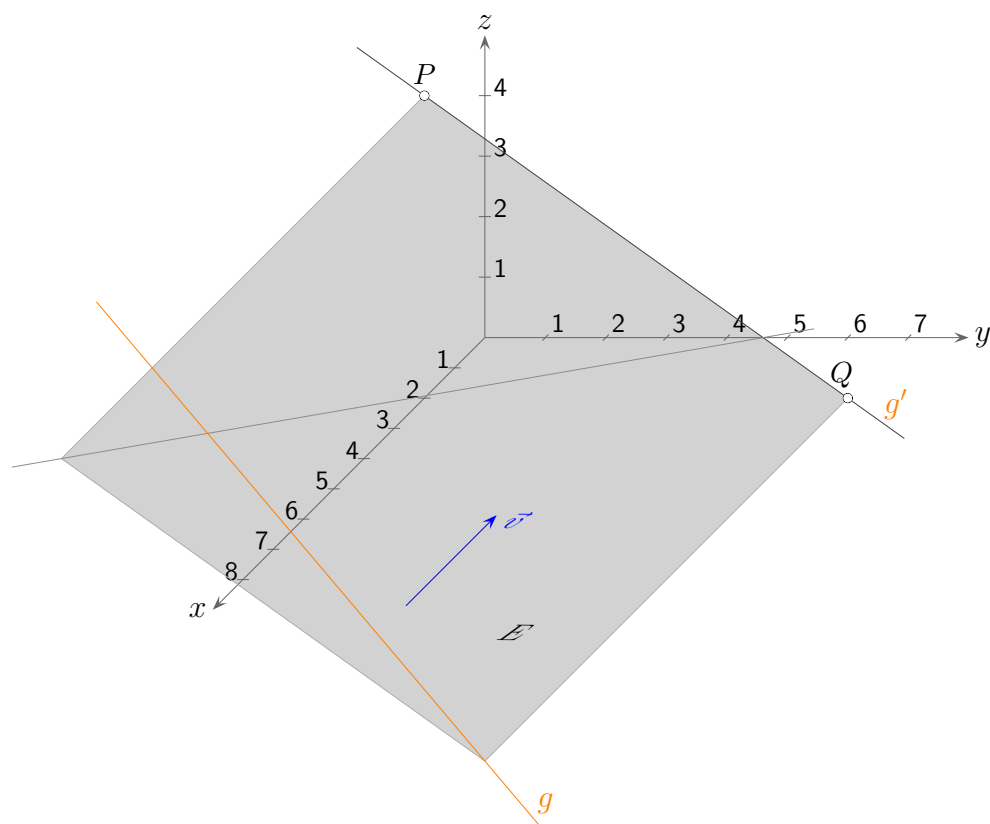
Ermittle das Bild der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Abbildungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad a = 1, b = 1$$

$$g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \quad g \text{ in die Abbildungsgleichung einsetzen und ausrechnen}$$

↑ Parallelprojektion auf die yz -Ebene



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

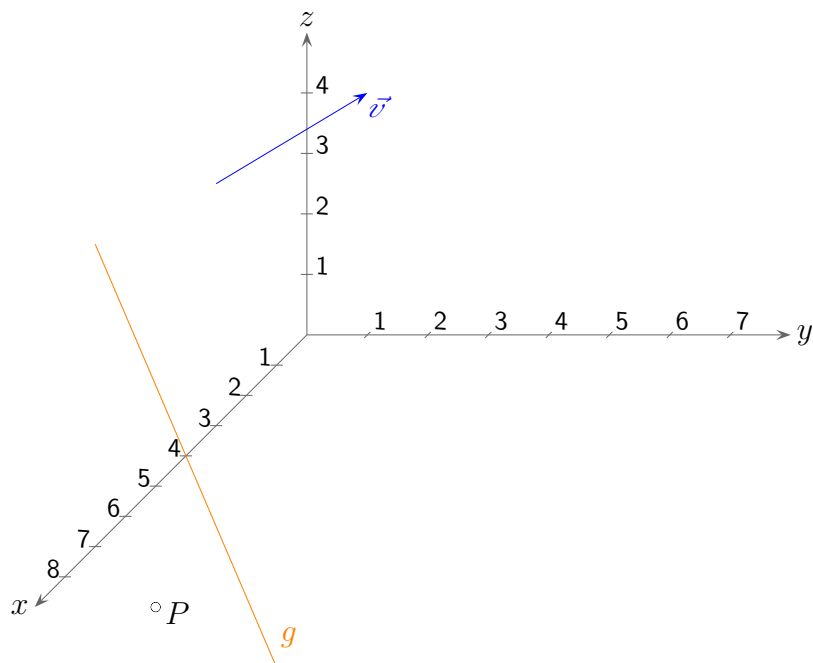
Alle Geraden in E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie E werden auf g' abgebildet.

E : $12x + 5y + 7z = 23$, Spurpunkte in der yz -Ebene: $P(0 \mid -1 \mid 4)$ und $Q(0 \mid 6 \mid -1)$

Beachte: $\vec{n} \perp \vec{v}$

Die Bildgerade einer Ebene E^* mit $\vec{n}^* \perp \vec{v}$ kann mit zwei Spurpunkten ermittelt werden, für $\vec{n}^* \not\perp \vec{v}$ ist das Bild die yz -Ebene.

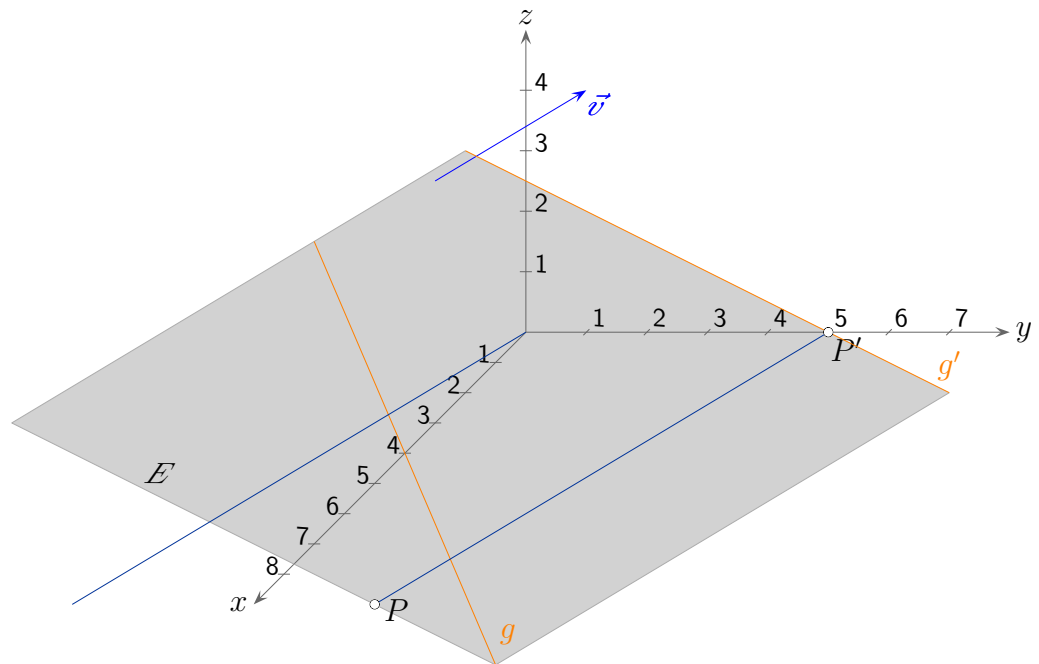
↑ Parallelprojektion auf die yz -Ebene



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

- Ermittle die Bilder von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $P(3 | -1 | -3)$.
- Welche Punkte werden auch auf P' (Bild von P) abgebildet?
- Ermittle die Normalenform der Ebene E , in der P und g liegen.
- Untersuche, ob das Bild von g die Spurgerade von E in der yz -Ebene ist.

↑ Parallelprojektion auf die yz -Ebene



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

- a) Ermittle die Bilder von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $P(3 \mid -1 \mid -3)$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 2, \quad b = 1, \quad g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P'(0 \mid 5 \mid 0)$$

- b) Welche Punkte werden auch auf P' (Bild von P) abgebildet? $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern der Abbildung}}$

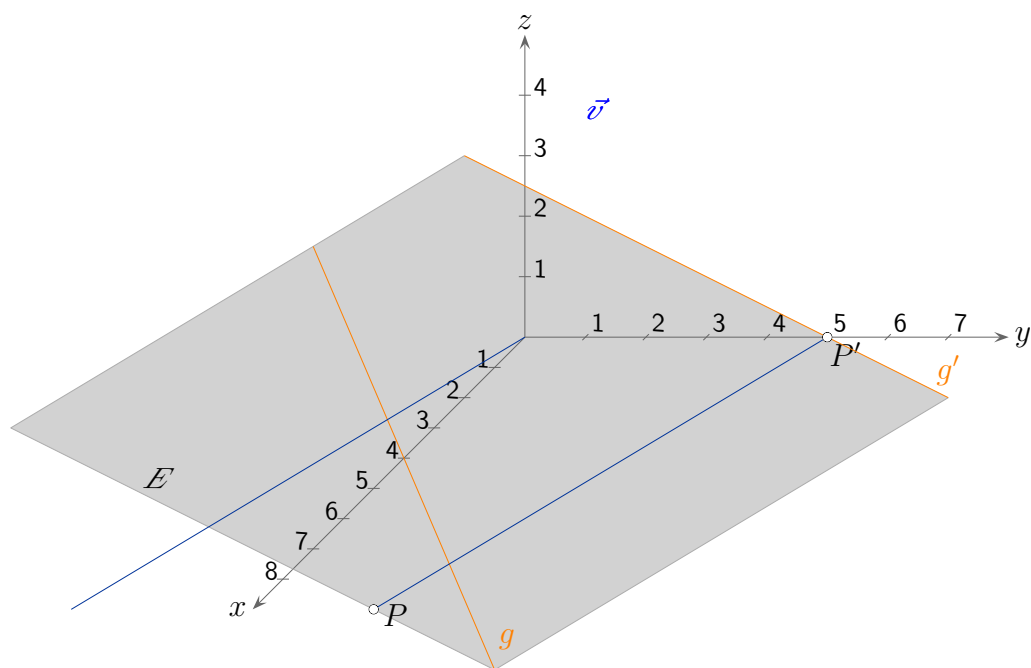
Der Kern einer Abbildung besteht aus allen Ortsvektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden.

- c) Ermittle die Normalenform der Ebene E , in der P und g liegen. $E: 4x + y + 2z = 5$

- d) Untersuche, ob das Bild von g die Spurgerade von E in der yz -Ebene ist. Beachte: $\vec{n} \perp \vec{v}$
Spurgerade g'

↑ Parallelprojektion auf die yz -Ebene

Die Parallelprojektion ist eine lineare Abbildung.



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

a) Ermittle die Bilder von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $P(3 \mid -1 \mid -3)$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 2, \quad b = 1, \quad g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P'(0 \mid 5 \mid 0)$$

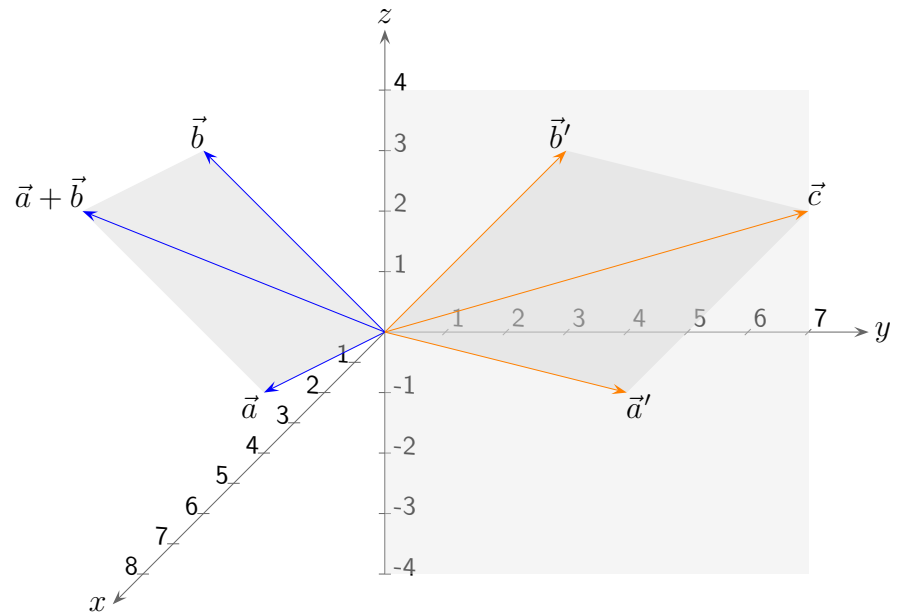
b) Welche Punkte werden auch auf P' (Bild von P) abgebildet? $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern der Abbildung}}$

Der Kern einer Abbildung besteht aus allen Ortsvektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden.

c) Ermittle die Normalenform der Ebene E , in der P und g liegen. $E: 4x + y + 2z = 5$

d) Untersuche, ob das Bild von g die Spurgerade von E in der yz -Ebene ist. Beachte: $\vec{n} \perp \vec{v}$
Spurgerade g'

↑ Parallelprojektion Einstieg



Für diesen einfachen, anschaulichen Einstieg sind keine umfangreichen Kenntnisse der Vektorrechnung erforderlich.

Notwendige Schritte, um die Abbildungsmatrix zu ermitteln:

a) Die Parallelprojektion ist eine lineare Abbildung.

Anschauliche Argumentation

Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über. Ein Parallelogramm wird auf ein Parallelogramm abgebildet, siehe Grafik.

Wir erhalten die Beziehungen $\vec{a}' + \vec{b}' = (\vec{a} + \vec{b})'$, $k\vec{a}' = (k\vec{a})'$.

math. Argumentation

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{a} + \lambda\vec{v} && \text{Projektionsrichtung durch } \vec{v} \text{ gegeben} \\ \vec{b}' &= \vec{b} + \mu\vec{v} && \implies \\ \vec{a}' + \vec{b}' &= \underbrace{\vec{a} + \vec{b} + (\lambda + \mu)\vec{v}}_{(\vec{a} + \vec{b})'} \end{aligned}$$

Um $(\vec{a} + \vec{b})'$ zu bilden, wird ein Vielfaches von \vec{v} zu \vec{a} addiert, so dass die Summe in der yz -Ebene liegt.

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= \vec{a} + \lambda\vec{v} && \implies \\ k\vec{a}' &= \underbrace{k\vec{a} + k\lambda\vec{v}}_{(k\vec{a})'} \end{aligned}$$

Um $(k\vec{a})'$ zu bilden, wird ein Vielfaches von \vec{v} zu $k\vec{a}$ addiert, so dass das Produkt in der yz -Ebene liegt.

b) $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)' = \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3$

Um das Bild eines Vektors \vec{a} zu ermitteln, können \vec{a} in Einheitsvektoren zerlegt, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, und die Bilder der Einheitsvektoren bestimmt werden, $\vec{a}' = a_1\vec{e}'_1 + a_2\vec{e}'_2 + a_3\vec{e}'_3$.

Die Vektoren $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bleiben fix, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$

Mit dieser Darstellung von \vec{v} ist das Bild von \vec{e}_1 offensichtlich, die Summe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \text{ liegt in der } yz\text{-Ebene.}$$

c) Abbildungsmatrix

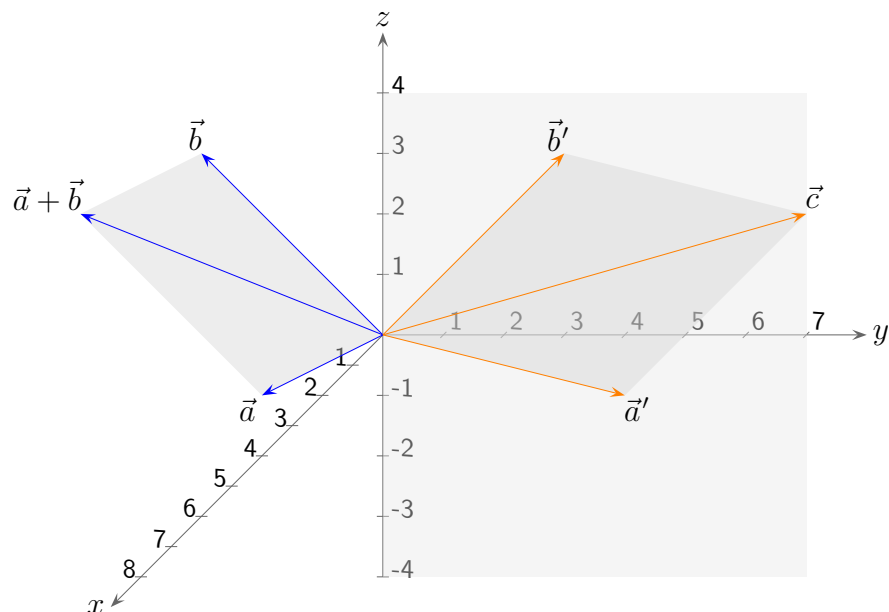
Somit gilt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 a + a_2 \\ a_1 b + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

oder kürzer, $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

↑ Parallelprojektion auf die yz -Ebene



Die Parallelprojektion ist eine lineare Abbildung.

Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über.

Ein Parallelogramm wird auf ein Parallelogramm abgebildet, siehe Grafik.

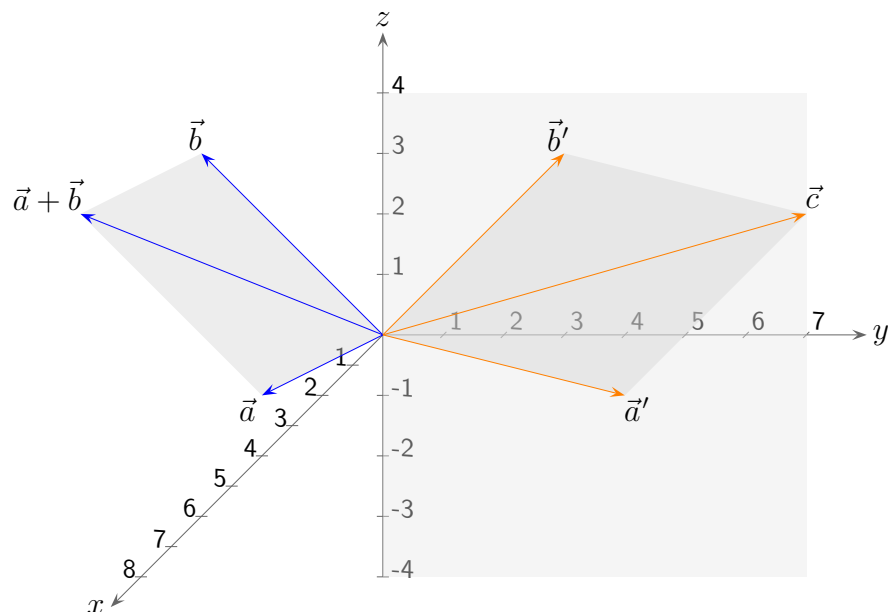
\vec{c} kann auf zwei Weisen ermittelt werden. Wir erhalten die Beziehung $\vec{a}' + \vec{b}' = (\vec{a} + \vec{b})'$.

Weiter gilt $k\vec{a}' = (k\vec{a})'$.

Projektionsrichtung sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Projiziere $A(4 \mid -1 \mid 5)$, $B(4 \mid 0 \mid 1)$ und $C(8 \mid -1 \mid 6)$ in die yz -Ebene.

↑ Parallelprojektion auf die yz -Ebene



Projektionsrichtung sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Projiziere $A(4 \mid -1 \mid 5)$, $B(4 \mid 0 \mid 1)$ und $C(8 \mid -1 \mid 6)$ in die yz -Ebene.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a = 1, b = -1/2$$

$$A'(0 \mid 3 \mid 3), B'(0 \mid 4 \mid -1), C'(0 \mid 7 \mid 2)$$

↑ Zentralprojektion

$$Z(-3 \mid 1 \mid 4)$$

$$A(4 \mid 5 \mid 0)$$

$$B(1 \mid 3 \mid 0)$$

$$C(4 \mid 1 \mid 0)$$

$$D(7 \mid 3 \mid 0)$$

$$A'(0 \mid 19/7 \mid 16/7), \quad A'(0 \mid 2,714 \mid 2,286)$$

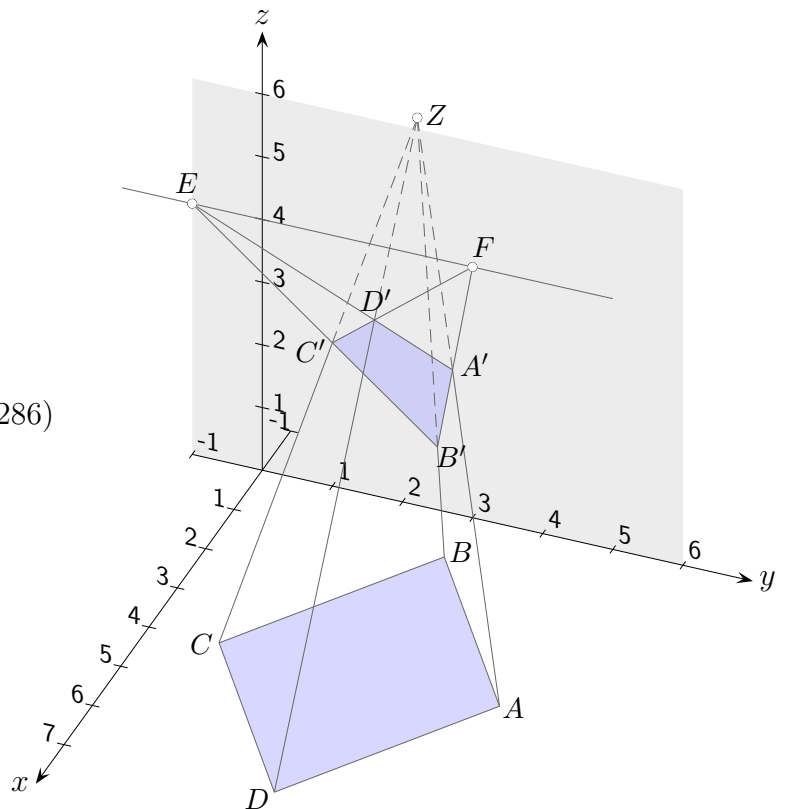
$$B'(0 \mid 2,5 \mid 1)$$

$$C'(0 \mid 1 \mid 16/7), \quad C'(0 \mid 1 \mid 2,286)$$

$$D'(0 \mid 8/5 \mid 14/5), \quad D'(0 \mid 1,6 \mid 2,8)$$

$$E(0 \mid -1 \mid 4)$$

$$F(0 \mid 3 \mid 4)$$



Sei $Z(a \mid b \mid c)$ das Projektionszentrum und die yz -Ebene die Bildebene.

Für die Berechnung des Bildpunktes P' eines Punktes $P(x \mid y \mid z)$ ist die Gerade

$$g: \vec{u} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{ZP}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix} \quad \text{mit der Bildebene zu schneiden.}$$

Die Schnittbedingung $u_1 = 0$ führt zu $\lambda = \frac{x}{a-x}$ und den Abbildungsgleichungen:

$$x' = 0$$

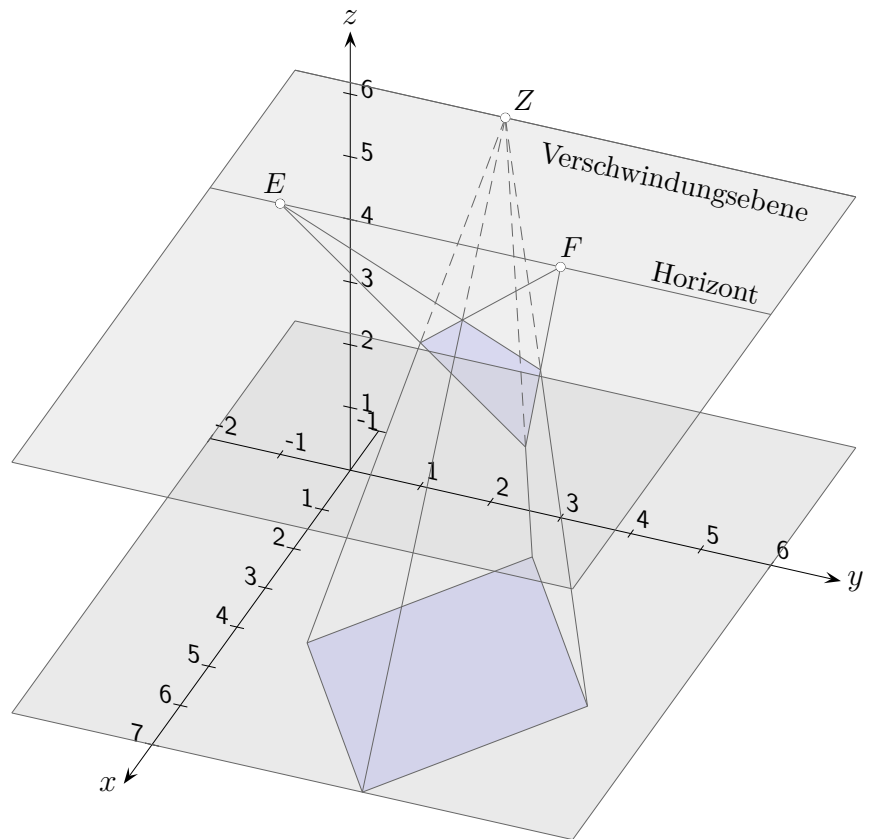
$$y' = \frac{ay - bx}{a - x}$$

$$z' = \frac{az - cx}{a - x}$$

A, B, C und D sind die Eckpunkte einer Raute.

Die Verlängerungen der Bilder ihrer parallelen Kanten schneiden sich jeweils in den *Fluchtpunkten* E und F .

↑ Zentralprojektion



Die *Verschwindungsebene* ist parallel zur xy -Ebene und enthält das Projektionszentrum Z . Die Schnittgerade von Verschwindungs- und Bildebene heißt *Horizont*. Anschaulich offensichtlich: Auf ihm liegen die Fluchtpunkte E und F . Die Eigenschaft einer Geraden, senkrecht zur xy -Ebene zu verlaufen, bleibt bei der Abbildung erhalten. Zusammengefasst: Eine parallele Geradenschar wird in eine Schar von Geraden abgebildet, die entweder ebenfalls parallel sind oder sich in einem Punkt auf dem Horizont schneiden.