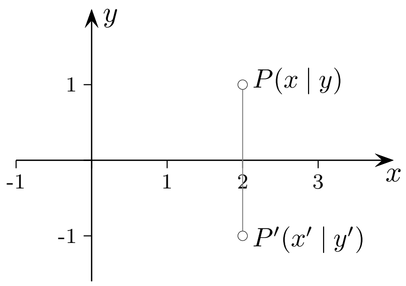
# ↑ Abbildungen der Ebene, Abbildungsmatrix

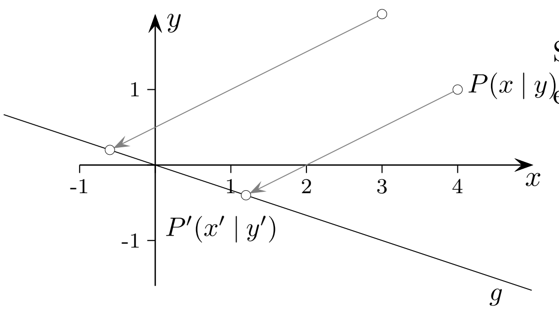
a) Spiegelung an der $x$-Achse




$$\begin{array}{l} x' = x \\ y' = -y \\ \hline x' = 1x \; + 0y \\ y' = 0x \; - 1y \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Parallelprojektion auf eine Ursprungsgerade $g$, Projektionsrichtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$



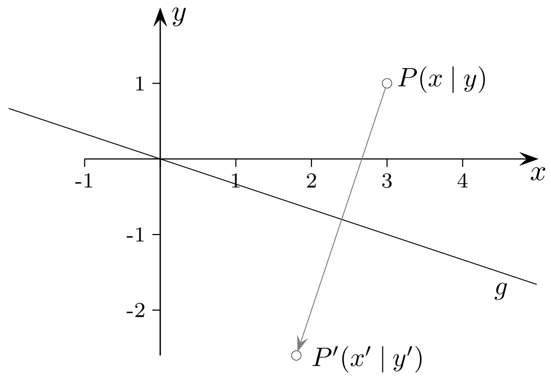

Schnitt der Geraden $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ und $g$: $x + 3y = 0$ ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (\tfrac{1}{5}x + \tfrac{3}{5}y)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bei einer orthogonalen Projektion auf die Gerade $g$ ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Die Abbildungsmatrix lautet: $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

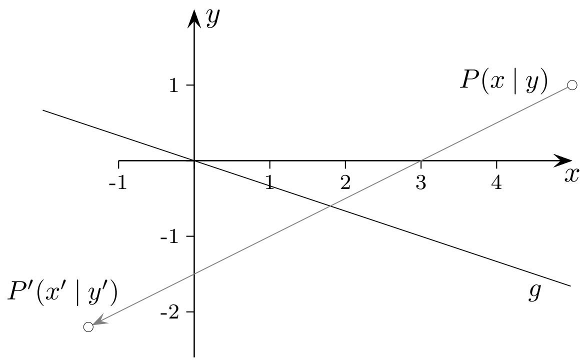
c) Spiegelung an einer Ursprungsgeraden $g$




Schnitt der Geraden $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\vec{n}$ und $g$: $x + 3y = 0$
ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y$,
siehe orthogonale Projektion. $t$ wird verdoppelt.
Es ist nicht nötig, den Schnittpunkt zu berechnen.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\left(\tfrac{1}{10}x + \tfrac{3}{10}y\right)\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

d) Schrägspiegelung an $g$, Projektionsrichtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

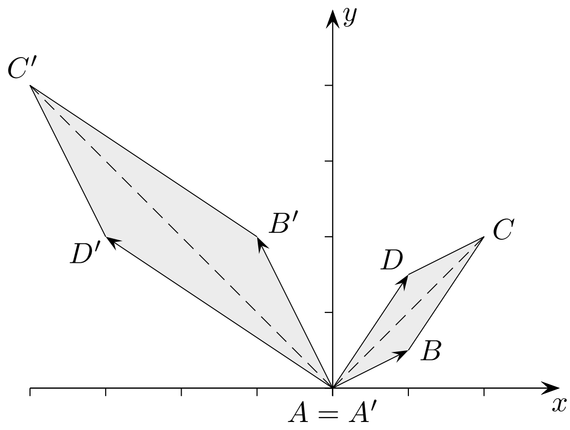



Schnitt der Geraden $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ und $g$: $x + 3y = 0$
ergibt (Einsetzen) $t = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\left(\tfrac{1}{5}x + \tfrac{3}{5}y\right)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -12 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

# ↑ Lineare Abbildungen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ dx + ey \end{pmatrix}$$




a) Die Bilder der Einheitsvektoren sind die Spalten der Abbildungsmatrix.

b) Durch Nachrechnen wird bestätigt: $A \cdot (\lambda\vec{x}) = \lambda(A \cdot \vec{x})$ und $A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y}$

Das Bild einer Summe zweier Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ kann auch als Summe
der beiden Bildvektoren $A \cdot \vec{x}$, $A \cdot \vec{y}$ erhalten werden (siehe obige Grafik).
Parallelogramme werden auf Parallelogramme abgebildet.

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

Sei $C$ durch $B \cdot (A \cdot \vec{x}) = C \cdot \vec{x}$ festgelegt. Dann gilt: $C = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$

$C$ wird als Produkt der Matrizen $B$ und $A$ aufgefasst: $C = B \cdot A$

Für die Bildung des Produkts gibt es eine einfache Merkregel:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

# ↑ Drehung um den Ursprung

Die Drehung ist eine lineare Abbildung, da die Linearitätsbedingungen anschaulich erfüllt sind. Daher ergibt sich die Abbildungsmatrix durch die Abbildung der Einheitsvektoren.

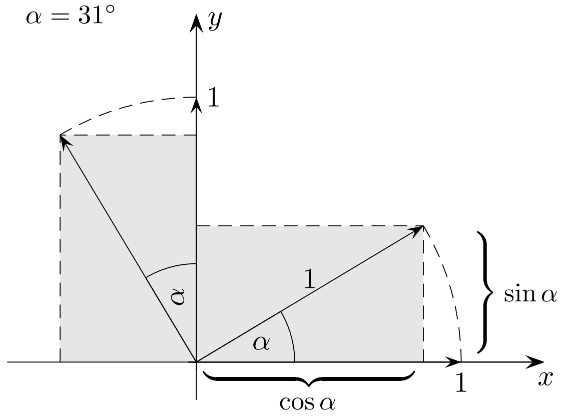
Erläutere:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}a\cos\alpha\\ a\sin\alpha\end{pmatrix}$$

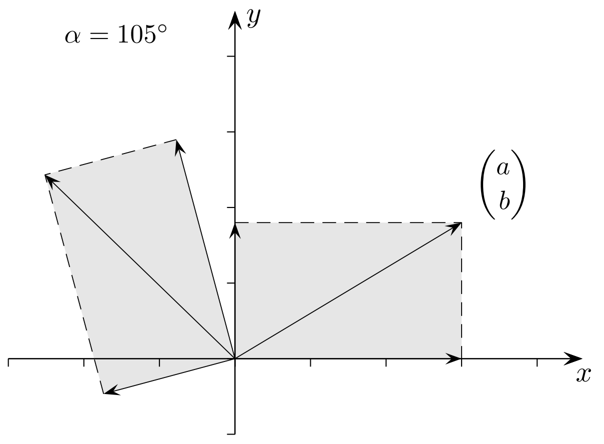
$$\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}-b\sin\alpha\\ b\cos\alpha\end{pmatrix}$$




$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \circlearrowleft \ ?$$

$$\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}a\cos\alpha\\ a\sin\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-b\sin\alpha\\ b\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \circlearrowleft \begin{pmatrix}a\cos\alpha - b\sin\alpha\\ a\sin\alpha + b\cos\alpha\end{pmatrix}$$




In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

# $\uparrow$ Parallelprojektion auf die $yz$-Ebene

Diese Abbildungsart ist rechnerisch einfach, wenn

die Projektionsrichtung durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ festgelegt wird.

Eine Gerade durch $P(x_0 \mid y_0 \mid z_0)$ mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ ist mit der $yz$-Ebene zu schneiden.
Ergebnis: $\lambda = x_0$
$P$ wird somit auf $P'(0 \mid a\,x_0 + y_0 \mid b\,x_0 + z_0)$ abgebildet, insbesondere $Q(1 \mid 0 \mid 0)$ auf $Q'(0 \mid a \mid b)$.

Die Abbildungsgleichungen lauten dann $(x_0' = 0)$:

$$\begin{aligned} y_0' &= ax_0 + y_0 \\ z_0' &= bx_0 + z_0 \end{aligned}$$

oder in Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ z_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

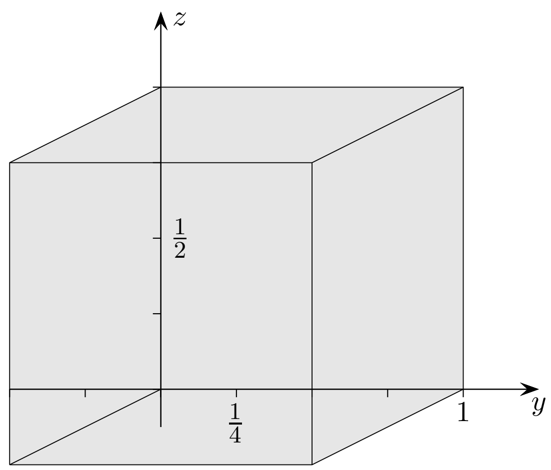
Die zweidimensionalen Spaltenvektoren der Matrix sind die Bilder
der dreidimensionalen Basisvektoren $\vec{e_i}$.

Betrachten wir nun die Abbildung des Einheitswürfels für $a = -\frac{1}{2}$ und $b = -\frac{1}{4}$.
Hierbei gilt z. B.:

$$E_1(1 \mid 0 \mid 0) \longrightarrow E_1'\big(0 \mid -\tfrac{1}{2} \mid -\tfrac{1}{4}\big)$$

$$E_2(1 \mid 1 \mid 0) \longrightarrow E_2'\big(0 \mid \tfrac{1}{2} \mid -\tfrac{1}{4}\big)$$

Insgesamt ergibt sich das Bild:




Diese Art der Berechnung von Punktkoordinaten für Schrägbilder ist seit 2018 im KC Ni enthalten.

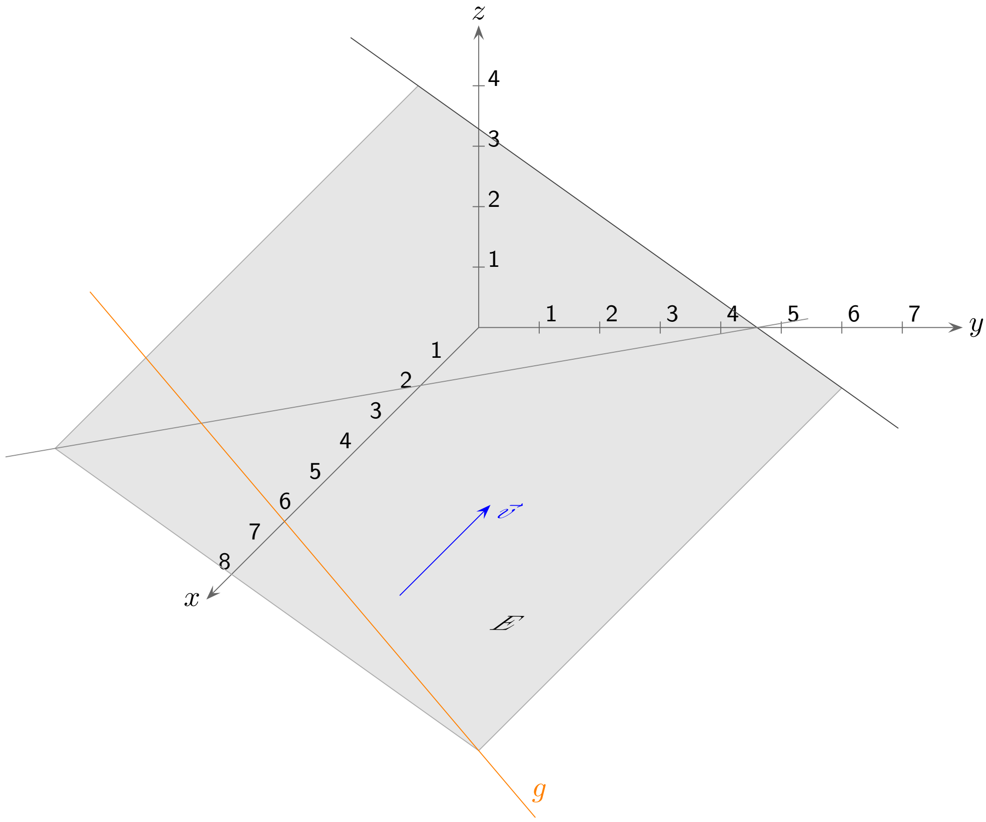
# ↑ Parallelprojektion auf eine Ebene

Wie lautet die Matrix $A$ der Projektion, die beliebige Raumpunkte $P(x \mid y \mid z)$ parallel in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $E:\ x - y + z = 0$ abbildet?

Schnitt der Gerade $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ mit $E$ ergibt (Einsetzen) $t = -x + y - z$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-x + y - z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\dots \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# $\uparrow$ Parallelprojektion auf die $yz$-Ebene

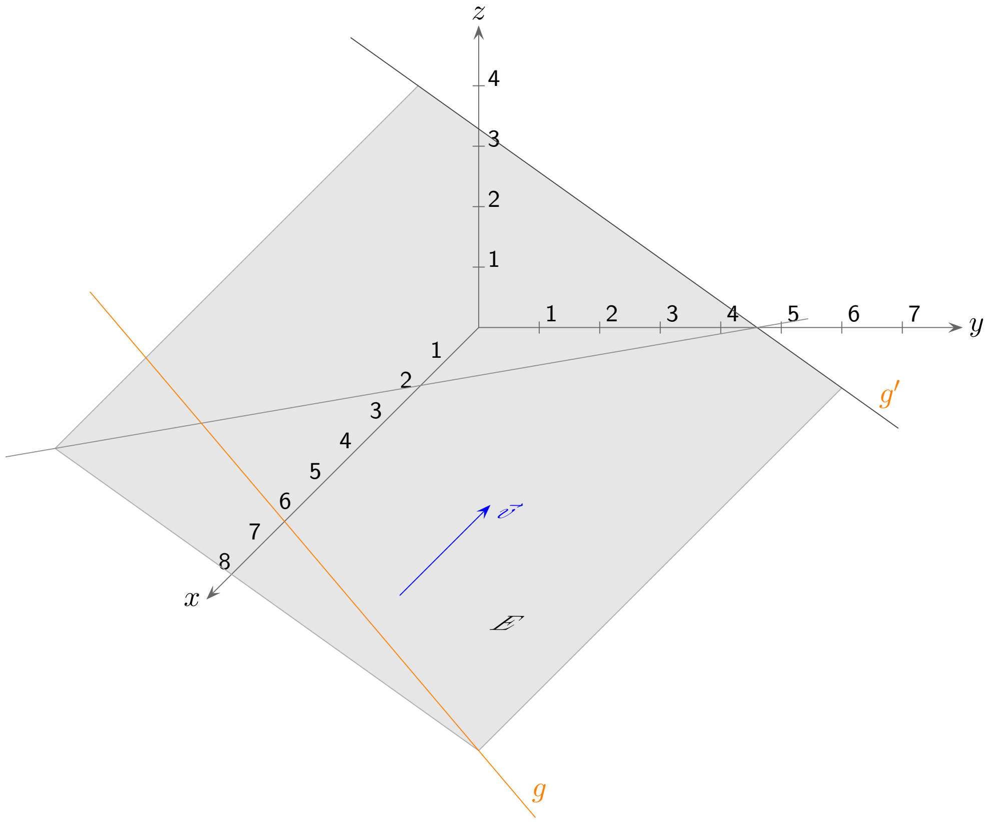



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

Ermittle das Bild der Geraden $g$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Die Grafik enthält die Spurgerade von $E$ in der $xy$-Ebene.

# $\uparrow$ Parallelprojektion auf die $yz$-Ebene




Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

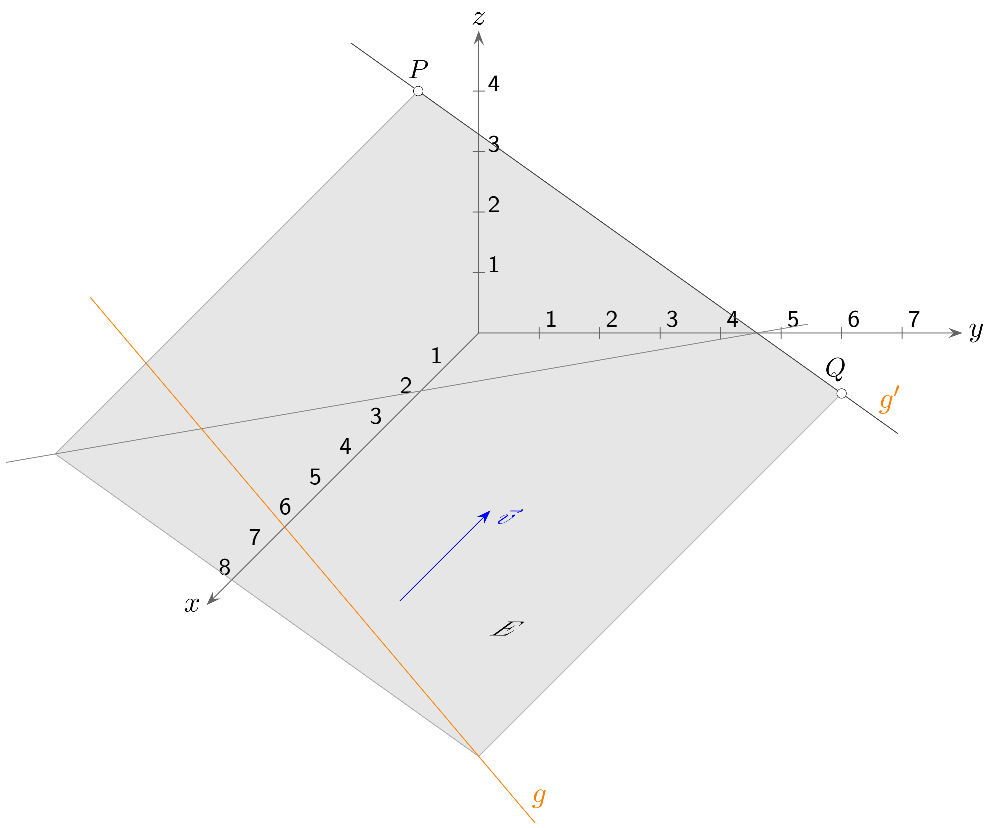
Ermittle das Bild der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Abbildungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ z_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad a = 1,\ b = 1$$

$g'\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $g$ in die Abbildungsgleichung einsetzen und ausrechnen

# ↑ Parallelprojektion auf die $yz$-Ebene




Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

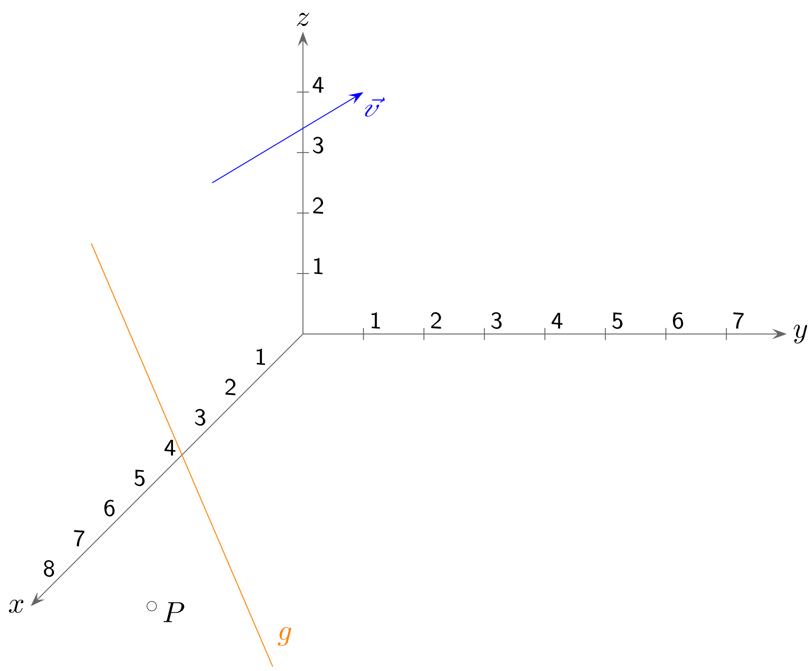
Alle Geraden in $E$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie $E$ werden auf $g'$ abgebildet.

$E$: $12x + 5y + 7z = 23$, Spurpunkte in der $yz$-Ebene: $P(0 \mid -1 \mid 4)$ und $Q(0 \mid 6 \mid -1)$

Beachte: $\vec{n} \perp \vec{v}$

Die Bildgerade einer Ebene $E^*$ mit $\vec{n}^* \perp \vec{v}$ kann mit zwei Spurpunkten ermittelt werden, für $\vec{n}^* \not\perp \vec{v}$ ist das Bild die $yz$-Ebene.

# ↑ Parallelprojektion auf die $yz$-Ebene




Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

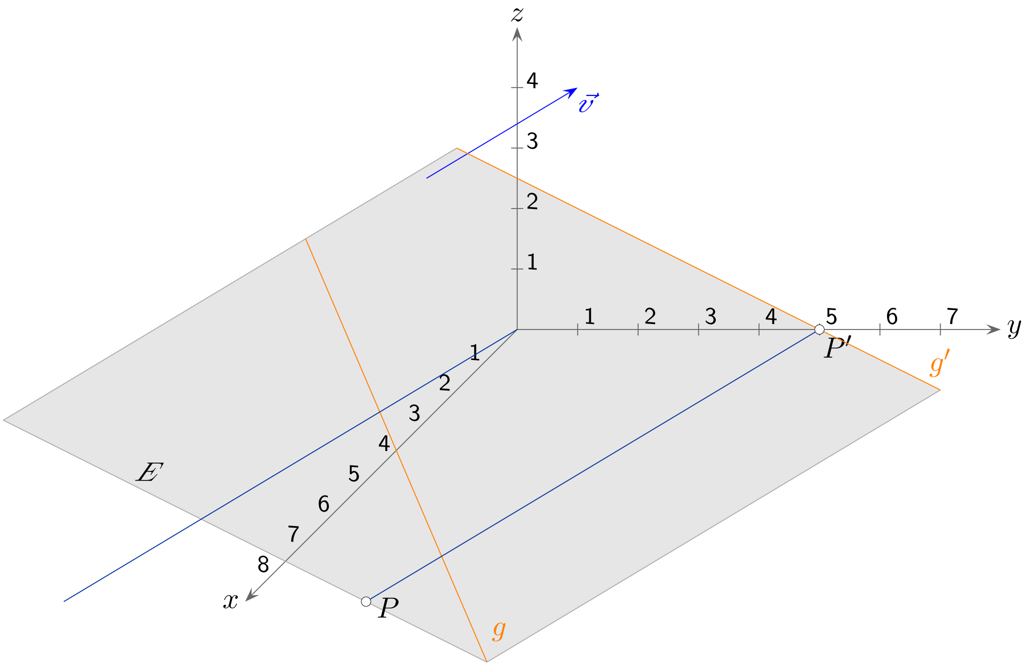
a) Ermittle die Bilder von $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $P(3\,|\,-1\,|\,-3)$.

b) Welche Punkte werden auch auf $P'$ (Bild von $P$) abgebildet?

c) Ermittle die Normalenform der Ebene $E$, in der $P$ und $g$ liegen.

d) Untersuche, ob das Bild von $g$ die Spurgerade von $E$ in der $yz$-Ebene ist.

# $\uparrow$ Parallelprojektion auf die $yz$-Ebene




Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt die Projektionsrichtung an.

a) Ermittle die Bilder von $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $P(3\,|\,-1\,|\,-3)$.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ a = 2,\ b = 1, \qquad g'\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P'(0\,|\,5\,|\,0)$$

b) Welche Punkte werden auch auf $P'$ (Bild von $P$) abgebildet? $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern der Abbildung}}$

Der Kern einer Abbildung besteht aus allen Ortsvektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden.

c) Ermittle die Normalenform der Ebene $E$, in der $P$ und $g$ liegen. $E\colon\ 4x + y + 2z = 5$

d) Untersuche, ob das Bild von $g$ die Spurgerade von $E$ in der $yz$-Ebene ist. Beachte: $\vec{n} \perp \vec{v}$

Spurgerade $g'$

# ↑ Lineares Gleichungssystem

Die Frage
Welche Punkte werden auf $Q(0 \mid 5 \mid 0)$ abgebildet?
führt zum Lösen eines Gleichungssystems der Art:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern der Abbildung}}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine sogenannte spezielle (einzelne) Lösung, die erraten werden kann.

$s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

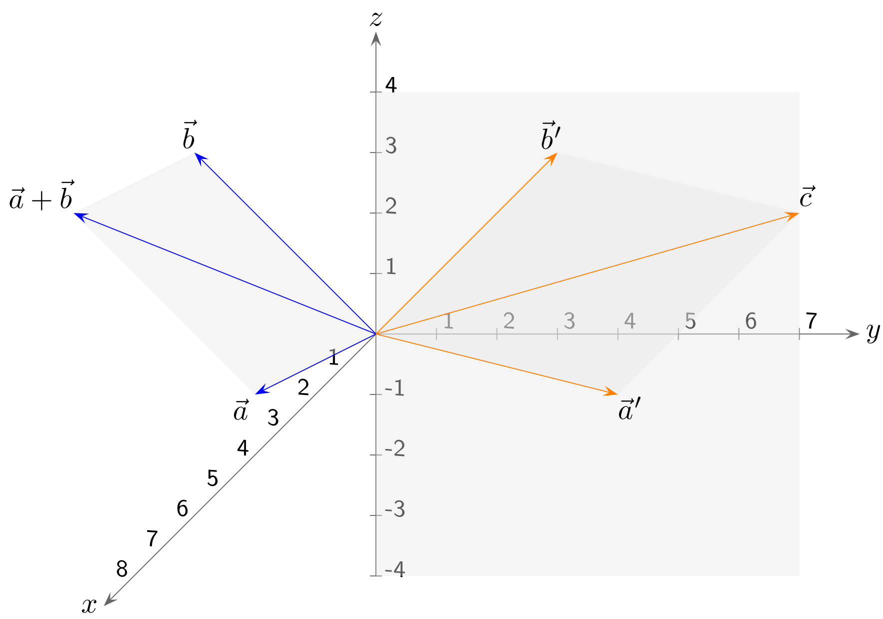
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

Bei linearen Gleichungssystemen setzt sich die allgemeine Lösung stets aus einer speziellen Lösung und der Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems zusammen.
Die Grafik auf der vorigen Seite veranschaulicht diesen Sachverhalt.
Die spezielle Lösung ist der Stützvektor, die Lösung des homogenen Gleichungssystems beinhaltet den Richtungsvektor.

Welche Punkte werden auf $R(0 \mid 1 \mid 1)$ abgebildet?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2-2z \\ -1+2z \\ z \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{spezielle Lösung}} + \underbrace{z\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern der Abbildung}}$$

# ↑ Parallelprojektion Einstieg




Für diesen einfachen, anschaulichen Einstieg sind keine umfangreichen Kenntnisse der Vektorrechnung erforderlich.

Notwendige Schritte, um die Abbildungsmatrix zu ermitteln:

a) Die Parallelprojektion ist eine lineare Abbildung.

Anschauliche Argumentation
Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über. Ein Parallelogramm wird auf ein Parallelogramm abgebildet, siehe Grafik.
Wir erhalten die Beziehungen $\vec{a}\,' + \vec{b}\,' = (\vec{a} + \vec{b})'$, $k\vec{a}\,' = (k\vec{a})'$.

math. Argumentation

$$\begin{aligned} \vec{a}\,' &= \vec{a} + \lambda\vec{v} & & \text{Projektionsrichtung durch } \vec{v} \text{ gegeben} \\ \vec{b}\,' &= \vec{b} + \mu\vec{v} \quad \Longrightarrow & & \\ \vec{a}\,' + \vec{b}\,' &= \underbrace{\vec{a} + \vec{b} + (\lambda + \mu)\vec{v}}_{(\vec{a}+\vec{b})'} & & \end{aligned}$$

Um $(\vec{a} + \vec{b})'$ zu bilden, wird ein Vielfaches von $\vec{v}$ zu $\vec{a}$ addiert, so dass die Summe in der $yz$-Ebene liegt.

$$\begin{aligned} \vec{a}\,' &= \vec{a} + \lambda\vec{v} \quad \Longrightarrow \\ k\vec{a}\,' &= \underbrace{k\vec{a} + k\lambda\vec{v}}_{(k\vec{a})'} \end{aligned}$$

Um $(k\vec{a})'$ zu bilden, wird ein Vielfaches von $\vec{v}$ zu $k\vec{a}$ addiert, so dass das Produkt in der $yz$-Ebene liegt.

b) $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)' = \vec{e}_1\,' + \vec{e}_2\,' + \vec{e}_3\,'$

Um das Bild eines Vektors $\vec{a}$ zu ermitteln, können $\vec{a}$ in Einheitsvektoren zerlegt, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, und die Bilder der Einheitsvektoren bestimmt werden, $\vec{a}\,' = a_1\vec{e}_1\,' + a_2\vec{e}_2\,' + a_3\vec{e}_3\,'$.

Die Vektoren $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bleiben fix, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$

Mit dieser Darstellung von $\vec{v}$ ist das Bild von $\vec{e}_1$ offensichtlich, die Summe

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ liegt in der $yz$-Ebene.

c) Abbildungsmatrix

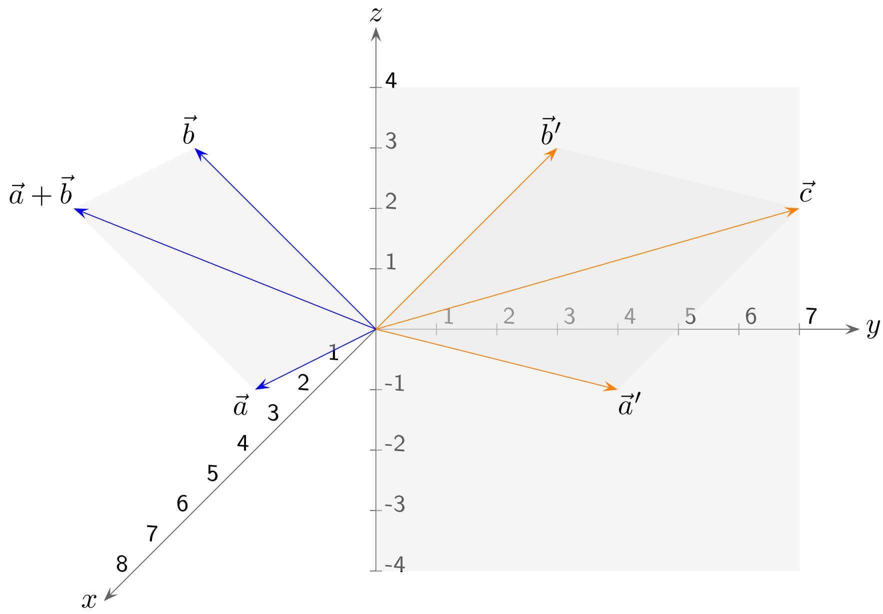
Somit gilt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longrightarrow a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 a + a_2 \\ a_1 b + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

oder kürzer, $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

# $\uparrow$ Parallelprojektion auf die $yz$-Ebene

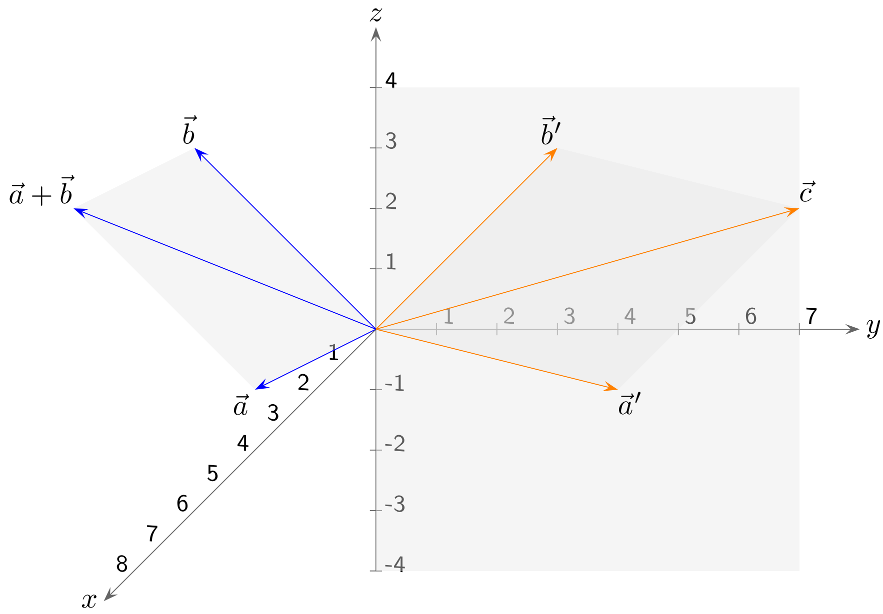



Die Parallelprojektion ist eine lineare Abbildung.
Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über.
Ein Parallelogramm wird auf ein Parallelogramm abgebildet, siehe Grafik.
$\vec{c}$ kann auf zwei Weisen ermittelt werden. Wir erhalten die Beziehung $\vec{a}' + \vec{b}' = (\vec{a} + \vec{b})'$.
Weiter gilt $k\vec{a}' = (k\vec{a})'$.

Projektionsrichtung sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Projiziere $A(4 \mid -1 \mid 5)$, $B(4 \mid 0 \mid 1)$ und $C(8 \mid -1 \mid 6)$ in die $yz$-Ebene.

# ↑ Parallelprojektion auf die $yz$-Ebene




Projektionsrichtung sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Projiziere $A(4 \,|\, -1 \,|\, 5),\ B(4 \,|\, 0 \,|\, 1)$ und $C(8 \,|\, -1 \,|\, 6)$ in die $yz$-Ebene.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a = 1,\ b = -1/2$$

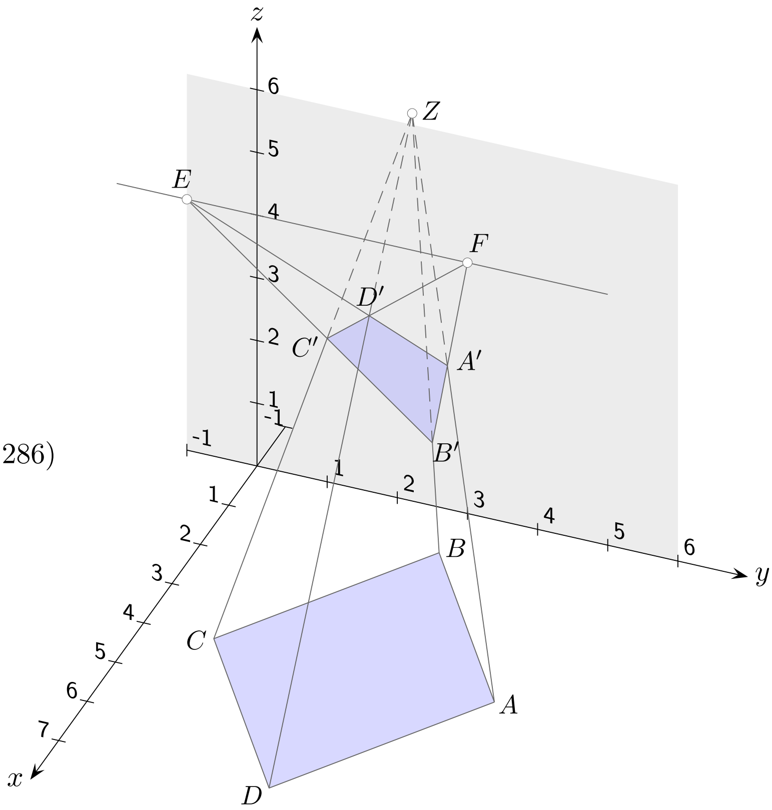
$$A'(0 \,|\, 3 \,|\, 3),\ B'(0 \,|\, 4 \,|\, -1),\ C'(0 \,|\, 7 \,|\, 2)$$

# ↑ Zentralprojektion

$Z(-3 \mid 1 \mid 4)$
$A(4 \mid 5 \mid 0)$
$B(1 \mid 3 \mid 0)$
$C(4 \mid 1 \mid 0)$
$D(7 \mid 3 \mid 0)$

$A'(0 \mid 19/7 \mid 16/7),\ A'(0 \mid 2{,}714 \mid 2{,}286)$
$B'(0 \mid 2{,}5 \mid 1)$
$C'(0 \mid 1 \mid 16/7),\ C'(0 \mid 1 \mid 2{,}286)$
$D'(0 \mid 8/5 \mid 14/5),\ D'(0 \mid 1{,}6 \mid 2{,}8)$

$E(0 \mid -1 \mid 4)$
$F(0 \mid 3 \mid 4)$




Sei $Z(a \mid b \mid c)$ das Projektionszentrum und die $yz$-Ebene die Bildebene.
Für die Berechnung des Bildpunktes $P'$ eines Punktes $P(x \mid y \mid z)$ ist die Gerade

$$g:\ \vec{u} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,\overrightarrow{ZP}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}$$ mit der Bildebene zu schneiden.

Die Schnittbedingung $u_1 = 0$ führt zu $\lambda = \frac{x}{a-x}$ und den Abbildungsgleichungen:

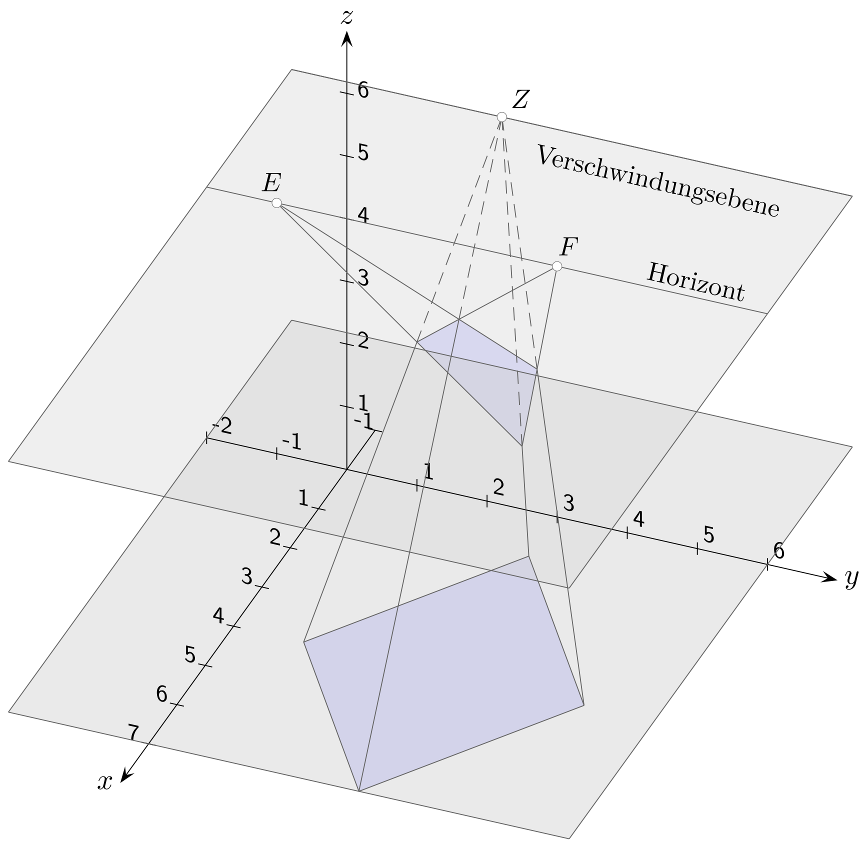
$$x' = 0$$

$$y' = \frac{ay-bx}{a-x}$$

$$z' = \frac{az-cx}{a-x}$$

$A$, $B$, $C$ und $D$ sind die Eckpunkte einer Raute.
Die Verlängerungen der Bilder ihrer parallelen Kanten schneiden sich jeweils in den *Fluchtpunkten* $E$ und $F$.

# ↑ Zentralprojektion




Die *Verschwindungsebene* ist parallel zur $xy$-Ebene und enthält das Projektionszentrum $Z$.
Die Schnittgerade von Verschwindungs- und Bildebene heißt *Horizont*.
Anschaulich offensichtlich: Auf ihm liegen die Fluchtpunkte $E$ und $F$.
Die Eigenschaft einer Geraden, senkrecht zur $xy$-Ebene zu verlaufen, bleibt bei der Abbildung erhalten. Zusammengefasst: Eine parallele Geradenschar wird in eine Schar von Geraden abgebildet, die entweder ebenfalls parallel sind oder sich in einem Punkt auf dem Horizont schneiden.