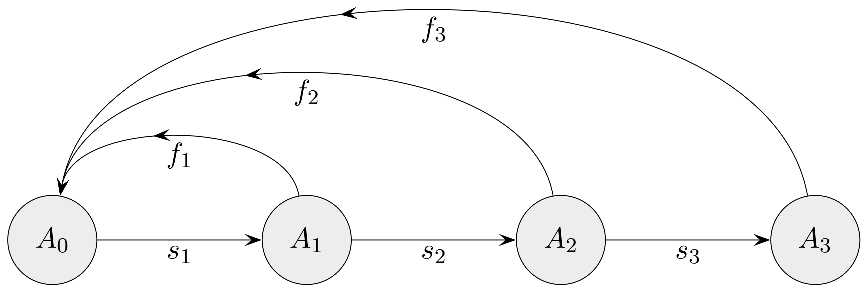
Populationsentwicklung

Lewis (1942) und Leslie (1945) entwickelten ein Modell, mit dem die Entwicklung einer Population unter Einbeziehung der Altersstruktur untersucht werden kann.
Die Population wird z.B. in 4 Altersgruppen (A_i) unterteilt und eine Anfangsverteilung festgelegt. Pro Zeitspanne (z. B. 1 Jahr) wechselt ein Anteil (s_i survival rate) jeder Altersgruppe mit Ausnahme von A_3 in die nächstältere.
Jede Altersgruppe bringt einen Anteil (f_i fertility rate) neuer Individuen (ganzzahlig) hervor.



Mit der Übergangsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Anfangsverteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

wird das Modell vollständig erfasst.

Der Vektor $L\,\vec{x}$ enthält die Anzahlen je Altersgruppe nach einer Zeitspanne,
nach zwei Zeitspannen sind es $L(L\,\vec{x})$, nach dreien $L(L(L\,\vec{x})) = L^3\vec{x}$, usw.

Populationsentwicklung optional

Um Weiteres einfach zu erläutern, betrachten wir nun ein etwas geändertes Modell mit lediglich zwei Altersgruppen
und der Übergangsmatrix $L = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix}$ und der Anfangsverteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

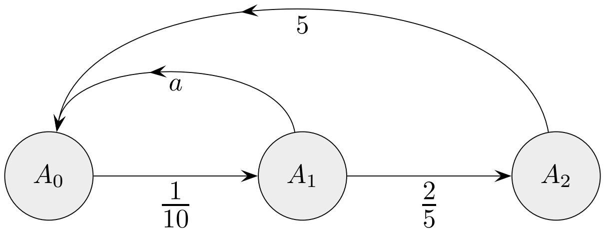
Die langfristigen Entwicklungen können ermittelt werden, indem der Vektor der Anfangsverteilung als Linearkombination der Eigenvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ der Matrix L dargestellt wird.

Sei also $\vec{x} = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
L\,\vec{x} &= L(c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2}) \\
&= c_1 L\vec{e_1} + c_2 L\vec{e_2} \\
&= c_1\lambda_1\vec{e_1} + c_2\lambda_2\vec{e_2} \qquad \text{mit den Eigenwerten } \lambda_1,\ \lambda_2 \\
L(L\,\vec{x}) &= L(c_1\lambda_1\vec{e_1} + c_2\lambda_2\vec{e_2}) \\
&= c_1\lambda_1^2\vec{e_1} + c_2\lambda_2^2\vec{e_2} \\
L^n\,\vec{x} &= c_1\lambda_1^n\vec{e_1} + c_2\lambda_2^n\vec{e_2} \\
&= \lambda_1^n(c_1\vec{e_1} + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\vec{e_2}) \\
L^n\,\vec{x} &\approx \lambda_1^n c_1\vec{e_1} \text{ falls } \lambda_2 < \lambda_1
\end{aligned}$$

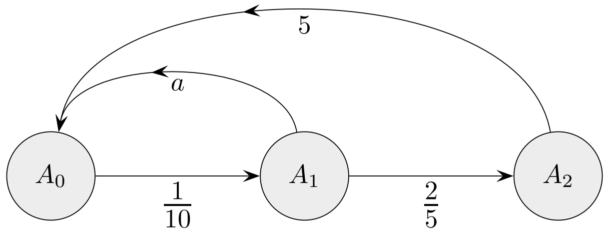
Der größte Eigenwert bestimmt langfristig die Entwicklung.

Insektenpopulation



Die Population einer Insektenart entwickelt sich in drei Stufen.
Untersuchen Sie ohne GTR, für welches a es eine stabile Verteilung gibt.

Insektenpopulation



Die Population einer Insektenart entwickelt sich in drei Stufen.
Untersuchen Sie ohne GTR, für welches a es eine stabile Verteilung gibt.

Die Übergangsmatrix lautet:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a & 5 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Bedingung $L\vec{x} = \vec{x}$ führt zum Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} ay + 5z &= x \\ \frac{1}{10}x &= y \\ \frac{2}{5}y &= z \end{aligned}$$

Für $x \neq 0$ folgt (durch Einsetzen) $a = 8$.

Populationsentwicklung, Caswell 2001

Zur Vorhersage der Größe und Altersstruktur einer Tierpopulation (z. B. Seeschildkröten) betrachten wir folgendes Populationsmodell. Dabei berücksichtigen wir nur die weiblichen Tiere, teilen deren Leben in vier Stadien ein, Alter in Jahren (Eier und Neugeschlüpfte (< 1), Jungtiere ($1 - 21$), Erstbrüter (22), Reife Brüter ($23 - 54$)) und nehmen vereinfachend an, dass die jährliche Anzahl Eier und die jährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb jedes Stadiums konstant sind.

Die Übergangsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ q_1 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

und die Anfangsverteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

erfassen das Modell.

Wie unterscheidet sich diese Matrix von der bisher verwendeten Leslie-Matrix?
Deuten Sie die Einträge.

Wie entwickelt sich die Zahl der erwachsenen Seeschildkröten innerhalb der nächsten 20 Jahre?
Sollten eher Schutzmaßnahmen für Neugeschlüpfte oder für Jungtiere ergriffen werden, um diese Entwicklung zu beeinflussen?

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 127 & 79 \\ 0{,}68 & 0{,}69 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}80 & 0{,}81 \end{pmatrix}$$

$$\text{Anfangsverteilung} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^5 \\ 3 \cdot 10^5 \\ 600 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

Langfristige Entwicklung und Zeilensummen

In vielen Fällen reicht für eine Prognose ein einfaches Kriterium aus.

Aufg.
Zeige anhand einer 2×2-Übergangsmatrix ohne negative Elemente Folgendes:

Sind alle Zeilensummen

a) kleiner als Eins, zerfällt ($\vec{v_n} \longrightarrow \vec{0}$) der Prozess,

b) größer als Eins, expandiert der Prozess.

Gehe zunächst von einem Startvektor mit gleichen Komponenten aus.
Betrachte dann die weitere Entwicklung des jeweils größten, bzw. kleinsten Elements.

Es liegt die Vermutung nahe, dass der Prozess konvergiert, falls alle Zeilensummen gleich Eins sind.
Dies kann wie die Konvergenz stochastischer Matrizen bewiesen werden. Hierbei muss vorausgesetzt werden, dass eine Potenz der Übergangsmatrix nur positive Elemente enthält, d. h. von jedem Zustand muss jeder andere Zustand erreichbar sein.
Falls die Zeilensummen nicht einheitlich sind, hilft das Folgende weiter:

Langfristige Entwicklung und Eigenwerte

Wir gehen davon aus, dass der Startvektor $\vec{v_0}$ eine Linearkombination der Eigenvektoren ist.
Offensichtlich gelten die Zusammenhänge:

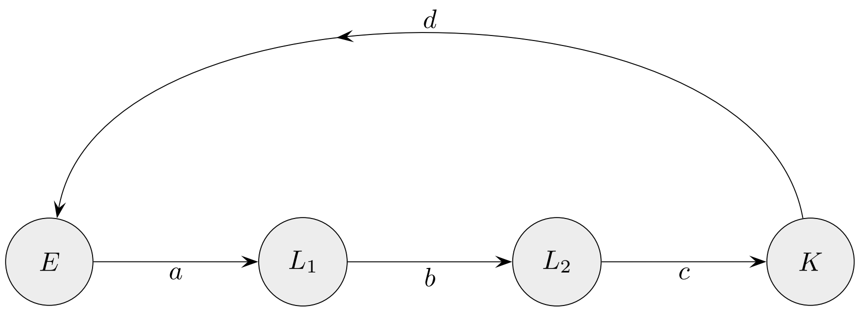
Der Prozess

a) zerfällt, falls alle Eigenwerte kleiner als Eins sind,

b) konvergiert, falls ein Eigenwert Eins ist, die übrigen kleinergleich Eins,

c) expandiert, falls ein Eigenwert größer als Eins ist.

Käferpopulation



Das Diagramm beschreibt ein Entwicklungsmodell einer aus Eiern, Larven (zwei verschiedene Stadien) und Käfern bestehenden Population, z. B. bei jährlicher Änderung.

Die Übergangsmatrix lautet: $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$,

z. B. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Anfangsverteilung sei: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 900 \\ 180 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Untersuche die weitere Entwicklung.

Käferpopulation

Es gilt: $$\mathcal{A}^4 = \begin{pmatrix} abcd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & abcd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abcd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abcd \end{pmatrix} = abcd \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^8 = (abcd)^2 \mathcal{E}\,, \quad \text{usw.}$$

Was bedeuten

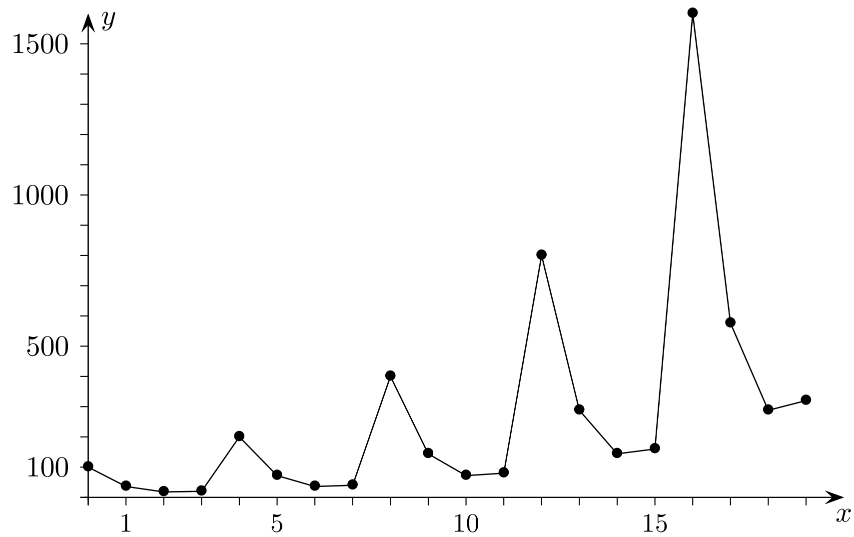
a) $abcd = 2$

b) $abcd = 1$
$\mathcal{A}$ nennt man dann zyklisch. Eine Potenz von $\mathcal{A}$ ist gleich der Einheitsmatrix.

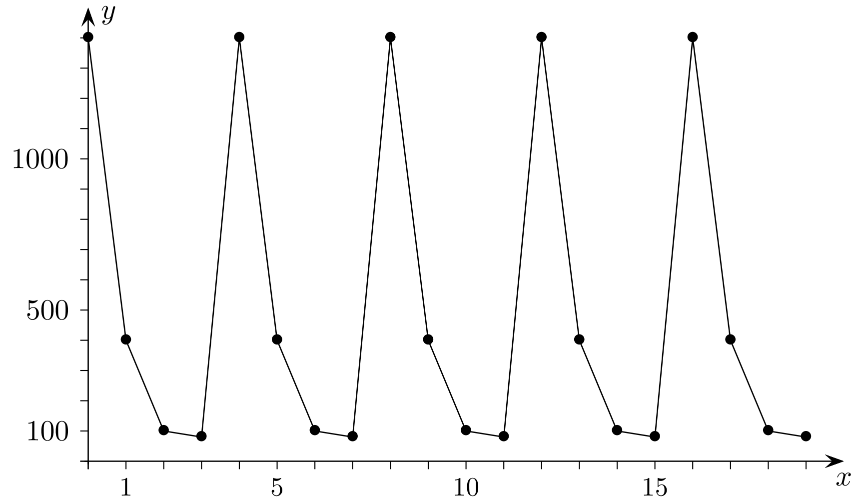
c) $abcd = 0{,}5$?

Käferpopulation,   typische Entwicklungen

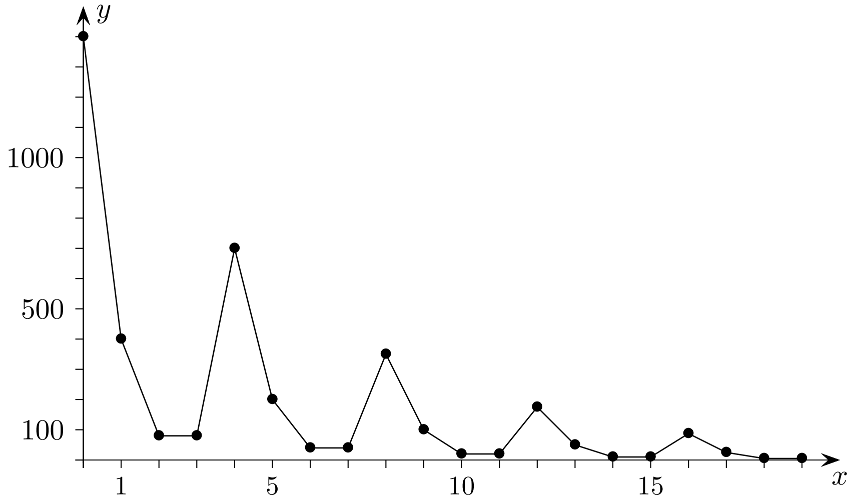
a)



b)



c)



Käferpopulation

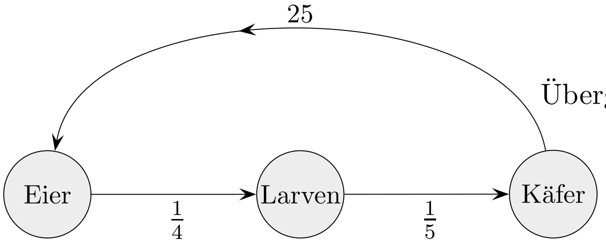
Ein Käferweibchen (einer bestimmten Art) legt 25 Eier und stirbt bald danach.
Nach einem Jahr haben sich ein Viertel der Eier zu Larven entwickelt. Nach einem weiteren Jahr werden ein Fünftel der Larven zu Käfern, die ein Jahr später wieder Eier legen.
Die Startpopulation besteht aus 1000 Eiern, 150 Larven und 100 Käferweibchen.

a) Stellen Sie die Entwicklung des weiblichen Käferbestandes für die folgenden 9 Jahre grafisch dar.

b) Ermitteln Sie eine Funktion, die die langfristige Entwicklung des weiblichen Käferbestandes aussagekräftig beschreibt.

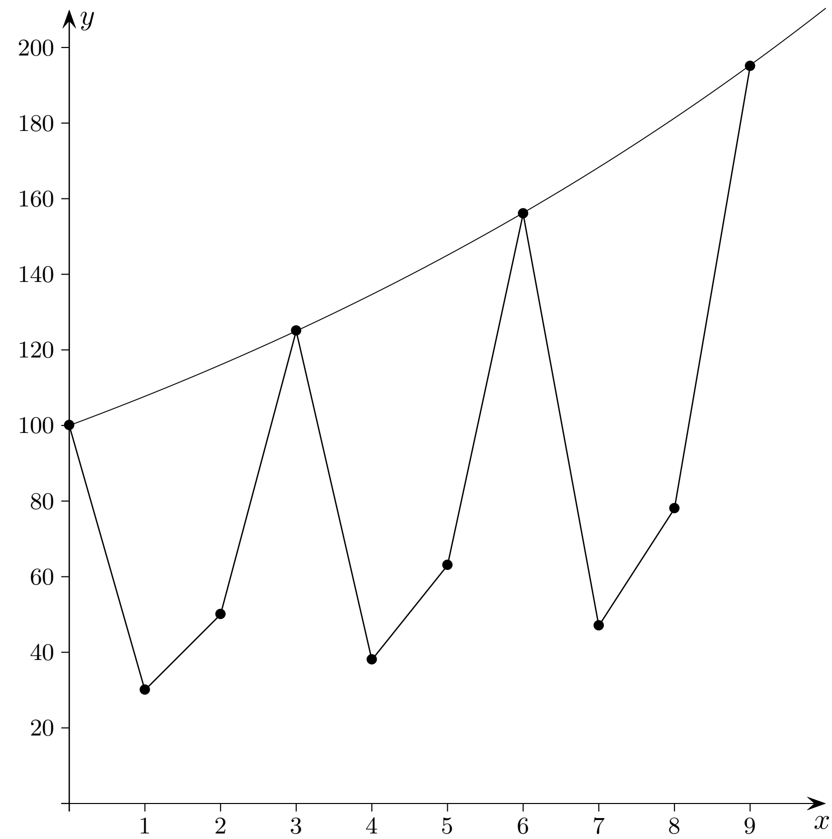
c) Könnten durch äußere Einflüsse die Übergangsraten zwischen den einzelnen Stadien so beeinflusst werden, dass es zu einer periodischen Populationsentwicklung kommt?

Käferpopulation



Übergangsmatrix

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$



$f(x) = 100 \cdot 1{,}25^{\frac{x}{3}}$

Der Faktor $1{,}25 = 25 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ (siehe Exponentialfunktionen, Klasse 9) beschreibt das exponentielle 3-Jahres-Käfer-Wachstum und kann direkt dem Diagramm entnommen werden.

Der Exponent $\frac{x}{3}$ berücksichtigt den 3-Jahres-Zyklus.

Käferpopulation

$$\mathcal{L}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = abc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L}^6 = (abc)^2 \mathcal{E}\,, \ \ \text{usw.}$$

Populationsentwicklung

Bei einer Säugetierart können die jährlichen Änderungen in einer aus drei Alterstufen A_1, A_2 und A_3 bestehenden Population durch die folgende Übergangsmatrix beschrieben werden:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

a, b Überlebensraten, c Vermehrungsrate, $c > 0$
$0 < a, b \leq 1$

a) Bestimmen Sie a, b und c so, dass sich die Population mit der Startverteilung von 1000 Tieren in A_1, 500 Tieren in A_2 und 100 Tieren in A_3 nach zwei Jahren reproduziert.

b) Gibt es Werte a, b und c, so dass sich eine beliebige Startverteilung nach jeweils drei Jahren um 20 % vergrößert?

a) Bedingung:

$$\begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} = \mathcal{M}^2 \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} 1000 &= 500bc \\ 500 &= 100ac \\ 100 &= 1000ab \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{5}, \quad c = 10$$

b) Bedingung: $abc = 1{,}2$

Insektenpopulation

Die Entwicklung einer Insektenpopulation verlaufe in vier Stufen:
Eier, Larven 1, Larven 2 und Insekten. Eine Entwicklungsstufe dauert eine Woche und es gilt:

- 50 % der Eier werden zu Larven 1
- 20 % der Larven 1 werden zu Larven 2
- 25 % der Larven 2 werden zu Insekten
- Jedes Insekt legt 50 Eier

a) Zeichnen Sie das entsprechende Übergangsdiagramm und geben Sie die Leslie-Matrix an, die diesen Prozess beschreibt.

b) Gegeben sei eine Population, die jeweils 1000 Eier, 1000 Larven 1, 1000 Larven 2 und 1000 Insekten enthält. Wie hat sich diese Population nach zwei Wochen verändert?

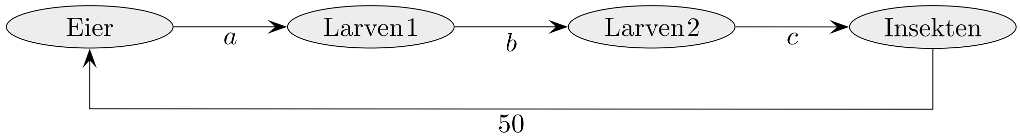
c) Beurteilen Sie, wie sich die Zahl der Insekten langfristig entwickelt.

d) Wie viele Eier müsste ein Insekt legen, damit die Insektenpopulation auf lange Sicht begrenzt bleibt und nicht ausstirbt?

e) Nehmen Sie an, 50 % aller in einer aktuellen Woche lebenden Insekten würden eine weitere Woche leben und auch in dieser wieder 50 Eier legen. Wie verändern sich das Übergangsdiagramm, die Leslie-Matrix und die Antwort auf die Fragestellung unter b)?

Insektenpopulation

Die Entwicklung einer Insektenpopulation verlaufe in vier Stufen:
Eier, Larven 1, Larven 2 und Insekten. Eine Entwicklungsstufe dauert eine Woche und es gilt:
$a = 50\,\%,\ b = 20\,\%,\ c = 25\,\%$



a) Zeichnen Sie das entsprechende Übergangsdiagramm und geben Sie die Leslie-Matrix an, die diesen Prozess beschreibt.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

b) Gegeben sei eine Population, die jeweils 1000 Eier, 1000 Larven 1, 1000 Larven 2 und 1000 Insekten enthält. Wie hat sich diese Population nach zwei Wochen verändert?

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 12500 \\ 25000 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

c) Beurteilen Sie, wie sich die Zahl der Insekten langfristig entwickelt.

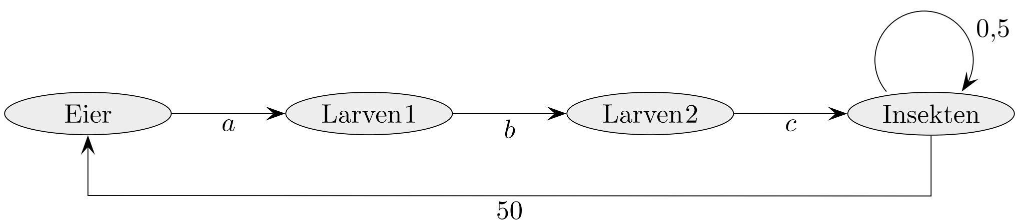
$$\mathcal{A}^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 50\ \mathcal{E} = 1{,}25\ \mathcal{E}$$

Die Zahl der Insekten wird demnach langfristig wachsen.

d) Wie viele Eier müsste ein Insekt legen, damit die Insektenpopulation auf lange Sicht begrenzt bleibt und nicht ausstirbt?

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot x = 1, \quad x = 40$$

e) Nehmen Sie an, 50 % aller in einer aktuellen Woche lebenden Insekten würden eine weitere Woche leben und auch in dieser wieder 50 Eier legen. Wie verändern sich das Übergangsdiagramm, die Leslie-Matrix und die Antwort auf die Fragestellung unter b)?



$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 37500 \\ 25000 \\ 100 \\ 425 \end{pmatrix}$$