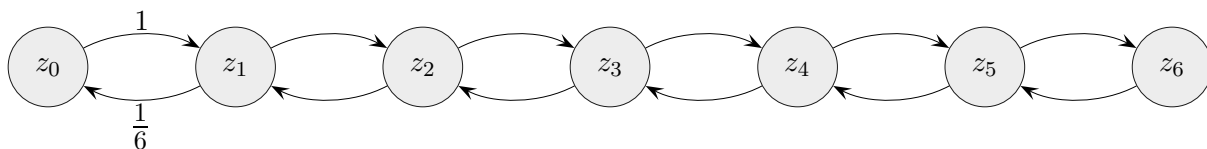


Münzen-Aufgabe

Sechs Münzen mit den Seiten 1 und 0 (Wappen) liegen anfänglich alle mit dem Wappen nach oben. Jede Sekunde wird nun eine zufällig ausgewählte Münze umgedreht. Untersuche die langfristige Verteilung für die Anzahl X der oben liegenden Einsen.



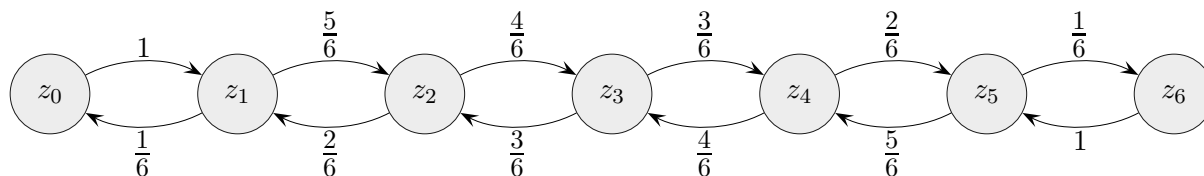
Zeige, dass $\vec{v}_s = (\frac{1}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{5}{16} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{1}{64})^T$ eine stationäre Verteilung ist.

Stelle den Bezug zur Ehrenfest-Kette her, bei der der Austausch von Partikeln zwischen zwei Behältern, die durch eine Membran getrennt sind, modelliert wird.

Münzen-Aufgabe

Sechs Münzen mit den Seiten 1 und 0 (Wappen) liegen anfänglich alle mit dem Wappen nach oben. Jede Sekunde wird nun eine zufällig ausgewählte Münze umgedreht.

Untersuche die langfristige Verteilung für die Anzahl X der oben liegenden Einsen.



$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix}
 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & \frac{2}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{3}{6} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{4}{6} & 0 & \frac{4}{6} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{3}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{6} & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0
 \end{pmatrix}$$

Die Konvergenz der Kette gegen die Verteilung $\vec{v}_s = (\frac{1}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{5}{16} \mid \frac{15}{64} \mid \frac{3}{32} \mid \frac{1}{64})^T$ ist nicht gegeben, da die Kette periodisch ist.

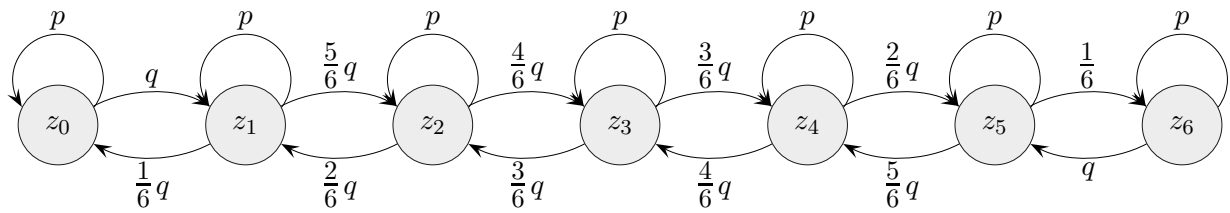
$$\vec{v}_{30} = (0,031 \mid 0 \mid 0,469 \mid 0 \mid 0,469 \mid 0 \mid 0,031)^T$$

$$\vec{v}_{31} = (0 \mid 0,188 \mid 0 \mid 0,625 \mid 0 \mid 0,188 \mid 0)^T$$

Variation

Das Ehrenfest-Modell kann so geändert werden, dass das ausgewählte Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit p im Behälter verbleibt, mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ erfolgt ein Wechsel in der beschriebenen Weise. Dadurch wird die Kette aperiodisch und konvergiert für jede Anfangsverteilung gegen die stationäre Verteilung:

$$P(X = k) = \binom{6}{k} \frac{1}{2^6}, \quad k = 0, \dots, 6.$$

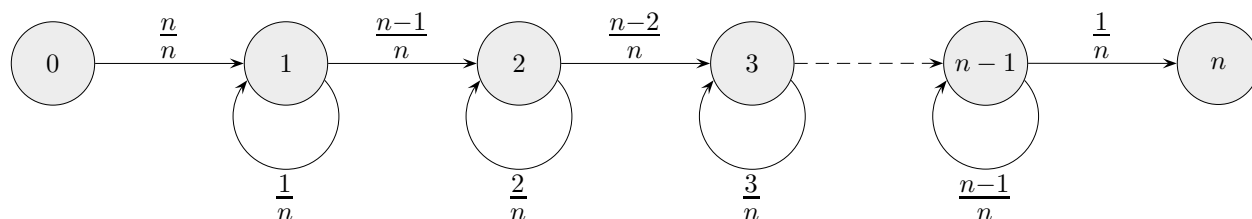


Vollständige Serie

Ein Würfel wird $k = 13$ (27) mal geworfen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten dabei alle sechs möglichen Augenzahlen mindestens einmal auf?

Vollständige Serie



Ein Zufallsversuch mit n möglichen Ergebnissen wird k -mal wiederholt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten alle Ergebnisse mindestens einmal auf? Anders formuliert:

Aus einer Urne mit n nummerierten Kugeln wird zufällig jeweils eine gezogen und wieder zurückgelegt.

Dies wird k -mal wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jede Kugel mindestens einmal gezogen?

In der Grafik geben die Zustände 0 bis n die Anzahl der gesammelten Nummern an.

Für das Werfen eines Würfels gibt der Zustand 2 dabei z. B. an, dass 2 verschiedene Augenzahlen bis zu diesem Zeitpunkt aufgetreten sind. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $2/6$ würfelt man dann eine bereits erhaltene Augenzahl und mit einer Wahrscheinlichkeit von $4/6$ erzielt man eine neue Augenzahl.

Im absorbierenden Zustand 6 hat man die vollständige Serie erhalten.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{3}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Der Startvektor ist $\vec{v}_0 = (1 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0)^T$.

Die Wahrscheinlichkeit für eine vollständige Serie nach (maximal) 13 Würfeln beträgt 51,4%,
nach (maximal) 27 Würfeln sind es 95,7%.

Ergänzung:

Die Wahrscheinlichkeit für eine vollständige Serie in genau 14 Würfeln beträgt $58,28\% - 51,39\% = 6,9\%$,
in genau 11 Würfeln $35,62\% - 27,18\% = 8,4\%$ (Maximum).