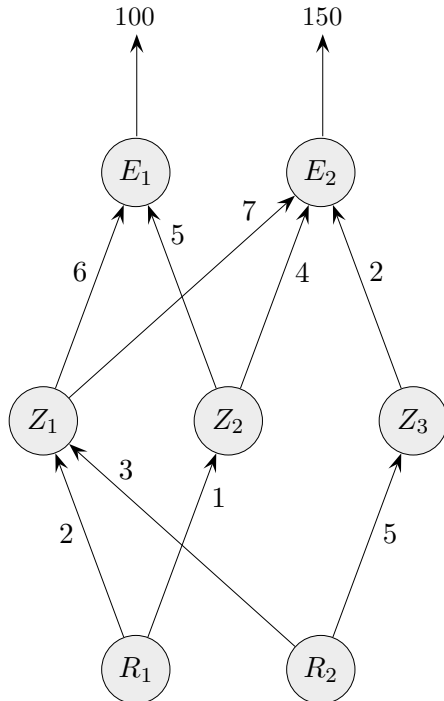




# Materialverflechtung

In einem Unternehmen mit mehrstufigem Fertigungsablauf seien die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgenden Graph gegeben:



Der Pfeil z. B. von  $R_1$  nach  $Z_1$  gibt an, dass pro Mengeneinheit ( $ME$ ) des Zwischenprodukts  $Z_1$  2 Mengeneinheiten des Rohstoffs  $R_1$  erforderlich sind.

Die Frage ist nun, wie viele Mengeneinheiten der Rohstoffe  $R_1$  und  $R_2$  zur Verfügung stehen müssen, um eine Produktion der Endprodukte  $E_1 = 100$  ( $ME$ ) und  $E_2 = 150$  ( $ME$ ) zu ermöglichen.

Die Mengenangaben können in sogenannten Verflechtungsmatrizen erfasst werden.

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$
$R_1$	2	1	0
$R_2$	3	0	5

	$E_1$	$E_2$
$Z_1$	6	7
$Z_2$	5	4
$Z_3$	0	2

Die Spalte z. B. für  $Z_1$  gibt an, dass für dieses Zwischenprodukt die Rohstoffmengen  $R_1 = 2$  ( $ME$ ) und  $R_2 = 3$  ( $ME$ ) benötigt werden.

Es ist nun offensichtlich, wie die Anzahlen der Mengeneinheiten für die Zwischenprodukte und dann für die Rohstoffe zu berechnen sind. Besonders übersichtlich ist die Matrizenschreibweise:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} \text{ heißt Outputvektor.}$$

Für den Zwischenproduktvektor gilt:  $\vec{z} = B \cdot \vec{y}$

und für den Rohstoffmengenvektor (oder Inputvektor):  $\vec{x} = A \cdot \vec{z} = A \cdot (B \cdot \vec{y}) = (A \cdot B) \cdot \vec{y} = C \cdot \vec{y}$

Wir erhalten  $C = \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4400 \\ 6450 \end{pmatrix}$ , d. h.  $R_1 = 4400$  ( $ME$ ),  $R_2 = 6450$  ( $ME$ )

# Matrizenmultiplikation $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

Es ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Wir fragen uns, wie die Multiplikation von Matrizen beschaffen sein muss, damit gilt:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]} \\ &= \begin{pmatrix} e(ax + by) + f(cx + dy) \\ g(ax + by) + h(cx + dy) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ (ga + hc)x + (gb + hd)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es muss also sein:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

Das Falksche Schema ist leicht zu merken (Zeile mal Spalte, das Ergebnis erinnert an das Skalarprodukt):

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & b_1 \\ \cdot & \cdot & b_2 \\ \cdot & \cdot & b_3 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \blacksquare \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \end{array}$$

$$\blacksquare = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

# Materialverflechtung

Wie viele  $ME$  von  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  sind für die Herstellung einer  $ME$  von  $E_1$  bzw.  $E_2$  erforderlich?

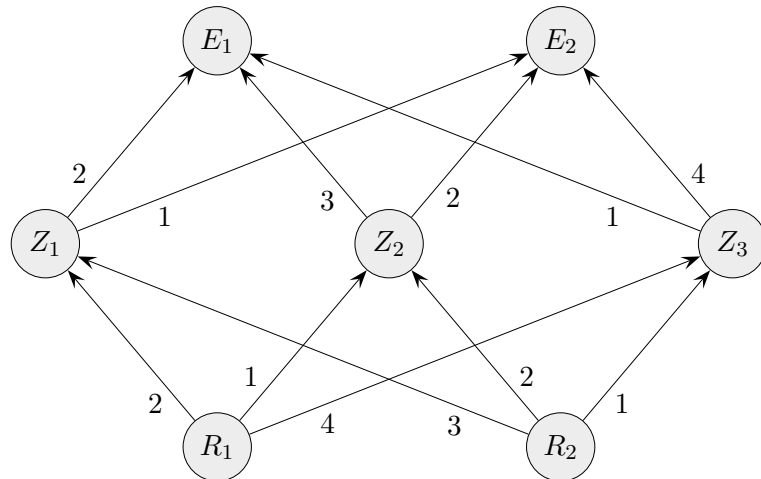
		$E_1$	$E_2$		
$Z_1$		1	9		
$Z_2$		2	3		
$Z_3$		6	5		
	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$		
$R_1$	4	0	8		
$R_2$	5	7	3		
$R_3$	2	6	0		

# Materialverflechtung

				$E_1$	$E_2$	
				$Z_1$	1	9
				$Z_2$	2	3
				$Z_3$	6	5
	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$			
$R_1$	4	0	8	52	76	
$R_2$	5	7	3	37	81	
$R_3$	2	6	0	14	36	

# Materialverflechtung Aufgabe

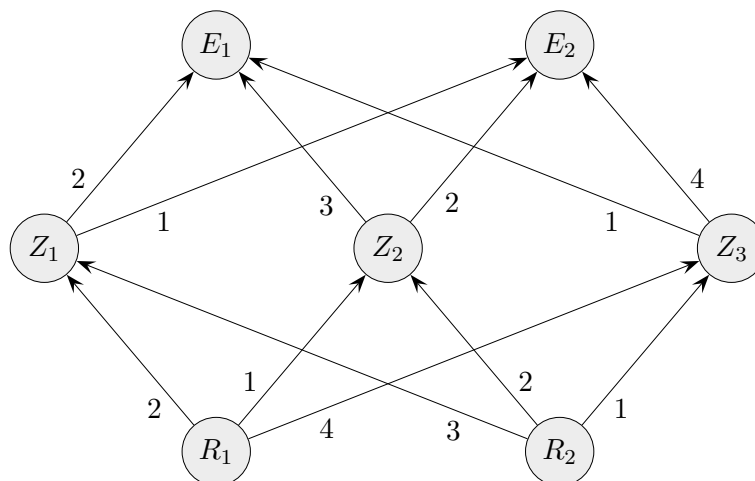
In einem Unternehmen mit mehrstufigem Fertigungsablauf seien die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgenden Graph gegeben:



- Es sollen 4 Mengeneinheiten ( $ME$ ) von  $E_1$  und 7  $ME$  von  $E_2$  produziert werden. Wie viele Rohstoffe sind nötig?
- Es sind 115  $ME$  von  $R_1$  und 98  $ME$  von  $R_2$  vorhanden. Wie viele Endprodukte lassen sich daraus herstellen, wenn alle Rohstoffe restlos verbraucht werden sollen?
- Preise pro Mengeneinheit:  $R_1$  kostet 2 €,  $R_2$  kostet 5 €, die Herstellung von  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$  kosten 4 €, 3 € und 2 €, die Herstellung von  $E_1$  und  $E_2$  aus den Zwischenprodukten kostet jeweils 7 € und 2 €, unabhängig von der Produktionsmenge entstehen fixe Kosten von 340 €. Wie hoch sind die Produktionskosten von 16  $ME$  von  $E_1$  und 23  $ME$  von  $E_2$ ?

# Materialverflechtung Aufgabe Ergebnisse

In einem Unternehmen mit mehrstufigem Fertigungsablauf seien die festen Mengenbeziehungen zwischen Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten durch folgenden Graph gegeben:



- a) Es sollen 4 Mengeneinheiten (*ME*) von  $E_1$  und 7 *ME* von  $E_2$  produziert werden. Wie viele Rohstoffe sind nötig?

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$
$R_1$	2	1	4
$R_2$	3	2	1

	$E_1$	$E_2$
$Z_1$	2	1
$Z_2$	3	2
$Z_3$	1	4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = C \cdot \vec{y}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 184 \\ 129 \end{pmatrix} \quad \text{Es sind 184 ME von } R_1 \text{ und 129 ME von } R_2 \text{ nötig.}$$

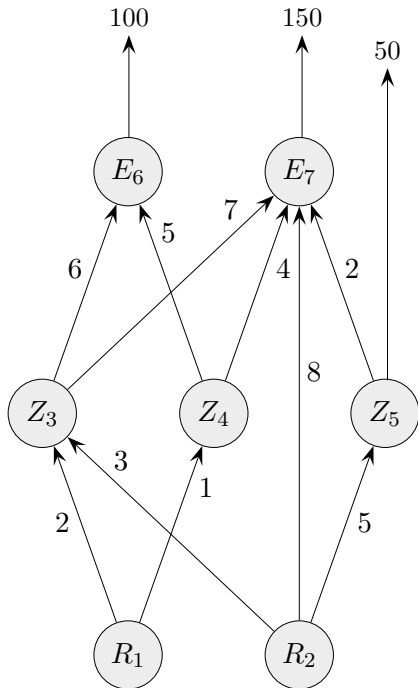
- b) Es sind 115 *ME* von  $R_1$  und 98 *ME* von  $R_2$  vorhanden. Wie viele Endprodukte lassen sich daraus herstellen, wenn alle Rohstoffe restlos verbraucht werden sollen?

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 115 \\ 98 \end{pmatrix} \quad \text{Es sind 5 ME von } E_1 \text{ und 3 ME von } E_2 \text{ möglich.}$$

- c) Preise pro Mengeneinheit:  $R_1$  kostet 2 €,  $R_2$  kostet 5 €, die Herstellung von  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$  kosten 4 €, 3 € und 2 €, die Herstellung von  $E_1$  und  $E_2$  aus den Zwischenprodukten kostet jeweils 7 € und 2 €, unabhängig von der Produktionsmenge entstehen fixe Kosten von 340 €. Wie hoch sind die Produktionskosten von 16 *ME* von  $E_1$  und 23 *ME* von  $E_2$ ?

Zunächst müssen die Mengen der notwendigen Rohstoffe und Zwischenprodukte bestimmt werden. Kosten für die Zwischenprodukte:  $55 \cdot 4 \text{ €} + 94 \cdot 3 \text{ €} + 108 \cdot 2 \text{ €} = 718 \text{ €}$ , Rohstoffe 3577 €, Endprodukte 158 €, gesamte Produktionskosten (+340 €) 4793 €

# Stücklistenproblem, Gozintograph



Dieses Verflechtungsmodell berücksichtigt, dass Rohstoffe direkt in die Endprodukte eingehen oder dass auch eine externe Nachfrage nach bestimmten Zwischenprodukten besteht.

Die Frage lautet, nach welcher Stückliste (Liste der Mengenangaben  $x_1, x_2, \dots, x_7$  für  $R_1, R_2, Z_3, Z_4, Z_5, E_6, E_7$ ) produziert wird.

Da die Fertigungsstufen nicht klar voneinander getrennt werden können, wird eine Verflechtungsmatrix für den gesamten Graphen aufgestellt.

Eine aufsteigende Nummerierung, die bei den Rohstoffen beginnt, erhöht die Übersicht.

Für die Anzahlen der Mengeneinheiten ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 2x_3 + x_4 \\
 x_2 &= 3x_3 + 5x_5 + 8x_7 \\
 x_3 &= 6x_6 + 7x_7 \\
 x_4 &= 5x_6 + 4x_7 \\
 x_5 &= 2x_7 + 50 \\
 x_6 &= 100 \\
 x_7 &= 150
 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist zu lösen.

Mit Matrizen kann dies wieder einprägsam erfolgen.

Jede Spalte der Verflechtungsmatrix gibt erneut für ein Produkt die zur Herstellung benötigten Mengeneinheiten der übrigen Produkte, d. h. also die Zutatenliste, an.

	$R_1$	$R_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$E_6$	$E_7$
$R_1$	0	0	2	1	0	0	0
$R_2$	0	0	3	0	5	0	8
$Z_3$	0	0	0	0	0	6	7
$Z_4$	0	0	0	0	0	5	4
$Z_5$	0	0	0	0	0	0	2
$E_6$	0	0	0	0	0	0	0
$E_7$	0	0	0	0	0	0	0

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (E - T) \cdot \vec{x} &= \vec{y} \\
 \Leftrightarrow \vec{x} &= (E - T)^{-1} \cdot \vec{y} \\
 \Rightarrow \vec{x} &= \begin{pmatrix} 4400 \\ 7900 \\ 1650 \\ 1100 \\ 350 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ E_6 \\ E_7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



# Input-Output-Analyse    Leontief-Modell

1. Die umgeformte Beziehung,

$$(E - T) \cdot \vec{x} = \vec{y} \quad *$$

$$\iff \vec{x} - T \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

die auch dem Gleichungssystem direkt entspricht, kann unmittelbar eingesehen werden. Für den Stücklisten- oder auch Produktionsvektor  $\vec{x}$  gibt der Vektor  $T \cdot \vec{x}$  den notwendigen (internen) Bedarf an Rohstoffen und Zwischenprodukten an.

Der Outputvektor  $\vec{y}$  ergibt sich dann als Differenz:  $\vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x}$ .

2. Bei der gewählten Anordnung (Nummerierung) besitzt die Verflechtungsmatrix  $T$  in unserem Beispiel nur oberhalb der sogenannten Hauptdiagonalen von null verschiedene Elemente.  $T^2$  enthält mehr Nullen als  $T$ ,  $T^3$  besteht nur aus Nullen. Daher gilt die Beziehung:

$$(E + T + T^2) \cdot (E - T) = E \quad \text{Nachweis durch Klammernauflösen}$$

Multiplikation von rechts mit  $\vec{x}$   $\implies$   $\vec{y} + T \cdot \vec{y} + T^2 \cdot \vec{y} = \vec{x}$     beachte \*

Auch diese Darstellung kann anschaulich interpretiert werden.

Nehmen wir zunächst an, dass ein zweistufiger Produktionsprozess vorliegt und der Outputvektor  $\vec{y}$  nur die Anzahl der Endprodukte vorschreibt.

Dann gibt der Vektor  $T \cdot \vec{y}$  den Bedarf an Zwischenprodukten und  $T^2 \cdot \vec{y} = T \cdot (T \cdot \vec{y})$  den Bedarf an Rohstoffen an.

Diese Überlegungen können auf  $n$  Produktionsstufen verallgemeinert werden.  $T^{n+1}$  ist dann die Nullmatrix.

$$\underbrace{(E + T + T^2 + \dots + T^n)}_{(E - T)^{-1}} \cdot (E - T) = E$$

$$\vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{x} = (E + T + T^2 + \dots + T^n) \cdot \vec{y}$$