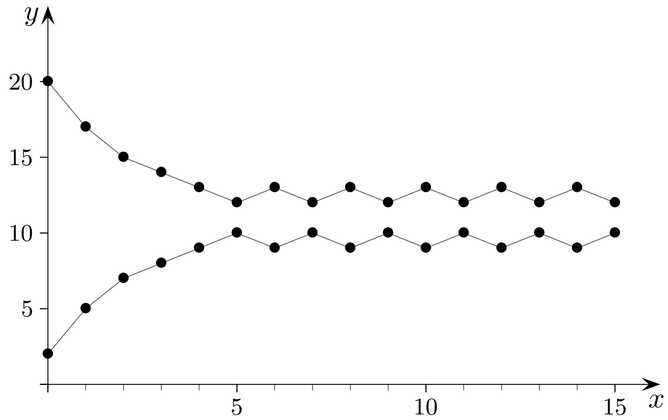
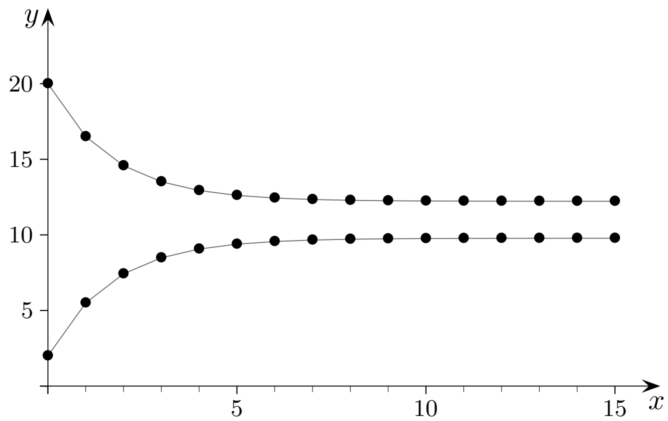
↑ Stochastische Prozesse Einführung

Der Kurs wird in 2 Gruppen aufgeteilt (siehe Excel-Blatt), z. B. $A = 2$ und $B = 20$, und es werden die Wechsel-Anteile festgelegt: Pro Takt wechseln z. B. $\frac{1}{4}$ von A nach B und gleichzeitig $\frac{1}{5}$ von B nach A. Wie sieht die weitere Entwicklung aus?

a)

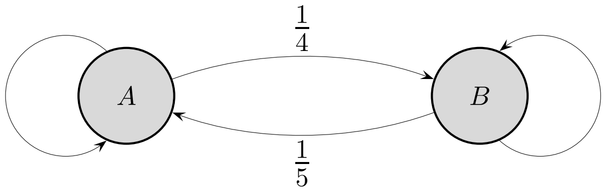


b)



Variiere die Anfangsverteilung.
Welche Veränderung führt zur zweiten Grafik?

Das Thema kann auch als Umfüllproblem bearbeitet werden.
In 2 Messzylindern A und B befinden sich anfänglich die Flüssigkeitsmengen m_1 und m_2.
Aus A wird der Anteil a entnommen, aus B der Anteil b (2 weitere Gefäße sind daher erforderlich). Anschließend werden die entnommenen Flüssigkeitsmengen jeweils in den anderen Zylinder geschüttet. Dieser Vorgang wird wiederholt.
Die Anzahl der Messzylinder kann erhöht werden.



Takt	A	B
0	2	20
1	5,50	16,50
2	7,43	14,58
3	8,48	13,52
4	9,07	12,93
5	9,39	12,61
6	9,56	12,44
7	9,66	12,34
8	9,71	12,29
9	9,74	12,26
10	9,76	12,24
11	9,77	12,23
12	9,77	12,23

$$\begin{aligned} A_{\text{neu}} &= \tfrac{3}{4}A_{\text{alt}} + \tfrac{1}{5}B_{\text{alt}} \\ B_{\text{neu}} &= \tfrac{1}{4}A_{\text{alt}} + \tfrac{4}{5}B_{\text{alt}} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A_{\text{neu}} \\ B_{\text{neu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{\text{alt}} \\ B_{\text{alt}} \end{pmatrix}$$

GTR: $[\mathcal{A}] * [\mathcal{B}] \to [\mathcal{B}]$, ENTER-Taste (wiederholt), der Startvektor $\mathcal{B}$ ist eine 2×1-Matrix.

Die Grenzverteilung kann auch mit der Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}A &= \tfrac{1}{5}B \\ A + B &= 22 \end{aligned}$$

ermittelt werden.

Mit $\vec{x}_0$ als Anfangszustand (Anfangsverteilung) erhalten wir nach einer Zeiteinheit $\vec{x}_1 = \mathcal{A} \cdot \vec{x}_0$, nach 2 Zeiteinheiten: $\vec{x}_2 = \mathcal{A} \cdot \vec{x}_1 = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{A} \cdot \vec{x}_0)$, usw.
Wie muss die Multiplikation $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}^2$ von Matrizen beschaffen sein, damit gilt:

$$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{A} \cdot \vec{x}_0) = \mathcal{A}^2 \cdot \vec{x}_0\,?$$

Die Frage beantwortet das Blatt Matrizenmultiplikation.

↑ Grenzverteilung

Mit der Matrizenmultiplikation erhalten wir:

$$\underbrace{\mathcal{A}\cdot(\ldots(\mathcal{A}\cdot(\mathcal{A}\cdot\vec{x}_0))\ldots)}_{n \text{ Iterationen}} = \mathcal{A}^n\cdot\vec{x}_0$$

Für stochastische Matrizen (Spaltensumme gleich 1) liegt die Vermutung nahe,
dass die Spalten in der Grenzmatrix identisch sind:

$$\mathcal{A}^\infty = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

1. Erläutere:

   Für die Grenzverteilung $\vec{x}_\infty$ würde das bedeuten:

   $$\vec{x}_\infty = S\cdot\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } S \text{ die Spaltensumme des Startvektors } \vec{x}_0 \text{ ist.}$$

   Andere Startvektoren mit gleicher Spaltensumme führten zur gleichen Grenzverteilung.

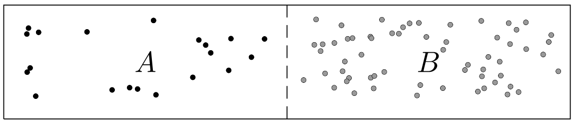
2. Ermittle ohne Rechnung (mit Begründung) $\mathcal{A}\cdot\vec{x}_\infty$.

3. Weise nach:

   Die Potenz einer stochastischen Matrix ist eine stochastische Matrix.

4. Welche Besonderheit weist das Gleichungssystem $\mathcal{A}\cdot\vec{x} = \vec{x}$ auf?

↑ Diffusionsmodell



Ein mit 12000 Teilchen gefüllter Behälter ist durch eine durchlässige Wand (Membran) in zwei Hälften A und B geteilt. Die Verteilung der Teilchen auf die beiden Hälften verändert sich jeweils nach Ablauf einer festen Zeiteinheit (Takt): 10 % der sich in A befindlichen Teilchen gelangen (diffundieren) nach B und 20 % der sich in B befindlichen Teilchen gelangen nach A. Das System soll abgeschlossen sein. Am Anfang sind 3000 Teilchen in A und 9000 in B. Es soll untersucht werden, wie sich die Verteilung der Teilchen auf die beiden Hälften entwickelt.

Die Tabelle enthält die Übergänge.

		von	
		A	B
nach	A	0,9	0,2
	B	0,1	0,8

Nach dem 1. Takt sind in A

$$0{,}9 \cdot 3000 + 0{,}2 \cdot 9000 = 4500$$

Teilchen und in B

$$0{,}1 \cdot 3000 + 0{,}8 \cdot 9000 = 7500,$$

nach dem 2. Takt sind in A 5550 Teilchen und in B 6450.

Die Berechnungen können mit der Übergangsmatrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

und der Matrizenmultiplikation vereinfacht werden:

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 9000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4500 \\ 7500 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4500 \\ 7500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5550 \\ 6450 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{v_0}$ als Anfangszustand (Anfangsverteilung) erhalten wir nach der nächsten Zeiteinheit $\vec{v_1} = \mathcal{A} \cdot \vec{v_0}$, für die übernächste: $\vec{v_2} = \mathcal{A} \cdot \vec{v_1} = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{A} \cdot \vec{v_0}) = \mathcal{A}^2 \cdot \vec{v_0}$, usw.

GTR: $[A] * [B] \rightarrow [B]$, ENTER-Taste (wiederholt), der Startvektor ist eine 2×1-Matrix. Die Grenzverteilung ist hiermit erkennbar.

↑ Matrizenmultiplikation $\mathcal{A}^2$

Es ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Wir fragen uns, wie die Multiplikation von Matrizen beschaffen sein muss, damit gilt:

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]}$$

$$= \begin{pmatrix} a(ax + by) + b(cx + dy) \\ c(ax + by) + d(cx + dy) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a^2 + bc)x + (ab + bd)y \\ (ca + dc)x + (cb + d^2)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es muss also sein:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

Das Falksche Schema ist leicht zu merken,
Spalte mal Zeile. Das Ergebnis erinnert an das Skalarprodukt.

$$\begin{array}{r|l} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & b_1 \\ \cdot & \cdot & b_2 \\ \cdot & \cdot & b_3 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \blacksquare \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \end{array}$$

$$\blacksquare = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

↑ Matrizenmultiplikation $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

Es ist:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Wir fragen uns, wie die Multiplikation von Matrizen beschaffen sein muss, damit gilt:

$$\left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]}$$

$$= \begin{pmatrix} e(ax + by) + f(cx + dy) \\ g(ax + by) + h(cx + dy) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ (ga + hc)x + (gb + hd)y \end{pmatrix}$$

Es muss also sein:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

Das Schema ist leicht zu merken:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} . & . & b_1 \\ . & . & b_2 \\ . & . & b_3 \end{pmatrix} = \mathcal{B} \\
\hline
\mathcal{A} = \begin{pmatrix} . & . & . \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ . & . & . \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & \blacksquare \\ . & . & . \end{pmatrix} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}
\end{array}$$

$$\blacksquare = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

↑ Inverse Matrix

Ein eindeutig lösbares Gleichungssystem wie z. B.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 5y & = & 7 \\ x & + & 4y & = & 14 \\ \hline \end{array}$$

kann in Matrizenschreibweise

$$\mathcal{A}\,\vec{x} = \vec{b}$$

$$\text{mit} \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

analog zu

$$\begin{aligned} 3x &= 6 \quad \Big|\cdot \frac{1}{3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

komfortabel gelöst werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\,\vec{x} &= \vec{b} \qquad \Big| \cdot \mathcal{A}^{-1} \qquad \text{(was immer dies sein mag)} \\ \underbrace{\mathcal{A}^{-1}\cdot\mathcal{A}}_{\mathcal{E}}\,\vec{x} &= \mathcal{A}^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= \mathcal{A}^{-1}\vec{b} \qquad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ muss also eine Matrix sein, für die gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1}\cdot\mathcal{A} &= \mathcal{E} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\mathcal{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies ausgeschrieben ergibt 4 Gleichungen für a, b, c und d mit der Lösung: $\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$\mathcal{A}^{-1}$ ermitteln wir natürlich mit den GTR und erhalten:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \mathcal{A}^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

↑ Matrizengleichung, inverse Matrix

Gleichungssysteme können als Matrizengleichung angegeben werden.

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= 1 \\ 2x + 5y + 4z &= 2 \\ x - 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

$$A\,\vec{x} = \vec{d}$$

mit $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A\,\vec{x} &= \vec{d} && \mid \cdot A^{-1} \quad \text{von links} \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{d} \end{aligned}$$

mit $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

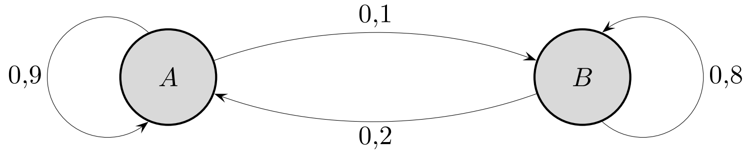
$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$ Im Allgemeinen ist die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ.

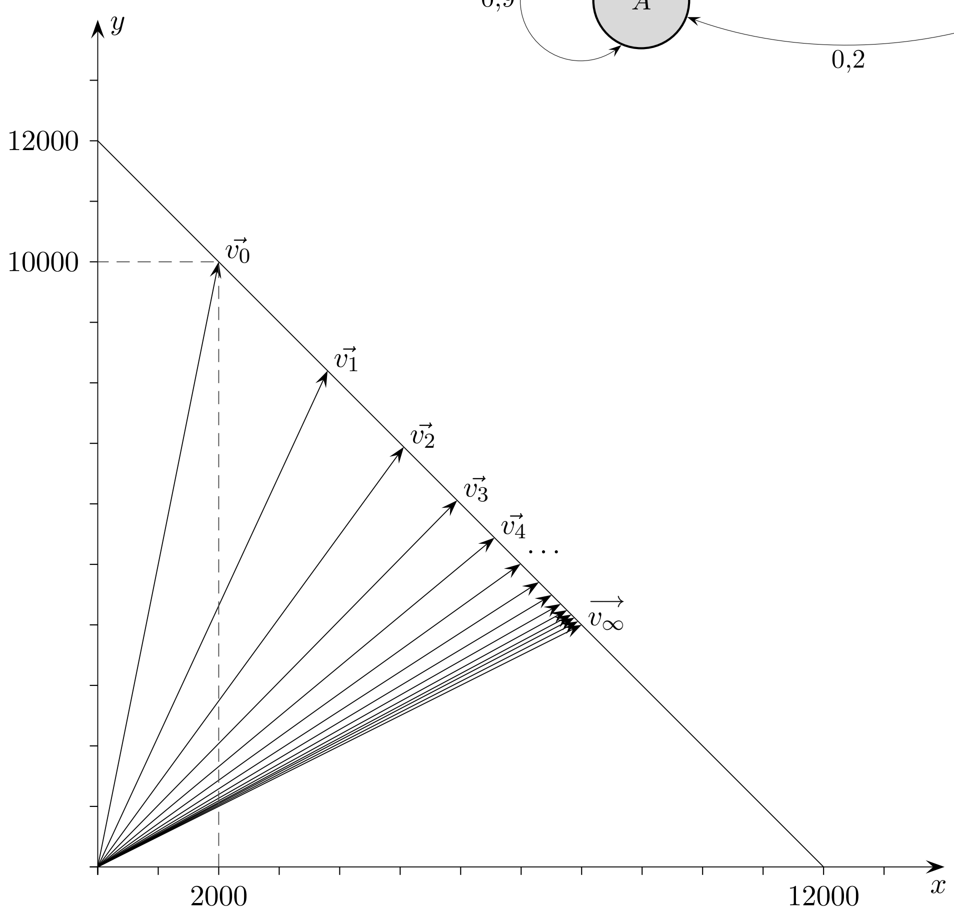
$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A^{-1} existiert nur, wenn das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

↑ Diffusionsmodell Grenzzustand

Um die langfristige Entwicklung zu untersuchen, kann $\mathcal{A}^n \cdot \vec{v_0}$ für große n betrachtet werden (GTR).
Die grafische Darstellung der Zustandsvektoren (Anfangszustand A 2000, B 10000) legt die Vermutung nahe, dass ein Grenzvektor $\overrightarrow{v_\infty}$ existiert, für den $\mathcal{A} \cdot \overrightarrow{v_\infty} = \overrightarrow{v_\infty}$ gilt.
Er scheint unabhängig vom Anfangszustand zu sein.



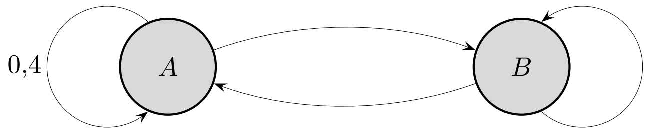


Dieser Grenzvektor löst somit das LGS $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$.
Die allgemeine Lösung lautet in diesem Fall $\vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Da die Komponentensumme 12000 sein muss,
erhalten wir auf rechnerisch-algebraischem Wege $\overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix}$.

Die Übergangsmatrix kann als stochastische Matrix (Elemente nicht negativ, Spaltensummen ergeben 1) mit den Übergangswahrscheinlichkeiten für ein Teilchen aufgefasst werden. Der Startvektor $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $a + b = 1$, z. B. $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Prozess in den einzelnen Zuständen startet.
$\overrightarrow{v_\infty}$ enthält die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten des Teilchens auf lange Sicht.

1. Für drei Tankstellen A, B und C sollen die folgenden Annahmen gelten: Die Benzinkunden von A verteilen sich beim nächsten Tanken auf die Tanktellen A, B und C im Verhältnis 2 : 2 : 1. Von den B-Kunden wechseln das nächste Mal je 15 % zu A und C. 60 % der Kunden von C wählen diese Tankstelle auch das nächste Mal, der Rest fährt zu B. Jeder Kunde tankt pro Woche genau ein Mal.
   a) Stellen Sie das Wechselverhalten in einer Übergangsmatrix $\mathcal{Q}$ dar.
   b) Bestimmen Sie die Fixvektoren zur Matrix $\mathcal{Q}$ und ermitteln Sie die Grenzmatrix.
   c) ln einer bestimmten Woche tanken von insgesamt 1000 Autofahrern 600 bei B und je 200 bei A und C. Berechnen Sie für die nächsten beiden Wochen die Verteilung der Autofahrer auf die drei Tankstellen.
   Welche Verteilung stellt sich auf lange Sicht ein?
   Wie würde diese aussehen, wenn anfangs alle Kunden bei B getankt hätten?

2. Gegeben ist der Fixvektor $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ zu einer stochastischen Übergangsmatrix $\mathcal{M}$ sowie das unvollständige Zustandsdiagramm. Vervollständigen Sie das Diagramm und geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix $\mathcal{M}$ an.



3. Zeigen Sie: Wenn $\mathcal{A}$ eine stochastische 2×2-Matrix ist, so ist dies auch $\mathcal{A}^2$.

4. Sei $\mathcal{A}$ eine stochastische 2×2-Matrix.
   Begründen Sie auf 2 Arten: Beim Übergang von $\vec{x_n}$ nach $\mathcal{A} \cdot \vec{x_n}$ bleibt die Spaltensumme der Verteilung erhalten.
   Wie können die Spaltensumme 1 und die Elemente von z. B. $\mathcal{A}^3$ interpretiert werden?

5. Sei $\mathcal{A}$ eine stochastische 2×2-Matrix und $d = a_{11} - a_{12}$ (Differenz der Elemente in der 1. Zeile).
   Welche Differenz liegt dann bei $\mathcal{A}^2$ vor?
   Was folgt hieraus für höhere Matrix-Potenzen?
   Der Sachverhalt gilt auch mit verändertem Vorzeichen für die Differenz der Elemente in der 2. Zeile. Was kann nun über die Struktur der Grenzmatrix ausgesagt werden?

6. Zeigen Sie: $\mathcal{A} \cdot (a\vec{x}) = a(\mathcal{A} \cdot \vec{x})$ und $\mathcal{A} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A} \cdot \vec{x} + \mathcal{A} \cdot \vec{y}$

↑ Stochastische 2×2-Grenzmatrix

Erläutere:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & a-d \\ 1-a & 1-a+d \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b & b-e \\ 1-b & 1-b+e \end{pmatrix}$$

Sei $\quad \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$

Für die Differenz der Elemente in der 1. Zeile von $\mathcal{C}$ gilt (Tipp: geeignet ausklammern)

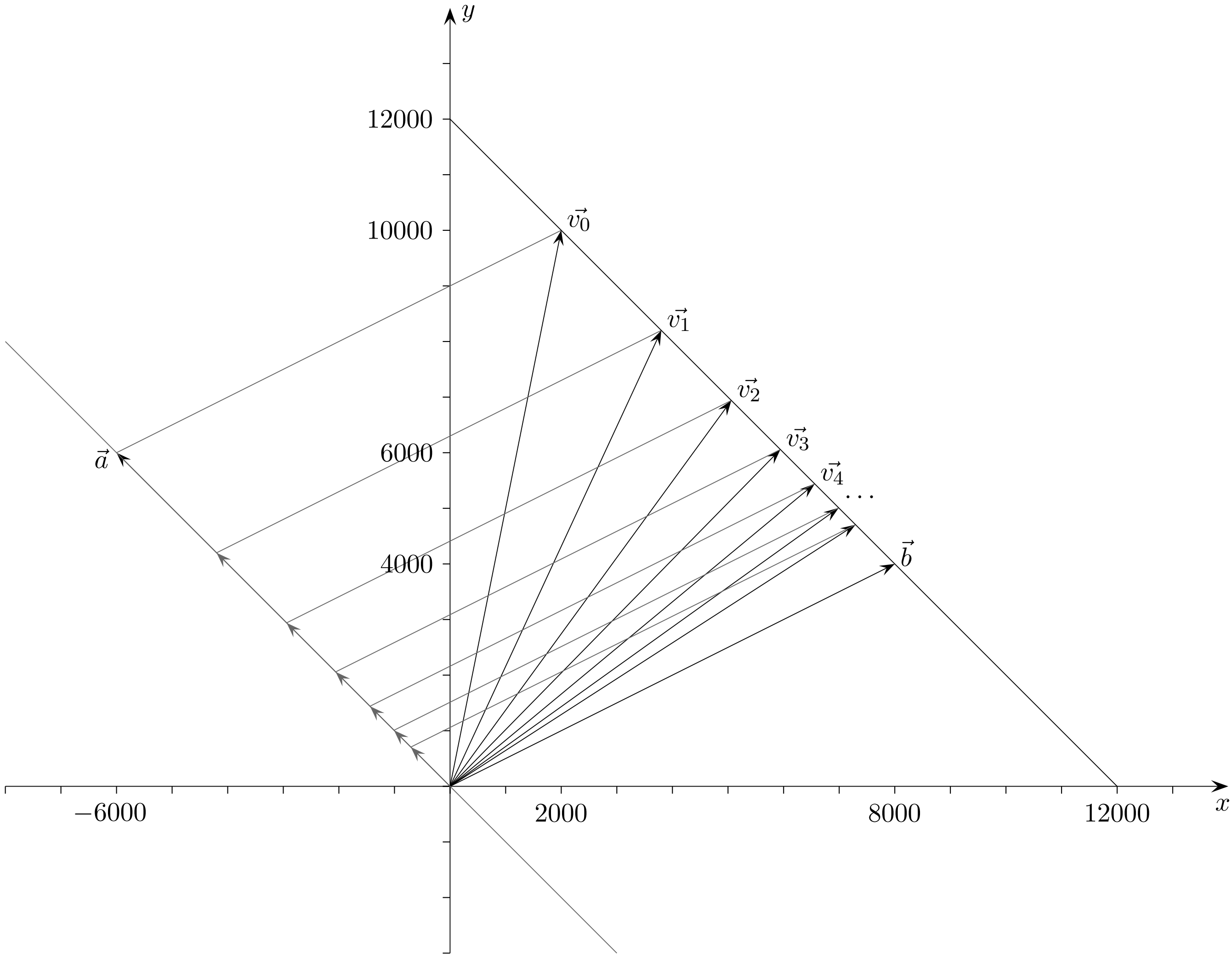
$$c_{11} - c_{12} = a \cdot b + (a-d) \cdot (1-b) - a \cdot (b-e) - (a-d) \cdot (1-b+e) = de$$

und für die Differenz der Elemente in der 2. Zeile:

$$c_{21} - c_{22} = (1-a) \cdot b + (1-a+d) \cdot (1-b) - (1-a) \cdot (b-e) - (1-a+d) \cdot (1-b+e) = -de$$

Was kann nun hinsichtlich der Struktur der Grenzmatrix $\mathcal{A}^\infty$ gefolgert werden?

↑ Diffusionsmodell Eigenwerte und Eigenvektoren



Um die Konvergenz der Folge $\vec{v_0},\ \vec{v_1},\ \vec{v_2},\ \vec{v_3},\ \dots$ gegen $\overrightarrow{v_\infty}$ weiter zu beleuchten,

stellen wir den Startvektor $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 10000 \end{pmatrix}$ als Summe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

$$\begin{aligned} \vec{v_0} &= \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -6000 \\ 6000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix} = 6000 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4000 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \quad \vec{v_1} &= \mathcal{A} \cdot \vec{v_0} = \mathcal{A} \cdot \vec{a} + \mathcal{A} \cdot \vec{b} = \dots = 0{,}7\vec{a} + \vec{b} \\ \vec{v_2} &= \mathcal{A} \cdot \vec{v_1} = \mathcal{A} \cdot 0{,}7\vec{a} + \mathcal{A} \cdot \vec{b} = 0{,}7^2\vec{a} + \vec{b} \\ &\dots \\ \vec{v_n} &= 0{,}7^n\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Bei jedem Schritt verringert sich der Abstand um 30 %.

Es gilt also

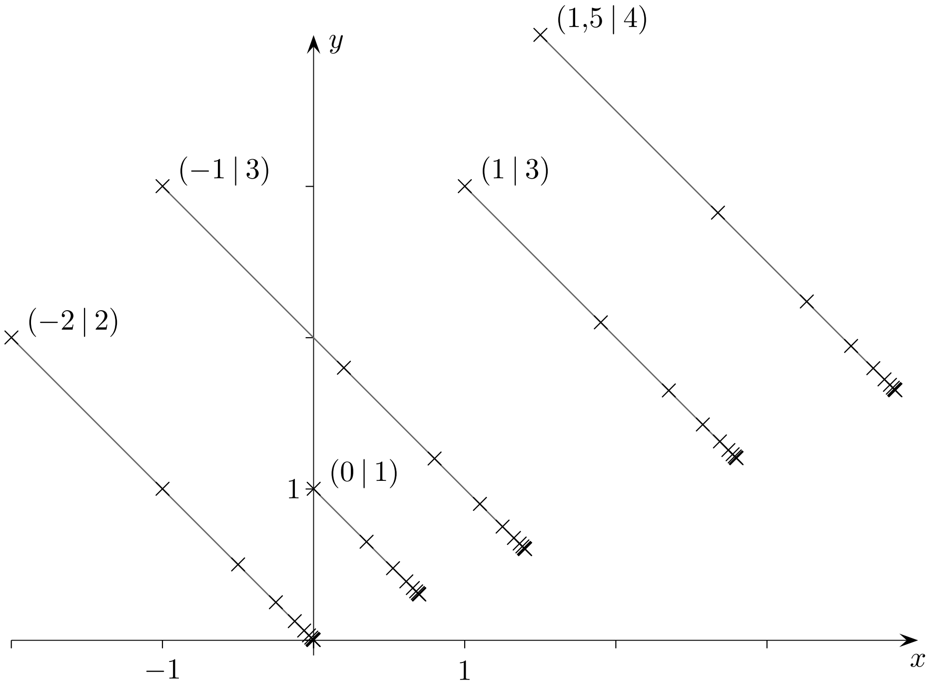
$$\mathcal{A} \cdot \vec{a} = 0{,}7\vec{a}\,, \quad \mathcal{A} \cdot 0{,}7\vec{a} = 0{,}7^2\vec{a}\,, \quad \mathcal{A} \cdot 0{,}7^2\vec{a} = 0{,}7^3\vec{a}\,, \quad \mathcal{A} \cdot \lambda\vec{a} = 0{,}7 \cdot \lambda\vec{a} \quad \text{und} \quad \mathcal{A} \cdot \vec{b} = \vec{b}\,.$$

$\lambda\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind Eigenvektoren zu den Eigenwerten 0,7 und 1. Für einen Eigenwert k ist $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = k\vec{x}$.

↑ Lineare Abbildung, Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}35 \\ 0{,}15 & 0{,}65 \end{pmatrix}$$

Für die lineare Abbildung, beschrieben durch die Matrix $\mathcal{A}$, betrachten wir Punktfolgen, die mit $\vec{x}_{n+1} = \mathcal{A}\vec{x}_n$ zu verschiedenen $\vec{x}_0$ durch Iteration entstehen.



Erläutere, dass die Richtung der Punktfolgen durch einen Vektor festgelegt zu sein scheint, für den gilt: $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}$. Beachte hierzu die in $(-2\,|\,2)$ beginnende Folge.

Für $\vec{x}$ (Eigenvektor) und λ (Eigenwert) müsste dann für die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gelten:

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & \lambda x \\ cx & + & dy & = & \lambda y \end{array} \qquad \text{bzw.}$$

$$\begin{array}{ccccc} (a-\lambda)x & + & by & = & 0 \\ cx & + & (d-\lambda)y & = & 0 \end{array} \qquad \text{d.h.} \qquad \begin{array}{ccc} (a-\lambda)x & = & -by \\ cx & = & -(d-\lambda)y \end{array}$$

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a-\lambda \\ c \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d-\lambda \end{pmatrix}$ müssten kollinear sein: $\vec{a} = k\vec{b}$

$\Longrightarrow \quad k = \frac{a-\lambda}{b}$ und $c = \frac{a-\lambda}{b} \cdot (d-\lambda)$, d.h. $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$

oder in anderer Schreibweise: $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$

Für eine stochastische Matrix (Spaltensumme = 1)

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$$

lautet die Bedingung: $(a-\lambda)(1-b-\lambda) - (1-a)b = 0$ (charakteristische Gleichung)

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind durch genaues Hinsehen erkennbar (Probe!):

$$\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 1 \\ \lambda_2 & = & a-b \end{array}$$

$\lambda_1 = 1$
Für den zugehörigen Eigenvektor gilt: $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$.
Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & x \\ (1-a)x & + & (1-b)y & = & y \end{array}$$

besitzt die Lösung: $\begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$ oder ein Vielfaches hiervon.

$\lambda_1 = a-b$
Für den zugehörigen Eigenvektor gilt: $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = (a-b)\vec{x}$.
Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & (a-b)x \\ (1-a)x & + & (1-b)y & = & (a-b)y \end{array}$$

besitzt die Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder ein Vielfaches hiervon.

Seien λ_1 und λ_2 Eigenwerte der Matrix $\mathcal{A}$ und $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ zugehörige Eigenvektoren, $\vec{x}_{n+1} = \mathcal{A}\vec{x}_n$.
Den Startvektor $\vec{x}_0$ stellen wir als Linearkombination der Eigenvektoren dar:

$$\vec{x}_0 = k_1\vec{e_1} + k_2\vec{e_2}$$

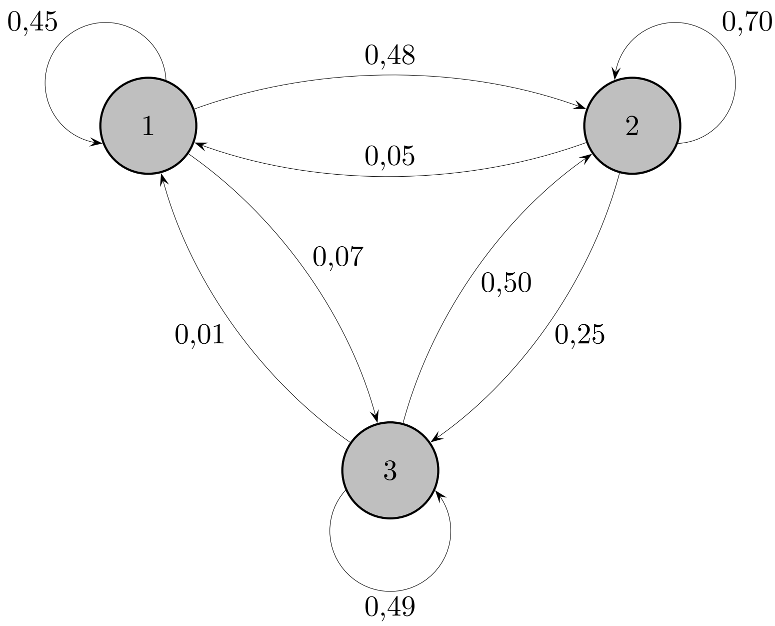
Dann gilt:

$$\begin{array}{lcll} \vec{x}_1 & = & \mathcal{A}\vec{x}_0 & = \lambda_1 k_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 k_2 \vec{e}_2 \\ \vec{x}_2 & = & \mathcal{A}\vec{x}_1 & = \lambda_1^2 k_1 \vec{e}_1 + \lambda_2^2 k_2 \vec{e}_2 \\ \ldots & & & \\ \vec{x}_n & = & \mathcal{A}\vec{x}_{n-1} & = \lambda_1^n k_1 \vec{e}_1 + \lambda_2^n k_2 \vec{e}_2 \end{array}$$

Erläutere nun die Grafik auf der vorigen Seite.

↑ Markow-Ketten

In einer soziologischen Studie wurde untersucht, in welchem Ausmaß der soziale Status des Vaters den des Sohnes in England und Wales beeinflusst. Im Diagramm sind die Übergänge enthalten.



Die zugehörige Übergangsmatrix lautet:

		Schicht des Vaters		
		1	2	3
	1	0,45	0,05	0,01
Schicht des Sohnes	2	0,48	0,70	0,50
	3	0,07	0,25	0,49

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit in zwei Generationen von 3 nach 1 aufzusteigen, bzw. von 1 nach 3 abzusteigen.

b) Wie lautet die stationäre Verteilung $\vec{p}$, für die also $\mathcal{M} \cdot \vec{p} = \vec{p}$ gilt?

c) Untersuche, ob sich jede Anfangsverteilung der Grenzverteilung nähert.

d) Ein Zustandsvektor sei $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 50 \\ 300 \\ 2000 \end{pmatrix}$.

Gegen welchen Grenzzustandsvektor $\overrightarrow{v_\infty}$ konvergiert die Folge $\overrightarrow{v_0}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, ... ?

Um die erste Frage unter a) zu beantworten, ist gemäß der Pfadregel zu multiplizieren:

	1	2	3
1			0,01
2			0,50
3			0,49

	1	2	3
1	0,45	0,05	0,01
2			
3			

	1	2	3
1			0,03
2			
3			

a) Die Wahrscheinlichkeit in zwei Generationen von 3 nach 1 aufzusteigen, beträgt 0,03 $(= 0,01 \cdot 0,45 + 0,50 \cdot 0,05 + 0,49 \cdot 0,01)$,
bzw. von 1 nach 3 abzusteigen 0,19 $(= 0,45 \cdot 0,07 + 0,48 \cdot 0,25 + 0,07 \cdot 0,49)$.

Es sind also die Elemente der Matrix $\mathcal{M}^2$ zu bilden.
Allgemein gibt ein Element p_{ij} (i-te Zeile, j-te Spalte) der Matrix $\mathcal{M}^m$ die Wahrscheinlichkeit an, in m Schritten vom Zustand j in den Zustand i zu gelangen.

b) Sei $\vec{p_0}$ eine Anfangsverteilung,
die Verteilung für die nächste Generation ist dann $\vec{p_1} = \mathcal{M} \cdot \vec{p_0}$,
für die übernächste: $\vec{p_2} = \mathcal{M} \cdot \vec{p_1} = \mathcal{M} \cdot (\mathcal{M} \cdot \vec{p_0}) = \mathcal{M}^2 \cdot \vec{p_0}$, usw.

Markow (1856-1922) bewies, dass $\mathcal{M}^n$ für $n \to \infty$ gegen eine Grenzmatrix $\mathcal{M}^\infty$ mit lauter gleichen Spalten strebt, falls $\mathcal{M}$ (oder eine Potenz von $\mathcal{M}$) lauter positive Elemente besitzt. Er konnte zeigen: In jeder Zeile von $\mathcal{M}^n$ wird für wachsendes n die kleinste Übergangswahrscheinlichkeit größer, die größte Übergangswahrscheinlichkeit kleiner und die Differenz strebt gegen Null. Veranschauliche dies anhand des Beispiels.

$$\mathcal{M}^\infty = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 & p_2 \\ p_3 & p_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

Die stationäre Verteilung lautet: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,06 \\ 0,62 \\ 0,31 \end{pmatrix}$, $\vec{p}$ ist ein Spaltenvektor von $\mathcal{M}^\infty$, denn für $\vec{p}$ gilt auch $\mathcal{M} \cdot \vec{p} = \vec{p}$.

Dies folgt aus $\mathcal{M}^\infty = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^\infty$ durch Multiplikation von rechts mit $\vec{p}$, beachte $\mathcal{M}^\infty \cdot \vec{p} = \vec{p}$.

c) Für eine beliebige Verteilung $\overrightarrow{p^*}$ gilt - wie unmittelbar zu sehen ist - $\mathcal{M}^\infty \cdot \overrightarrow{p^*} = \vec{p}$.

d) $\overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} 147 \\ 1465 \\ 738 \end{pmatrix}$, die Gesamtzahl 2350 ist lediglich mit den Anteilen des Vektors $\vec{p}$ auf die drei Zustände zu verteilen.

Wir bilden die Potenzen $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^2$, $\mathcal{P}^3$, $\mathcal{P}^4$, ... einer stochastischen $N \times N$-Matrix $\mathcal{P}$ (Elemente nichtnegativ, Spaltensummen 1) mit $N = 4$, wählen in $\mathcal{P}^n$ eine feste Zeile aus und bezeichnen ihr minimales bzw. maximales Element mit m_n bzw. M_n.
Erläutere, dass die Folge m_n monoton steigend, die Folge M_n monoton fallend ist.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & b_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_4 & \cdot \end{pmatrix} = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P}^n = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & m_n & a_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \square & \square & \blacksquare & \square \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare &= a_1b_1 + a_2b_2 + m_nb_3 + a_4b_4 \\ &\geq m_nb_1 + m_nb_2 + m_nb_3 + m_nb_4 \\ &= m_n(\ \dots\ ) \\ &= m_n \end{aligned}$$

$$\implies \qquad m_{n+1} \geq m_n$$

Um nachzuweisen, dass $\mathcal{P}^n$ gegen $\mathcal{P}^\infty$ strebt,

$$\mathcal{P}^\infty = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 & p_2 & p_2 \\ p_3 & p_3 & p_3 & p_3 \\ p_4 & p_4 & p_4 & p_4 \end{pmatrix}$$

ist $M_n - m_n \to 0$ für $n \to \infty$ zu zeigen.
Hierzu müssen die Elemente von $\mathcal{P}$ positiv sein (es genügt, wie wir sehen werden, wenn dies für eine Potenz $\mathcal{P}^r$ zutrifft). Das kleinste Element sei c, $c > 0$.

In der Zeile von $\mathcal{P}^n$ sei z.B. $a_1 = M_n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \blacksquare &= M_nb_1 + a_2b_2 + m_nb_3 + a_4b_4 \\ &= m_nb_1 + a_2b_2 + m_nb_3 + a_4b_4 + M_nb_1 - m_nb_1 \\ &\geq m_nb_1 + m_nb_2 + m_nb_3 + m_nb_4 + M_nb_1 - m_nb_1 \\ &= m_n + (M_n - m_n)b_1 \\ m_{n+1} &\geq m_n + (M_n - m_n)c \end{aligned}$$

Zeige analog:

$$M_{n+1} \leq M_n - (M_n - m_n)c$$

Die Ungleichungen

$$\begin{aligned} m_{n+1} &\geq m_n + (M_n - m_n)c \\ M_{n+1} &\leq M_n - (M_n - m_n)c \end{aligned}$$

können zusammengefasst werden zu (die Erste mit -1 multiplizieren und zur Zweiten addieren):

$$M_{n+1} - m_{n+1} \leq (1-2c)\cdot(M_n - m_n)$$

Für c $(N \geq 3)$ ist $0 < c < \frac{1}{2}$, daraus folgt $0 < 1 - 2c < 1$.

Wir schließen:

$$M_{n+1} - m_{n+1} \leq (1-2c)^n \cdot (M_1 - m_1)$$

Hieraus ist zu ersehen, dass $M_n - m_n$ eine Nullfolge darstellt.

Nehmen wir nun an, dass (erst) $\mathcal{P}^r$ lauter positive Elemente hat.
Nach dem Vorigen gilt dann $M_{nr} - m_{nr} \to 0$ für $n \to \infty$.
Andererseits ist $M_n - m_n$ monoton fallend. Wenn jedoch eine Teilfolge einer monoton fallenden Folge eine Nullfolge ist, dann muss dies auch für die ganze Folge zutreffen.

Voraussetzung für unsere Überlegungen war, dass eine Potenz von $\mathcal{P}$ lauter positive Elemente enthält, d. h. $\mathcal{P}$ regulär ist.

Das setzt voraus, dass von jedem Zustand aus jeder andere in endlich vielen Schritten erreichbar ist ($\mathcal{P}$ ist irreduzibel) und dass es für jeden Zustand möglich ist, zu ihm mit jeder beliebigen Schrittzahl zurückzukehren ($\mathcal{P}$ ist aperiodisch).

Eine stationäre Verteilung existiert schon, wenn $\mathcal{P}$ irreduzibel ist.

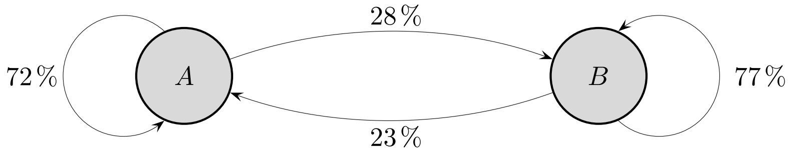
Eine reduzible Übergangsmatrix kann in der Form

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . \end{pmatrix}$$

bei entsprechender Umgruppierung der Zustände angegeben werden.

↑ Wählerwanderungen

Das Übergangsdiagramm erfasst die Wählerwanderungen zwischen den Parteien A und B.
Zum jetzigen Zeitpunkt wählen 42 % die Partei A, 58 % die Partei B.
Welche Prognosen sind möglich, wenn wir voraussetzen, dass die Übergangsquoten konstant bleiben?



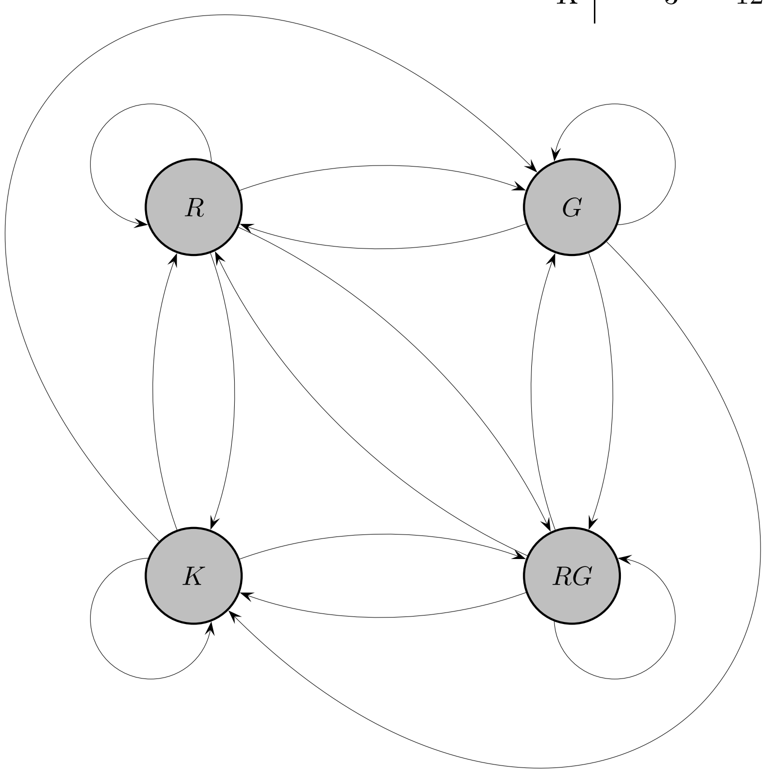
↑ Eichhörnchen-Aufgabe

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurden in England graue Eichhörnchen aus Amerika eingeführt, die nun mit den einheimischen roten Eichhörnchen konkurrierten.
Um die Veränderungen der Populationen zu erfassen, wurden Teile englischer Wälder in gleichgroße Bereiche aufgeteilt, in denen jährliche Zählungen (ab 1973) durchgeführt wurden.
Für die einzelnen Bereiche wurde das Vorhandensein der Eichhörnchen mit folgenden Zuständen unterschieden:

R	nur rote,
G	nur graue,
RG	rote und graue,
K	keine Eichhörnchen

Die 16 möglichen Übergänge von einem zum folgenden Jahr wurden ermittelt, z.B. gab es im Vorjahr in 35 Bereichen nur graue Eichhörnchen, jetzt gibt es dort nur noch rote.

		von			
		R	G	RG	K
	R	2529	35	257	5
nach	G	61	733	20	91
	RG	282	25	4311	335
	K	3	123	310	5930



Wie sieht die langfristige Entwicklung der Populationen aus?

↑ Eichhörnchen-Aufgabe Lösung

Die Übergangsmatrix lautet

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0{,}8797 & 0{,}0382 & 0{,}0525 & 0{,}0008 \\ 0{,}0212 & 0{,}8002 & 0{,}0041 & 0{,}0143 \\ 0{,}0981 & 0{,}0273 & 0{,}8802 & 0{,}0527 \\ 0{,}0010 & 0{,}1343 & 0{,}0630 & 0{,}9322 \end{pmatrix}$$

Die langfristige Entwicklung ergibt sich aus

$$\mathcal{T}^{100} = \begin{pmatrix} 0{,}1705 & 0{,}1705 & 0{,}1705 & 0{,}1705 \\ 0{,}0560 & 0{,}0560 & 0{,}0560 & 0{,}0560 \\ 0{,}3422 & 0{,}3422 & 0{,}3422 & 0{,}3422 \\ 0{,}4314 & 0{,}4314 & 0{,}4314 & 0{,}4314 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{T}^{120}$ weicht einzig in $0{,}3422$ ab und enthält $0{,}3421$.

17,1 % der Bereiche enthalten nur rote, 5,6 % nur graue Eichhörnchen.
Beide Arten finden sich in 34,2 %, keine Eichhörnchen in 43,1 % der Bereiche.
Befürchtungen, dass die grauen die roten Eichhörnchen verdrängen, werden hierdurch nicht bestätigt. Es wurden jedoch nur Bereiche gezählt und keine Populationsgrößen in den Bereichen.

Das langfristige Verhalten eines Systems kann mit

$\vec{v}_{n+1} = \mathcal{A} \cdot \vec{v}_n$, Startvektor $\vec{v}_0$

GTR: $[A] * [B] \to [B]$, ENTER-Taste (wiederholt)
Der Startvektor ist eine 2×1-Matrix.

oder

$\vec{v}_n = \mathcal{A}^n \cdot \vec{v}_0$

oder einer Betrachtung der Eigenwerte (soweit vorhanden) untersucht werden.
$\vec{v}_0$ wird dann als Linearkombination der Eigenvektoren dargestellt.

Die Komponentensumme S von $\vec{v}_0$ bleibt bei der Iteration $\vec{v}_{n+1} = \mathcal{A} \cdot \vec{v}_n$ mit einer stochastischen Matrix erhalten. Für stochastische Matrizen (quadratisch, Spaltensumme = 1 (alle), lauter nicht negative Elemente) gilt, abgesehen von einigen Sonderfällen, die mit einer weiteren geforderten Bedingung ausgeschlossen werden können (siehe nächste Seite):
Alle Anfangsverteilungen mit der Komponentensumme S konvergieren gegen denselben Grenzvektor (dieselbe Grenzverteilung): $\vec{v}_n \longrightarrow \vec{v}_\infty$
$\mathcal{A}^n$ konvergiert gegen die Grenzmatrix $\mathcal{A}^\infty$.

Für diesen Grenzvektor gilt:

$$\mathcal{A} \cdot \vec{v}_\infty = \vec{v}_\infty$$

d. h. es ist der Vektor einer stationären Verteilung (einer stabilen Grenzverteilung, Fixvektor, Eigenvektor zum Eigenwert 1).

Das Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$ ist nicht eindeutig lösbar (unterbestimmt).

Eine Gleichung (z. B. die letzte) ist von den anderen abhängig und daher überflüssig. Sie kann durch die Nebenbedingung $x + y + z = S$ ausgetauscht werden. Es existiert dann eine eindeutige Lösung.

Für einen Startvektor $\vec{v}_0$ mit der Spaltensumme $S = 1$ beinhaltet $\vec{v}_0$ die anfänglichen relativen Häufigkeiten (Anteile) für die einzelnen Zustände, bzw. die anfängliche prozentuale Verteilung, bzw. die anfänglichen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten eines Startteilchens.

Die Grenzmatrix $\mathcal{A}^\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}^n$ hat gleiche Spaltenvektoren. Diese stimmen mit der prozentualen Grenzverteilung (stationären Verteilung mit Spaltensumme $S = 1$) überein: $\mathcal{A}^\infty = [\vec{p}, \vec{p}, \vec{p}]$.
Die Grenzverteilung zu einem Startvektor mit der Spaltensumme S lautet dann einfach: $\vec{v}_\infty = S \cdot \vec{p}$.

Blick in die Vergangenheit:
Um $\vec{v}_{-1}$ bei gegebenem $\vec{v}_0$ zu ermitteln, ist das Gleichungssystem $\mathcal{A} \cdot \vec{v}_{-1} = \vec{v}_0$ zu lösen.
In $\vec{v}_{-1}$ muss die Komponentensumme S von $\vec{v}_0$ erhalten bleiben.
Eine Gleichung (z. B. die letzte) des Gleichungssystems kann durch die Nebenbedingung $x + y + z = S$ ausgetauscht werden. Falls $\mathcal{A}^{-1}$ existiert, ist die Lösung $\vec{v}_{-1} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \vec{v}_0$ (sofern die Komponenten von $\vec{v}_{-1}$ nicht negativ sind), falls nicht ($\mathcal{A}$ singulär), dann ist das Gleichungssystem unterbestimmt (dieser Fall ist selten und konstruiert). Aus der allgemeinen Lösung können die Grenzen für mögliche nicht negative Lösungen bestimmt werden (siehe Abitur 2008 NRW LK).

Ein Austauschprozess habe die Zustände Z_1, Z_2, Z_3 und den Startvektor $\vec{v}_0$.
$\vec{v}_1 = \mathcal{A} \cdot \vec{v}_0$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$a_{1,2}$ gibt an, welcher Anteil von Z_2 nach Z_1 übergeht,
$a_{i,j}$ gibt an, ...

$\vec{v}_2 = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{A} \cdot \vec{v}_0) = \mathcal{A}^2 \cdot \vec{v}_0$

$$\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$b_{1,2}$ gibt an, welcher Anteil von Z_2 nach Z_1 nach 2 Takten (in 2 Schritten) übergeht, $b_{i,j}$ gibt an, ...

Für eine stochastische Matrix $\mathcal{A}$ konvergiert $\mathcal{A}^n$ nicht in jedem Fall gegen eine Grenzmatrix. Die Grenzverteilung, sofern sie existiert, kann von der Anfangsverteilung abhängig sein. All dieses kann ausgeschlossen werden, wenn für ein k $\mathcal{A}^k$ lauter positive Elemente hat. $\mathcal{A}$ heißt dann regulär. Diese Eigenschaft ist gleichbedeutend damit, dass von jedem Zustand aus jeder andere in endlich vielen Schritten erreichbar ist ($\mathcal{A}$ ergodisch oder irreduzibel, d. h. zerfällt nicht in zwei unabhängige Teile) und dass $\mathcal{A}$ kein periodisches Verhalten aufweist wie z. B.

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Hier gilt: $\mathcal{Q}^3 = \mathcal{Q},\ \mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}^4$

Eine Matrix $\mathcal{Q}$ heißt absorbierend, wenn sie Diagonalelemente mit dem Wert 1 besitzt.

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Alle anderen Elemente der entsprechenden Spalte haben dann den Wert 0. Dies bedeutet, dass es (mindestens) einen Zustand gibt, von dem aus die anderen Zustände nicht mehr erreichbar sind. Daraus folgt auch, dass absorbierende stochastische Matrizen weder regulär noch ergodisch sind. Ihre Grenzmatrizen unterscheiden sich in der Form von denen regulärer Matrizen.

Ein Austauschprozess (Markow-Kette) ist ein stochastischer Prozess “ohne Gedächtnis“.
Was heißt das?

↑ Was könnte gefordert sein?

1. eine Problemstellung in eine Übergangsmatrix bzw. in ein Zustandsdiagramm übersetzen,

2. Folgezustände (Anfangszustand gegeben) berechnen,
   im Falle der Konvergenz von Übergangsprozessen die stationäre Verteilung berechnen,
   allgemeiner das langfristige Verhalten ermitteln,

3. Parameter in einer Übergangsmatrix deuten und Auswirkungen auf das Langzeitverhalten einer Parametervariation bzw. einer Variation der Anfangsverteilung untersuchen,

4. einzelne Komponenten $a_{i,j}$ einer Übergangsmatrix $\mathcal{M}$, bzw. einer Potenz $\mathcal{M}^2$, $\mathcal{M}^3$, $\ldots$ deuten,

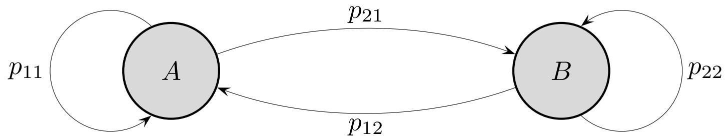
5. vermutete Grenzverteilung nachweisen mit $\vec{v}_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{M}^n \cdot \vec{v}_0$
   oder bei stochastischen Prozessen mit $\vec{v}_\infty = \mathcal{M} \cdot \vec{v}_\infty$,

6. zyklisches Verhalten nachweisen,

7. expandierende, konvergierende und zerfallende Systeme analysieren,

8. eine Verteilung „in der Vergangenheit“ ermitteln,

↑ Stationäre Verteilung



Für eine stationäre Verteilung gilt:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

d. h.

$$\begin{array}{ccccc} p_{11}a & + & p_{12}b & = & a \\ p_{21}a & + & p_{22}b & = & b \end{array}$$

Diese Gleichungen sind äquivalent zu:

$$\begin{array}{ccc} p_{12}b & = & (1-p_{11})\,a \\ p_{21}a & = & (1-p_{22})\,b \end{array}$$

oder:

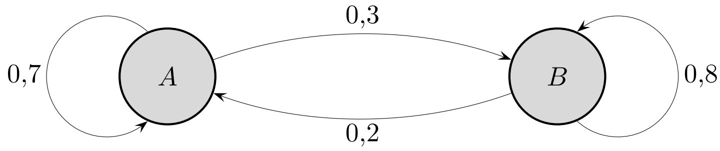
$$\begin{array}{ccc} p_{12}b & = & p_{21}a \\ p_{21}a & = & p_{12}b \end{array}$$

Die beiden Gleichungen sind identisch. Eine Gleichung wird man daher mit der Nebenbedingung $a+b=1$, bzw. $a+b=S$, austauschen.

Die Gleichung $\quad p_{21}a \quad = \quad p_{12}b$

ist unmittelbar einsichtig. Ein Gleichgewichtszustand kann nur vorliegen, wenn sich Zu- und Abfluss ausgleichen.

Für das Beispiel:



gilt daher für den stationären Zustand:

$$0{,}3\,a = 0{,}2\,b$$

oder $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3} \qquad$ d. h. $\quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} S$