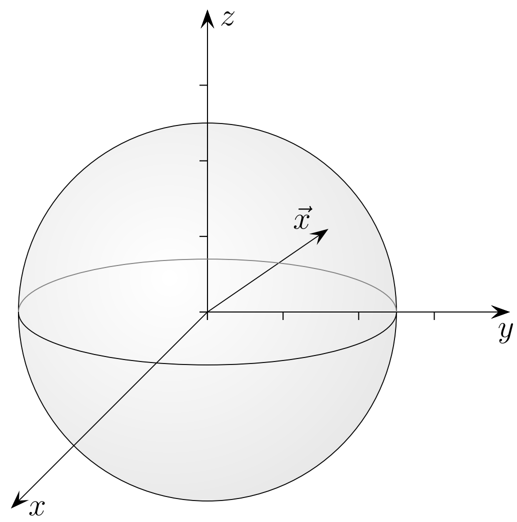
Kugel



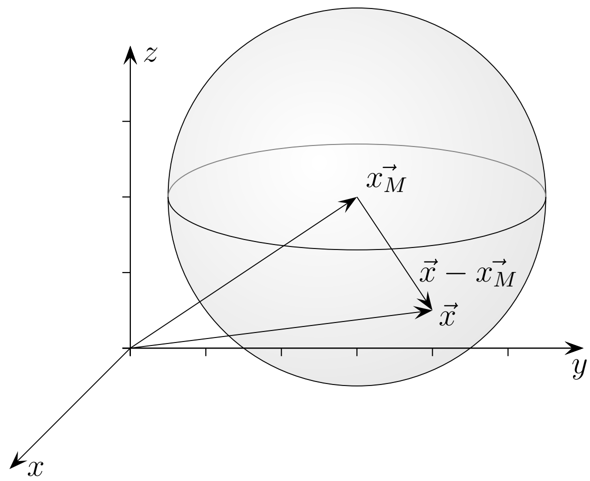
Eine Kugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, ist durch den Radius r festgelegt. Für einen Vektor $\vec{x}$, der zu einem Punkt auf der Kugeloberfläche führt, muss gelten: $\mid \vec{x} \mid = r$, wobei mit $\mid \vec{x} \mid$ die Länge von $\vec{x}$ gemeint ist.

Nun gilt: $\mid \vec{x} \mid \; = \; \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \; = \; \sqrt{\vec{x}^{\,2}}$, wobei $x,\ y,\ z$ die Koordinaten von $\vec{x}$ sind. Durch Quadrieren erhalten wir die *Kugelgleichung:*

$$\vec{x}^{\,2} \; = \; r^2$$

1. Gegeben ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius $r = 6$. In welchen Punkten schneidet die Gerade

   $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Kugel?



Eine Kugel mit *beliebigem Mittelpunkt* ist durch den Vektor $\vec{x}_M$, der zum Mittelpunkt führt, und dem Radius r festgelegt. Für einen Vektor, der zu einem Punkt auf der Kugeloberfläche führt, muss gelten: $\mid \vec{x} - \vec{x}_M \mid \; = \; r$.
Durch Quadrieren erhalten wir die *allgemeine Kugelgleichung:*

$$(\vec{x} - \vec{x}_M)^2 \; = \; r^2$$

Kugel

1. Gegeben ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius $r = 6$. In welchen Punkten schneidet die Gerade

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{die Kugel?}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Schnittbedingung:} & \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 & = & 36 \\ \text{4. Rechenregel} & 66 + 40\lambda + 10\lambda^2 & = & 36 \\ & \lambda_{1/2} & = & -2 \pm \sqrt{4-3} \\ & \lambda_1 = -1, & & \lambda_2 = -3 \end{array}$$

Die λ-Werte in die Geradengleichung eingesetzt, ergeben die Schnittpunkte: $S_1(2\,|\,4\,|\,4)$ und $S_2(-4\,|\,2\,|\,4)$.

2. Berechne die Schnittpunkte von der Geraden g und der Kugel K.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad K: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^2 = 13^2$$

Kugel

2. Berechne die Schnittpunkte von der Geraden g und der Kugel K.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad K: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 13^2$$

Lösung:

$$\text{Schnittbedingung:} \quad \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 169$$

$$\text{zusammenfassen} \quad 257 + 50\lambda + 3\lambda^2 = 169$$

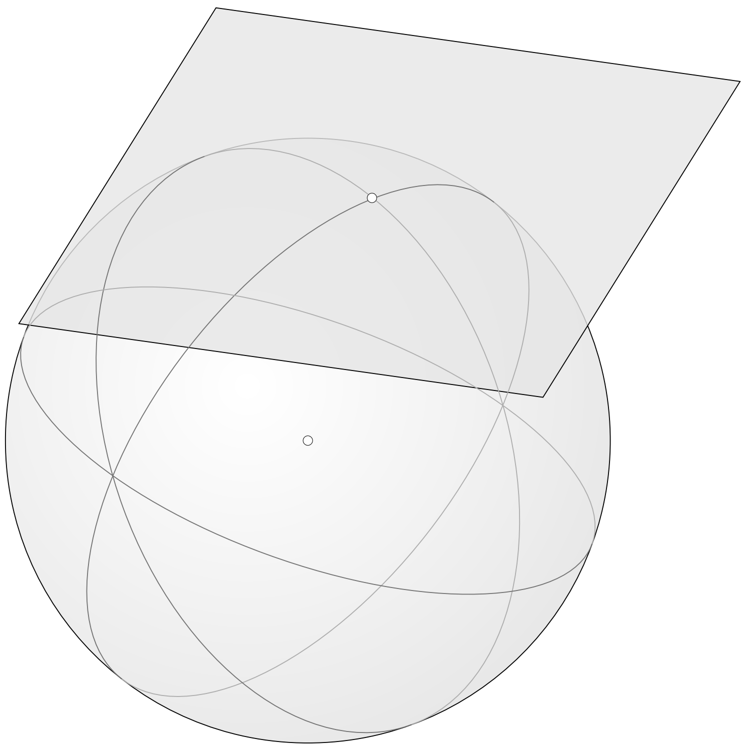
$$\lambda^2 + \frac{50}{3}\lambda + \frac{88}{3} = 0$$

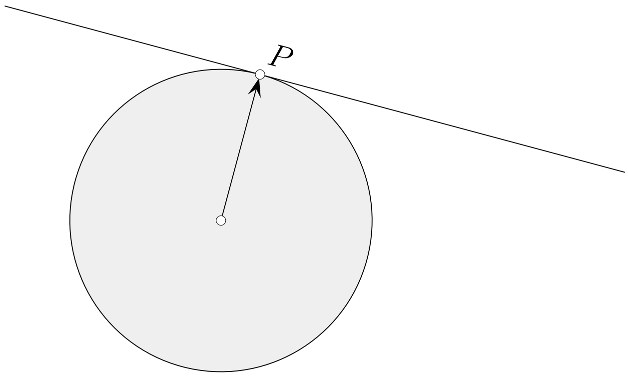
$$\lambda_1 = -2, \qquad \lambda_2 = -\frac{44}{3}$$

Die λ-Werte in die Geradengleichung eingesetzt, ergeben die Schnittpunkte:

$S_1(4 \mid 6 \mid 2)$ und $S_2\left(-\frac{26}{3} \mid -\frac{20}{3} \mid -\frac{32}{3}\right)$.

Tangentialebene





Die Normalenform der Tangentialebene einer Kugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, kann unmittelbar angegeben werden (Berührpunkt sei P):

$$\overrightarrow{OP}\cdot\left(\vec{x}-\overrightarrow{OP}\right)=0$$

Für eine Kugel mit dem Mittelpunkt M lautet die Normalenform allgemeiner:

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{x}-\overrightarrow{OP}\right)=0 \qquad \text{mit} \quad \vec{n}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}$$

Koordinatenform der Kugelgleichung

Die Kugelgleichung

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = 25$$

kann auch in der Form

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$$

geschrieben werden.

Umgekehrt kann eine Koordinatenform

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z = 4$$

durch binomische Ergänzungen

$$x^2 + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 2z + 1) = 4 + 4 + 1$$

$$x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$$

in eine Vektorform

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$$

überführt werden,
aus der dann der Mittelpunkt und der Radius erkennbar sind.

Bestimme den Mittelpunkt und den Radius der Kugel: $x^2 + 10x + y^2 + z^2 - 8z = 8$

Lösung:
$M(-5\,|\,0\,|\,4),\ \ r = 7$