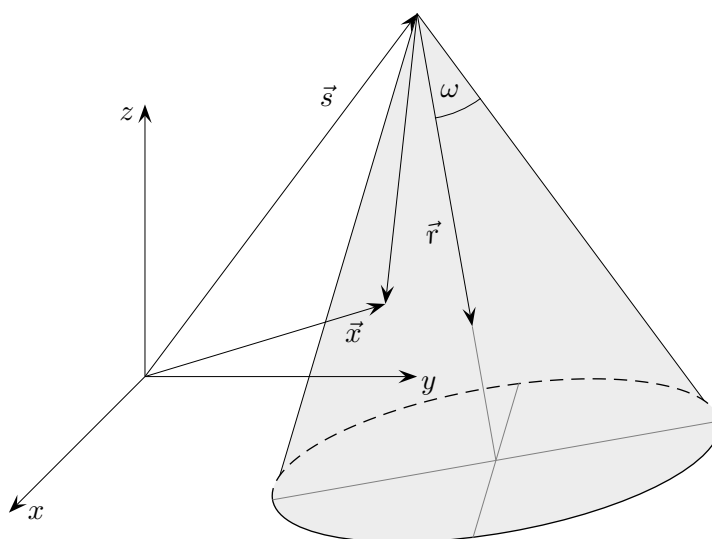


Kegelschnitte



Die allgemeine Kegelgleichung lautet:

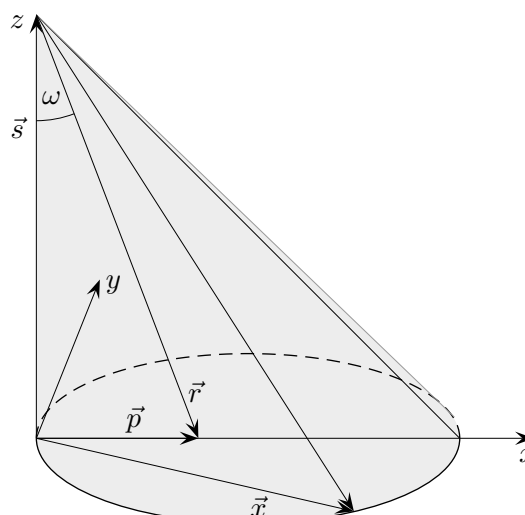
$$(\vec{x} - \vec{s}) \cdot \vec{r} = |\vec{x} - \vec{s}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos \omega$$

Beispiel: $\omega = 60^\circ$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

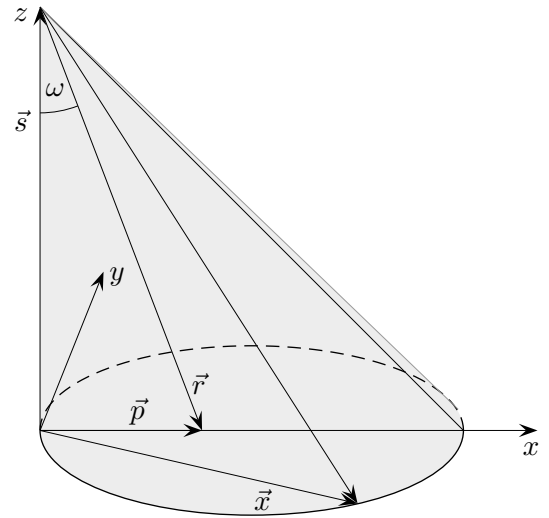
Kegelgleichung: $x^2 + y^2 - 3z^2 + 6z = 3$

Schnitt mit der xy -Ebene: $x^2 + y^2 = 3$

Wir wollen auch die Gleichungen der Kurven ermitteln, die beim schrägen Schnitt eines Kegels mit einer Ebene auftreten. Als Kegel wählen wir einen sogenannten Steilkegel (Mantellinie auf der z -Achse), als Ebene die xy -Ebene.



Kegelschnitte



$$\begin{aligned}
 -\vec{s} \cdot \vec{r} &= |\vec{s}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos \omega \\
 (\vec{x} - \vec{s}) \cdot \vec{r} &= |\vec{x} - \vec{s}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos \omega \\
 \frac{-\vec{s} \cdot \vec{r}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{r}|} &= \frac{(\vec{x} - \vec{s}) \cdot \vec{r}}{|\vec{x} - \vec{s}| \cdot |\vec{r}|} & | \cdot |\vec{r}|, \vec{r} = \vec{p} - \vec{s}, \vec{s} \perp \vec{p} \\
 \frac{\vec{s}^2}{|\vec{s}|} &= \frac{(\vec{x} - \vec{s}) \cdot (\vec{p} - \vec{s})}{\sqrt{(\vec{x} - \vec{s})^2}} & | |\vec{s}| = \sqrt{\vec{s}^2}, |\vec{s}|^2 = \vec{s}^2, \vec{x} \perp \vec{s} \\
 |\vec{s}| &= \frac{\vec{x} \cdot \vec{p} + \vec{s}^2}{\sqrt{\vec{x}^2 + \vec{s}^2}} & | ()^2 \\
 \vec{x}^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{p})^2}{\vec{s}^2} &= 2 \vec{x} \cdot \vec{p} & | \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \\
 \dots & & | \epsilon = \frac{p}{s}
 \end{aligned}$$

Scheitelform: $y^2 = 2px - (1 - \epsilon^2)x^2$

Parabel	für $\epsilon^2 = 1$	<i>paraballein</i> gr. gleichsetzen
Ellipse	$\epsilon^2 < 1$	<i>elleipein</i> fehlenlassen
Hyperbel	$\epsilon^2 > 1$	<i>hyperballein</i> übertreffen

Die Quadratfläche y^2 wird mit der Rechteckfläche $2px$ verglichen.

1. Von einem Kegel sind gegeben:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \omega = 30^\circ$$

Ermittle die Gleichung der Schnittkurve mit der xy -Ebene.

2. Von einem Steilkegel sind gegeben:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ermittle die Gleichung der Schnittkurve mit der xy -Ebene, ohne die Formel für die Scheitelform zu benutzen. Verschiebe die Schnittkurve so, dass eine symmetrische Form entsteht.

Kegelschnitte Kurzfassung

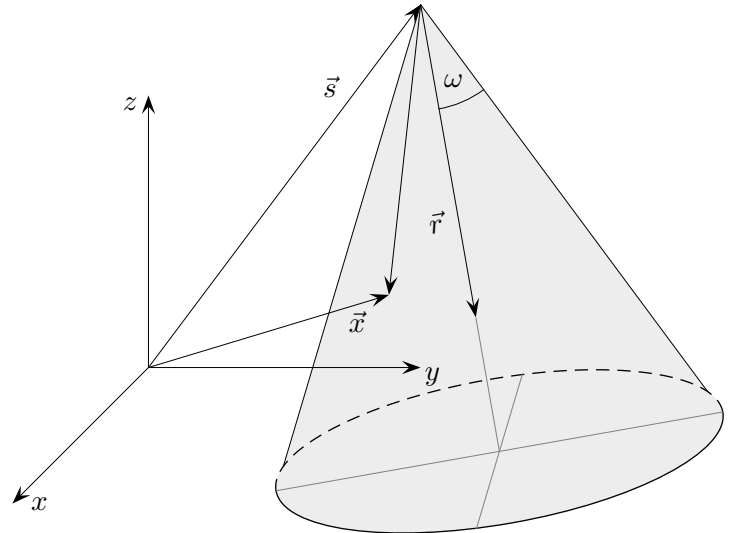
Die allgemeine Kegelgleichung lautet:

$$(\vec{x} - \vec{s}) \cdot \vec{r} = |\vec{x} - \vec{s}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos \omega$$

Beispiel: $\omega = 60^\circ, \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Kegelgleichung: $x^2 + y^2 - 3z^2 + 6z = 3$

Schnitt mit der xy -Ebene: $x^2 + y^2 = 3$



Wir wollen auch die Gleichungen der Kurven ermitteln, die beim schrägen Schnitt eines Kegels mit einer Ebene auftreten.

1. Von einem Kegel sind gegeben:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \omega = 30^\circ$$

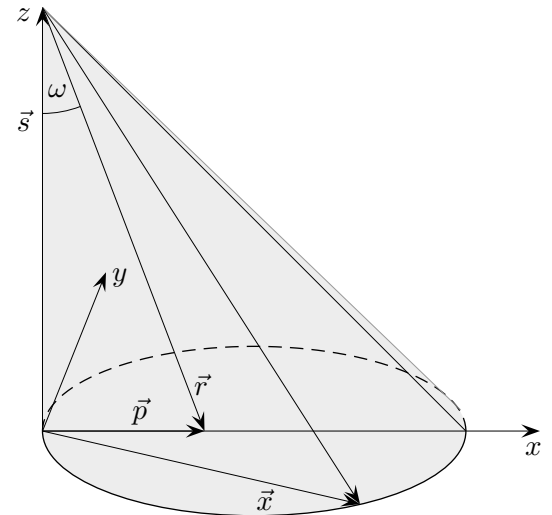
Ermittle die Gleichung der Schnittkurve mit der xy -Ebene.

2. Von einem Steilkegel (Mantellinie auf der z -Achse) sind gegeben:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ermittle die Gleichung der Schnittkurve mit der xy -Ebene.

Verschiebe die Schnittkurve so, dass eine symmetrische Form entsteht.



Lösungen:

1. $2x^2 + 3y^2 = \frac{9}{2}$

2. $y^2 = 2x - \frac{2x^2}{3}, \quad \text{Verschiebung: } a = \frac{3}{2}, \quad 2x^2 + 3y^2 = \frac{9}{2}$