Aufgaben Vektorrechnung

1. Haus-Aufgabe
2. Prisma
3. Turm
4. Pyramide
5. Antennenmast
6. Segeltuch
7. Walmdach
8. Flugbahn
9. Aufgabe für die mündliche Prüfung
10. Geradenschar

Differenzial- und Integralrechnung

Vektorrechnung

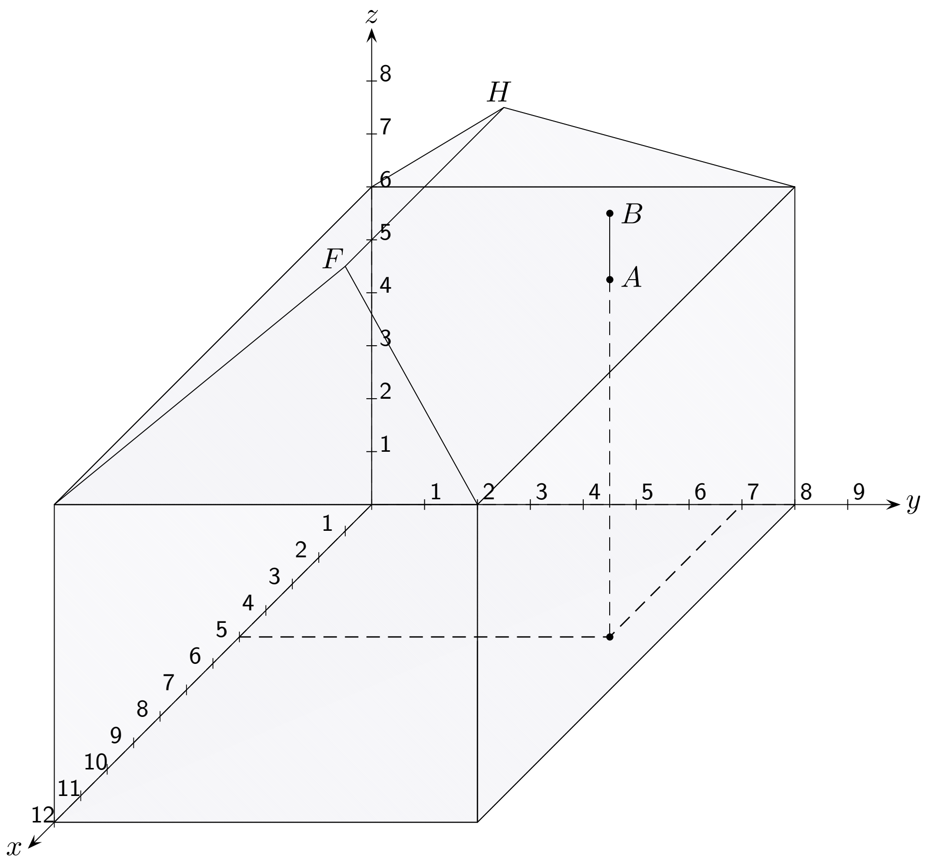
VR Aufgaben

VR weitere Aufgaben

Stochastik

Startseite

↑ Vektorrechnung Haus-Aufgabe



Der First des Walmdaches hat die Endpunkte $F(9\,|\,4\,|\,9)$ und $H(3\,|\,4\,|\,9)$ (in m).

a) Bestimmen Sie das Volumen des Hauses, einschließlich des Dachraumes.

b) Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den eine kleine Dachfläche mit einer großen einschließt.

c) Ein $8\,m$ langes Abluftrohr (vom Boden aus gemessen) durchstößt das Dach im Punkt A und endet in B. Berechnen Sie die Koordinaten von A, sowie den Abstand von B zur Dachfläche, in der A liegt.

↑ Haus-Aufgabe Ergebnisse

a) $V = 12 \cdot 8 \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot 6 = 696\ [m^3]$
Quader + Pyramide (zusammengefasst) + Prima

b) große Dachfläche: $3y + 4z = 48,$ kleine Dachfläche: $x + z = 18,$ $\alpha = 55{,}6°$

c) $A(5\,|\,7\,|\,6{,}75),$ $d = 1\,m$

↑ Prisma-Aufgabe

Gegeben sind ein dreiseitiges Prisma $ABCDEF$ durch die Eckpunkte $A(12 \mid 0 \mid 0)$, $B(12 \mid 6 \mid 0)$, $C(0 \mid 6 \mid 0)$, $D(0 \mid 0 \mid 0)$, $E(12 \mid 0 \mid 3)$, $F(0 \mid 0 \mid 3)$ sowie die Gerade g durch die Punkte $G(6 \mid 8 \mid 5)$ und $H(6 \mid 6 \mid 3)$.

a) Stellen Sie das Prisma $ABCDEF$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene $BCFE$.

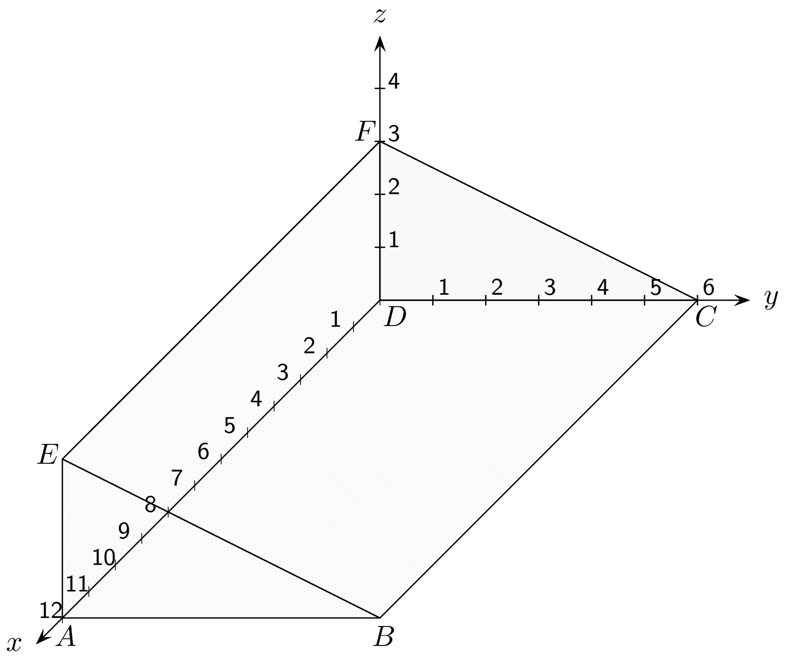
c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes G von der Geraden EF.

d) Gegeben ist eine Ebenenschar E_k durch die Gleichung $x+ky = 12$, $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass alle Ebenen dieser Schar durch A und E gehen. Genau eine Ebene dieser Schar verläuft durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$. Bestimmen Sie den Wert von k für diese Ebene.

e) Auf der Strecke $\overline{BC}$ liegt ein Punkt $P(a \mid 6 \mid 0)$, so dass das Volumen der dreiseitigen Pyramide $PBDF$ genau 9 Volumeneinheiten beträgt. Berechnen Sie a.

↑ Prisma-Aufgabe Ergebnisse

a)



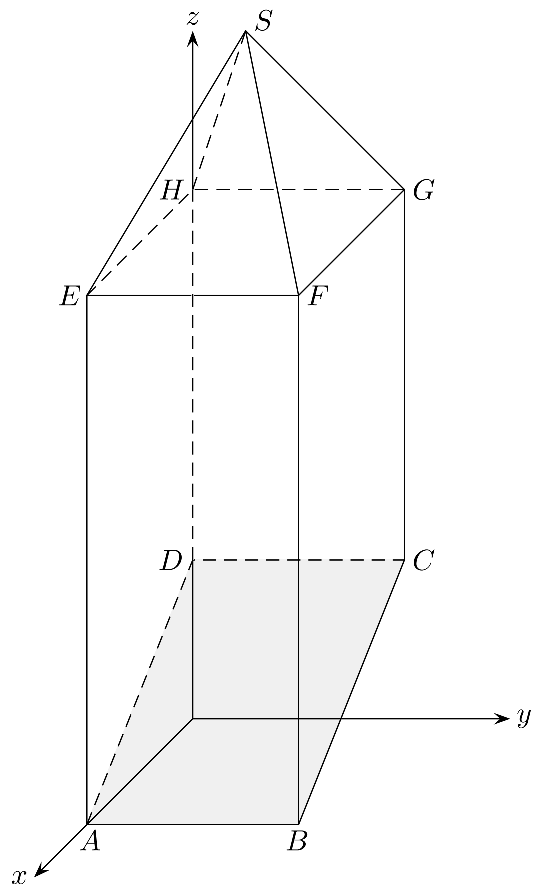
b) $S(6 \mid 4 \mid 1)$, $\alpha = 71{,}6°$

c) $d = 8{,}25\ LE$

d) $k = 4$

e) $a = 9$

↑ Turm-Aufgabe



An einem Hang wird ein Turm errichtet. Dieser Turm kann als ein von einer Ebene geschnittener Quader mit aufgesetzter gerader Pyramide aufgefasst werden. Die Höhe der aufgesetzten Pyramide beträgt $4\,m$. Folgende Punkte sind bekannt: $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,4\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,3)$, $F(4\,|\,4\,|\,10)$ und $H(0\,|\,0\,|\,10)$ (in m).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C, E, G und S.

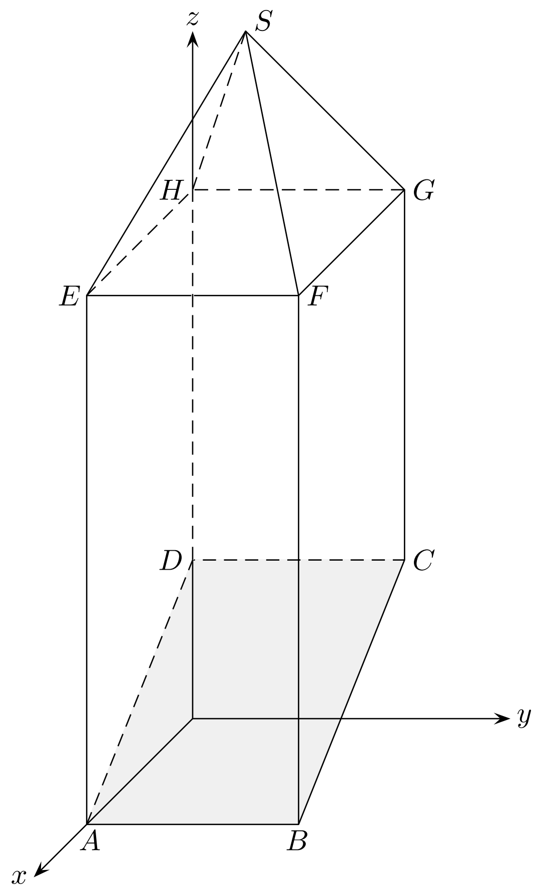
b) Der Steilhang liegt in der Ebene, die durch die Punkte A, B, C und D geht. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform auf.

c) Ein Sonnenstrahl, dessen Richtung durch den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden kann, erzeugt auf dem Hang im Punkt S' einen Schatten der Turmspitze S. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes S' und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Sonnenstrahl auf den Hang trifft.

d) An den Punkten F und H wird ein $6\,m$ langes Seil befestigt. Genau in die Mitte T des durchhängenden Seiles wird eine schwere Lampe gehängt. Bestimmen Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes des Seiles.

e) Zur besseren Stabilisierung soll der Turm am Eckpunkt H durch ein möglichst kurzes Stahlseil mit dem Berghang verbunden werden. Bestimmen Sie die minimale Länge des Stahlseils.

↑ Turm-Aufgabe



An einem Hang wird ein Turm errichtet. Dieser Turm kann als ein von einer Ebene geschnittener Quader mit aufgesetzter gerader Pyramide aufgefasst werden. Die Höhe der aufgesetzten Pyramide beträgt $4\,m$. Folgende Punkte sind bekannt: $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,4\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,3)$, $F(4\,|\,4\,|\,10)$ und $H(0\,|\,0\,|\,10)$ (in m).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C, E, G und S.
$C(0\,|\,4\,|\,3),\ E(4\,|\,0\,|\,10),\ G(0\,|\,4\,|\,10),\ S(2\,|\,2\,|\,14)$

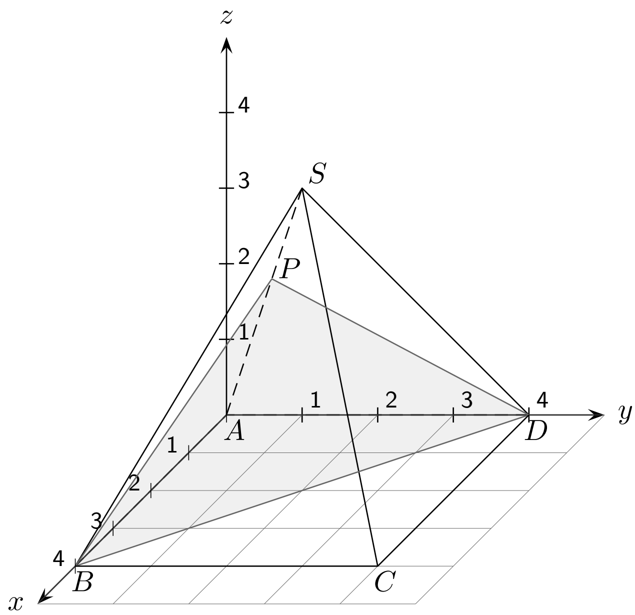
b) Der Steilhang liegt in der Ebene, die durch die Punkte A, B, C und D geht. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform auf. $3x + 4z = 12$

c) Ein Sonnenstrahl, dessen Richtung durch den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden kann, erzeugt auf dem Hang im Punkt S' einen Schatten der Turmspitze S. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes S' und berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Sonnenstrahl auf den Hang trifft. $S'(-8\,|\,7\,|\,9),\ \alpha = 54{,}7°$

d) An den Punkten F und H wird ein $6\,m$ langes Seil befestigt. Genau in die Mitte T des durchhängenden Seiles wird eine schwere Lampe gehängt. Bestimmen Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes des Seiles. $T(2\,|\,2\,|\,9)$ (Pythagoras)

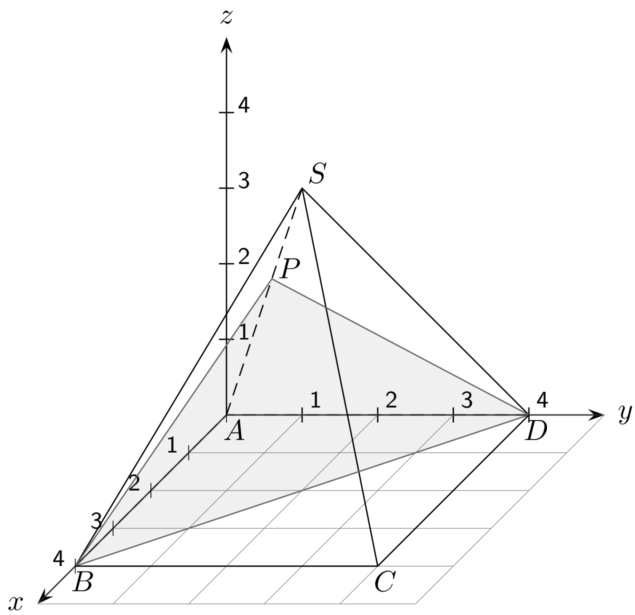
e) Zur besseren Stabilisierung soll der Turm am Eckpunkt H durch ein möglichst kurzes Stahlseil mit dem Berghang verbunden werden. Bestimmen Sie die minimale Länge des Stahlseils. $5{,}6\,m$

↑ Pyramide



Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Spitze $S(2\,|\,2\,|\,4)$.
Die Pyramide wird von Ebenen E_P geschnitten, die durch B, D und P verlaufen,
P liegt auf der Kante AS.
Für welchen Punkt P ist der Winkel $\measuredangle BPD$ maximal?
Gibt es mehrere Punkte P, für die der Winkel $\measuredangle BPD$ $90°$ beträgt?

↑ Pyramide



Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Spitze $S(2\,|\,2\,|\,4)$.
Die Pyramide wird von Ebenen E_P geschnitten, die durch B, D und P verlaufen,
P liegt auf der Kante AS.
Für welchen Punkt P ist der Winkel $\measuredangle BPD$ maximal?

$$P_\lambda(2\lambda\,|\,2\lambda\,|\,4\lambda)$$

$$\cos\alpha = \frac{3\lambda^2 - 2\lambda}{3\lambda^2 - 2\lambda + 2}$$

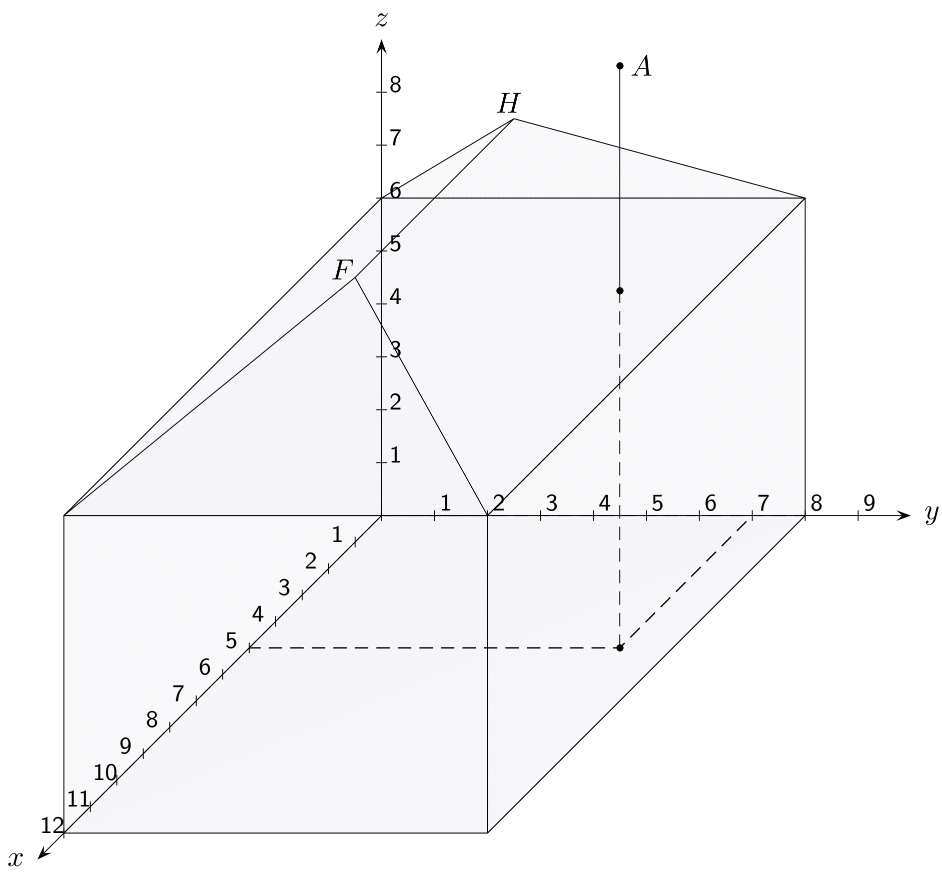
$$\alpha_{\max} = 101{,}5^\circ \text{ für } \lambda = \frac{1}{3}$$

Gibt es mehrere Punkte P, für die der Winkel $\measuredangle BPD$ 90° beträgt?

$$\cos\alpha = 0$$

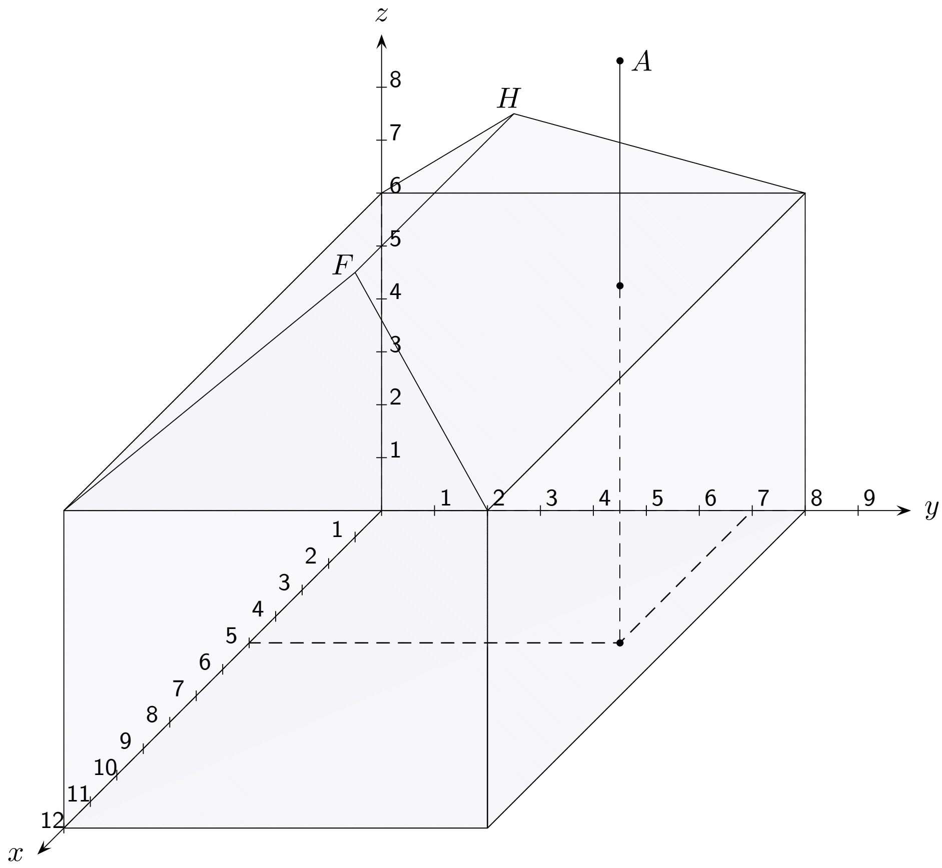
$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{2}{3}$$

↑ Antennenmast



Der First des Walmdaches hat die Endpunkte $F(9\,|\,4\,|\,9)$ und $H(3\,|\,4\,|\,9)$ (in m).
In A endet ein Antennenmast in $11\,m$ Höhe.
Wieviel ist vom Antennenmast vom Punkt $C(10\,|\,9\,|\,2)$ aus zu sehen?

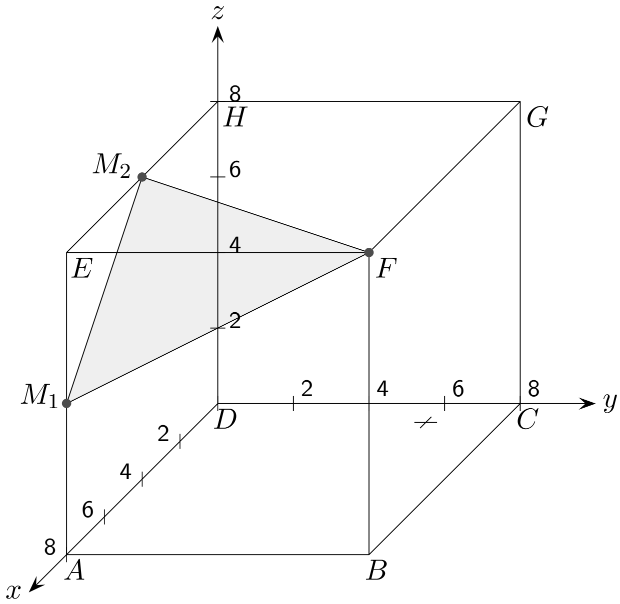
↑ Antennenmast



Der First des Walmdaches hat die Endpunkte $F(9\,|\,4\,|\,9)$ und $H(3\,|\,4\,|\,9)$ (in m).
In A endet ein Antennenmast in $11\,m$ Höhe.
Wieviel ist vom Antennenmast vom Punkt $C(10\,|\,9\,|\,2)$ aus zu sehen?

Die x-Koordinate von C hat keinen Einfluss auf das Ergebnis.
Die Aufgabe kann mit einer Strahlensatzfigur gelöst werden.
Alternativ wird die Ebene, auf der die Punkte C, $P(12\,|\,8\,|\,6)$ und $Q(0\,|\,8\,|\,6)$ liegen, mit der Geraden, die durch A und parallel zur z-Achse verläuft, geschnitten.
Die Ebenengleichung lautet $4y + z = 38$, der Schnittpunkt ist $S(5\,|\,7\,|\,10)$.
Es ist daher 1 Meter vom Mast zu sehen.

↑ Segeltuch



In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).
Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(8\,|\,0\,|\,0)$, $C(0\,|\,8\,|\,0)$ und $H(0\,|\,0\,|\,8)$ die entsprechenden Ecken des Raumes dar.

a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt. [mögliches Ergebnis: $S\colon\ 2x - y + 2z = 24$]
Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segeltuchs.
Ermitteln Sie den Abstand des Segeltuchs von der Ecke E.
Bestimmen Sie den Anteil des Volumens oberhalb des Segeltuches zum Gesamtvolumen des Raumes.
Ermitteln Sie den Winkel, den die Ebene S mit dem Boden des Ausstellungsraums einschließt.

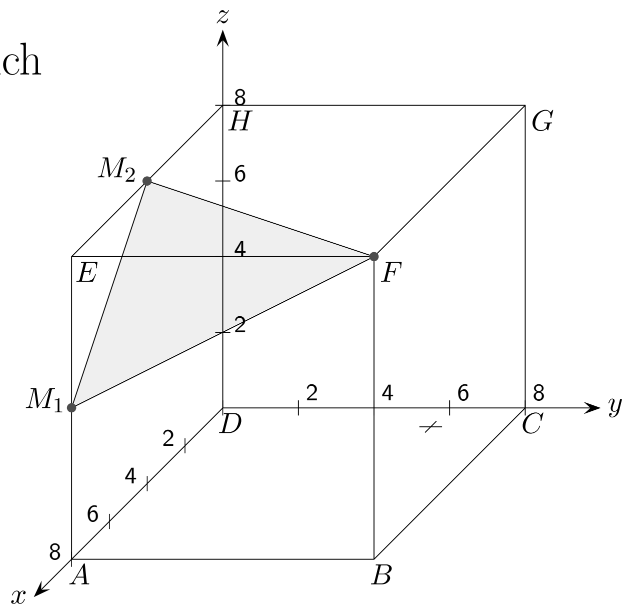
b) Auf der Diagonale AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. Der obere Teil der Stange berührt das Segeltuch. Ermitteln Sie die Stelle auf dem Boden, wo sich das untere Ende der Stange befindet.

c) Die Markierung (s. Abbildung) auf dem Boden ist 1 Meter von der hinteren Wand $DCGH$ und 2 Meter von der Wand $BCGF$ entfernt. Dort ist in einer Höhe von 2 Meter ein Laserpointer in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ angebracht. Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl das Segeltuch trifft.

d) Wir nehmen nun an, dass der Ausstellungsraum mit dem Segeltuch nur aus Kanten besteht, ohne Wände. Der Raum befindet sich im Freien und die Richtung der Sonnenstrahlen ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Weisen Sie nach: Der Schatten des Segeltuchs ist nur eine Strecke.
Berechnen Sie die Länge dieser Strecke.

e) Berechnen Sie den Winkel, den das Segeltuch im Punkt M_1 bildet.
Stellen Sie sich nun die Spitze des Segeltuches in M_1 auf der Kante $\overline{AE}$ beweglich vor.
Das Segeltuch ist elastisch, so dass es straff gespannt bleibt.
Ermitteln Sie den minimalen Winkel in M_1.
Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass für einen Punkt M_1 der Winkel 60° beträgt.

$\uparrow$ Segeltuch



In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).
Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(8 \mid 0 \mid 0)$, $C(0 \mid 8 \mid 0)$ und $H(0 \mid 0 \mid 8)$ die entsprechenden Ecken des Raumes dar.

a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung und eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt. [mögliches Ergebnis: $S\colon\ 2x - y + 2z = 24$]
Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat. Symmetrie, Spitze S
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segeltuchs. 24 FE
Ermitteln Sie den Abstand des Segeltuchs von der Ecke E. $d = \frac{8}{3}$
Bestimmen Sie den Anteil des Volumens oberhalb des Segeltuches zum Gesamtvolumen des Raumes. Anteil $\frac{1}{24}$
Ermitteln Sie den Winkel, den die Ebene S mit dem Boden des Ausstellungsraums einschließt. $\alpha = 48{,}2°$

b) Auf der Diagonale AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. Der obere Teil der Stange berührt das Segeltuch. Ermitteln Sie die Stelle auf dem Boden, wo sich das untere Ende der Stange befindet.

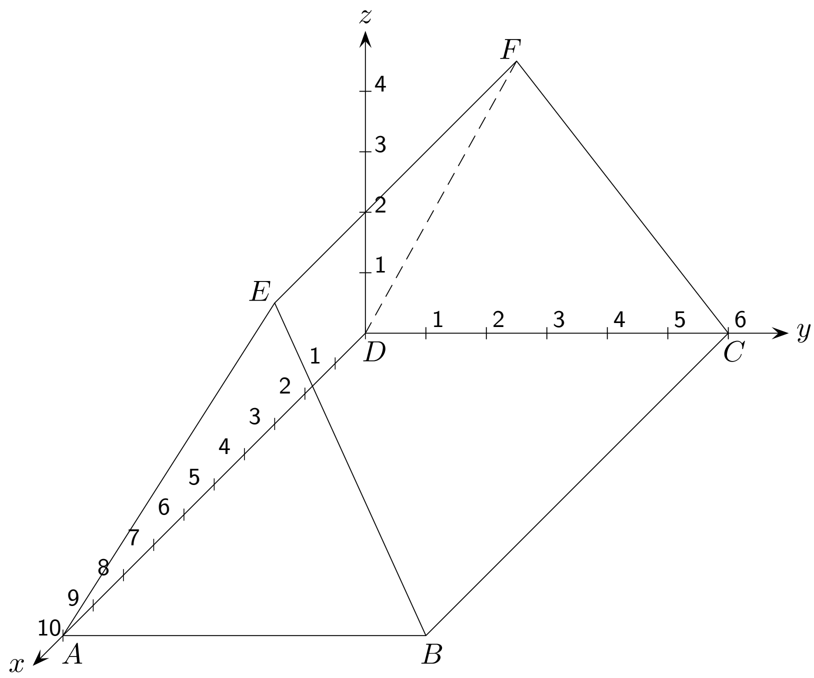
$$E \cap h,\ h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \lambda = \frac{1}{6},\quad Q\left(\frac{20}{3} \mid \frac{4}{3} \mid 0\right)$$

c) Die Markierung (s. Abbildung) auf dem Boden ist 1 Meter von der hinteren Wand $DCGH$ und 2 Meter von der Wand $BCGF$ entfernt. Dort ist in einer Höhe von 2 Meter ein Laserpointer in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ angebracht. Untersuchen Sie, ob der Laserstrahl das Segeltuch trifft. $E \cap g$
mögliche Parameter $\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $t = 2$, Laserstrahl trifft das Segeltuch, da $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ gilt.

d) Wir nehmen nun an, dass der Ausstellungsraum mit dem Segeltuch nur aus Kanten besteht, ohne Wände. Der Raum befindet sich im Freien und die Richtung der Sonnenstrahlen ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Weisen Sie nach: Der Schatten des Segeltuchs ist nur eine Strecke.
Berechnen Sie die Länge dieser Strecke. Richtungsvektor orthogonal zum Normalenvektor, $L = 8\sqrt{5}$

e) Berechnen Sie den Winkel, den das Segeltuch im Punkt M_1 bildet. 71,6°
Stellen Sie sich nun die Spitze des Segeltuches in M_1 auf der Kante $\overline{AE}$ beweglich vor.
Das Segeltuch ist elastisch, so dass es straff gespannt bleibt.
Ermitteln Sie den minimalen Winkel in M_1. $M_1 = A,\quad \beta = 50{,}8°$
Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass für einen Punkt M_1 der Winkel 60° beträgt.
$50{,}8° \leq \beta \leq 90°$

↑ Walmdach

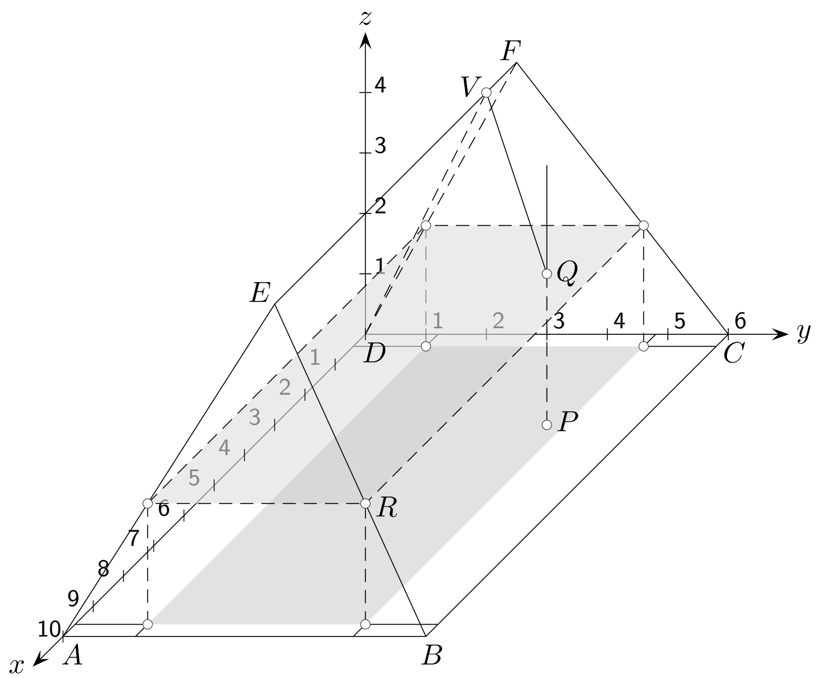


Das Walmdach eines Hauses wird durch die Punkte $A(10\,|\,0\,|\,0)$, $B(10\,|\,6\,|\,0)$, $C(0\,|\,6\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$, $E(9\,|\,3\,|\,5)$ und $F(1\,|\,3\,|\,5)$ beschrieben (Koordinatenangaben in Meter).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche ABE liegt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche ABE.
Die Dachfläche $BCFE$ liegt in der Ebene E: $5y + 3z = 30$.
Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Dachflächen ABE und $BCFE$.

b) Das Dachgeschoss des Hauses soll ausgebaut werden.
Als vollwertige Wohnfläche gilt nur die Fläche des Dachgeschosses, über der die Raumhöhe mindestens 2 m beträgt. Ermitteln Sie den Flächeninhalt der vollwertigen Wohnfläche.

c) Im Punkt $P(3\,|\,4{,}5\,|\,0)$ steht senkrecht zum Dachboden ein Antennenmast.
Der Mast durchstößt das Dach im Punkt Q. Von Q aus soll ein möglichst kurzes Antennenkabel über das Dach zum Punkt D gezogen werden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem das Kabel den Dachfirst EF überquert. Wie lang ist dieses Kabel?



Das Walmdach eines Hauses wird durch die Punkte $A(10\,|\,0\,|\,0)$, $B(10\,|\,6\,|\,0)$, $C(0\,|\,6\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$, $E(9\,|\,3\,|\,5)$ und $F(1\,|\,3\,|\,5)$ beschrieben (Koordinatenangaben in Meter).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche ABE liegt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche ABE. $A_\text{D} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{26}$ 15,3 m^2
Die Dachfläche $BCFE$ liegt in der Ebene E: $5y + 3z = 30$.
Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Dachflächen ABE und $BCFE$. $\beta = 95{,}8°$

Der Schnittwinkel der Ebenen, in denen die Dachflächen enthalten sind, beträgt $\beta = 84{,}2°$.

Die Dachflächen schließen den Winkel $\alpha = 180° - 84{,}2° = 95{,}8°$ ein $(\alpha > 90°)$.

b) Das Dachgeschoss des Hauses soll ausgebaut werden.
Als vollwertige Wohnfläche gilt nur die Fläche des Dachgeschosses, über der die Raumhöhe mindestens 2 m beträgt. Ermitteln Sie den Flächeninhalt der vollwertigen Wohnfläche.

Denke dir eine in 2 m Höhe eingezogene Decke.

Es genügt (Symmetrie), den Schnittpunkt R der Kante BE mit der Ebene $z = 2$ zu bestimmen.

$R(9{,}6\,|\,4{,}8\,|\,2)$

$a = 4{,}8 - (6 - 4{,}8) = 3{,}6$

$b = 9{,}6 - (10 - 9{,}6) = 9{,}2$

$A = a \cdot b = 33{,}12$ $[\text{m}^2]$

c) Im Punkt $P(3\,|\,4{,}5\,|\,0)$ steht senkrecht zum Dachboden ein Antennenmast.
Der Mast durchstößt das Dach im Punkt Q. Von Q aus soll ein möglichst kurzes Antennenkabel über das Dach zum Punkt D gezogen werden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem das Kabel den Dachfirst EF überquert. Wie lang ist dieses Kabel?

Der Schnitt einer senkrechten Geraden durch P mit der Ebene E ergibt $Q(3\,|\,4{,}5\,|\,2{,}5)$.

Ein Punkt V auf dem First hat die Koordinaten $V(1 + s\,|\,3\,|\,5)$ mit $0 \le s \le 8$.

Länge des Kabels: $d(s) = |\overrightarrow{QV}| + |\overrightarrow{DV}| = \sqrt{(1+s)^2 + 34} + \sqrt{(2-s)^2 + 8{,}5}$

Minimum für $s = 1$ mit $d_\text{min} = 9{,}25$ [m]

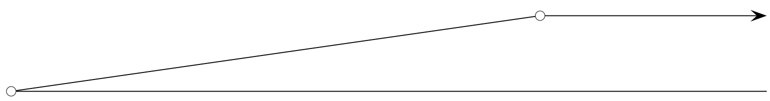
$V(2\,|\,3\,|\,5)$

Alternativ: Eine Projektion in die xy-Ebene führt zum Schnitt der Geraden $y = \frac{4{,}5}{3}x$ und $y = 3$ mit $x = 2$. Alternativ: V liegt in der Ebene DPQ.

↑ Flugbahn Hessen LK 2017 *abgeändert*

Eine Radarstation überwacht die Bewegung eines Flugzeugs. Die Bewegung kann modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden, dessen xy-Ebene die Horizontale beschreibt. Eine Längeneinheit entspricht einem Kilometer in der Realität.
Der Standort der Radarstation wird durch den Punkt $R(18 \mid 0 \mid -1)$ beschrieben und die Position des Flugzeugs zu Beginn der Beobachtung um 14:00 Uhr durch den Punkt $A(0 \mid 0 \mid 0)$. Anschließend bewegt sich das Flugzeug entlang einer Geraden durch den Punkt $B(8 \mid 4 \mid 1)$, der die Position um 14:02 Uhr darstellt. Ab 14:14 Uhr fliegt das Flugzeug in gleicher Himmelsrichtung horizontal weiter. Im Modell bleibt es dabei in der Ebene, die die Punkte A und B enthält und zur xy-Ebene senkrecht steht. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass das Flugzeug von 14:00 Uhr bis 14:14 Uhr mit konstanter Geschwindigkeit fliegt.

1. a) Berechnen Sie für die Zeit bis 14:14 Uhr den Steigungswinkel der Flugbahn gegenüber der Horizontalen. Geben Sie die Koordinaten des Punktes an, der die Position des Flugzeugs um 14:10 Uhr darstellt.



   b) Die Abbildung zeigt schematisch die Flugbahn des Flugzeugs sowie die Horizontale. Zeichnen Sie die Positionen des Flugzeugs zu den Zeitpunkten 14:02 Uhr und 14:10 Uhr ein.

   c) Ermitteln Sie für die Zeit bis 14:14 Uhr die Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde.

   d) Geben Sie eine Gleichung der Strecke an, die die Flugbahn von 14:00 Uhr bis 14:14 Uhr beschreibt.

2. Zu einem bestimmten Zeitpunkt zwischen 14:00 Uhr und 14:14 Uhr ist die Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation am geringsten. Die bis dahin seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit soll in Minuten bestimmt werden. Dafür werden zwei verschiedene Lösungsansätze I und II betrachtet:

$$\text{I:}\quad d(t) = \left| \begin{pmatrix} 18-8t \\ -4t \\ -1-t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{81t^2 - 286t + 325} \qquad\qquad \text{II:}\quad \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18-8t \\ -4t \\ -1-t \end{pmatrix} = 0$$

$$d'(t) = 0$$

   a) Erläutern Sie die beiden Lösungsansätze im Sachzusammenhang.

   b) Berechnen Sie die geringste Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation, indem Sie einen der beiden Ansätze bis zur Lösung fortsetzen.

3. Ist das Flugzeug mehr als 70 km von der Radarstation entfernt, so kann es von dieser nicht mehr erfasst werden. Die Position, an der das Flugzeug nach 14:14 Uhr den Erfassungsbereich der Radarstation verlässt, wird im Modell durch einen Punkt dargestellt. Ermitteln Sie dessen Koordinaten.

4. Das Flugzeug überfliegt eine geneigte Hangfläche, die in der Ebene E mit $E\colon -x + 25z = 0$ liegt. Durch das Sonnenlicht wirft das Flugzeug um 14:02 Uhr einen Schatten auf die Hangfläche.

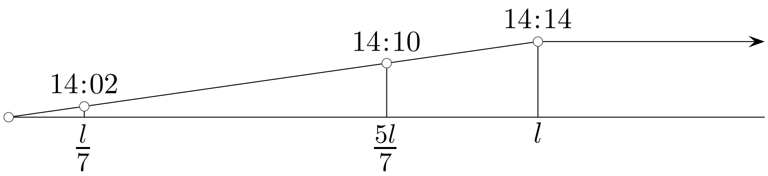
   Die Richtung des Sonnenlicht wird durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschrieben.

   Berechnen Sie den Schattenpunkt des Flugzeuges um 14:02 Uhr.

↑ Flugbahn Hessen LK 2017 *abgeändert*

1. a) Steigungswinkel $\alpha = \arctan \dfrac{1}{\sqrt{8^2+4^2}} = 6{,}38°$

   b) Flugzeugpositionen



   c) Geschwindigkeit des Flugzeugs $v = \dfrac{\sqrt{8^2+4^2+1^2}}{\frac{2}{60}}$ km/h $= 270$ km/h

   d) Gleichung der Flugbahnstrecke

$$\vec{x} = t\begin{pmatrix}56\\28\\7\end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

2. Lösungsansätze I und II:

$$\text{I:}\quad d(t) = \left|\begin{pmatrix}18-8t\\-4t\\-1-t\end{pmatrix}\right| = \sqrt{81t^2 - 286t + 325} \qquad \text{II:}\quad \begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}18-8t\\-4t\\-1-t\end{pmatrix} = 0$$

$$d'(t) = 0$$

   a) I: Minimum von $d(R,P)$, P laufender Punkt auf der Geraden g durch A und B
   II: $\overrightarrow{PR}$ ist orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden g.

   b) geringste Entfernung des Flugzeugs $d = 8{,}517$ km

3. Ist das Flugzeug mehr als 70 km von der Radarstation entfernt, so kann es von dieser nicht mehr erfasst werden. Die Position, an der das Flugzeug nach 14:14 Uhr den Erfassungsbereich der Radarstation verlässt, wird im Modell durch einen Punkt dargestellt. Ermitteln Sie dessen Koordinaten.

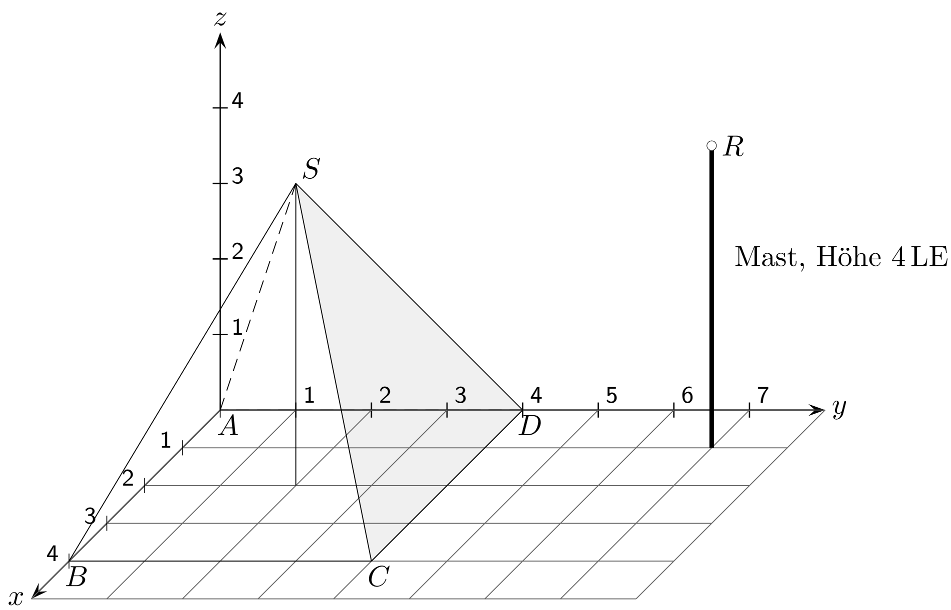
$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}56\\28\\7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix}, \qquad d(R,Q) = 70, \quad r = 2{,}523, \quad D(76{,}182 \mid 38{,}091 \mid 7)$$

4. Das Flugzeug überfliegt eine geneigte Hangfläche, die in der Ebene E mit E: $-x + 25z = 0$ liegt. Durch das Sonnenlicht wirft das Flugzeug um 14:02 Uhr einen Schatten auf die Hangfläche.

   Die Richtung des Sonnenlicht wird durch $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ beschrieben.

   Schattenpunkt $S\left(\frac{25}{3} \mid \frac{13}{3} \mid \frac{1}{3}\right)$

↑ Aufgabe für die mündliche Prüfung

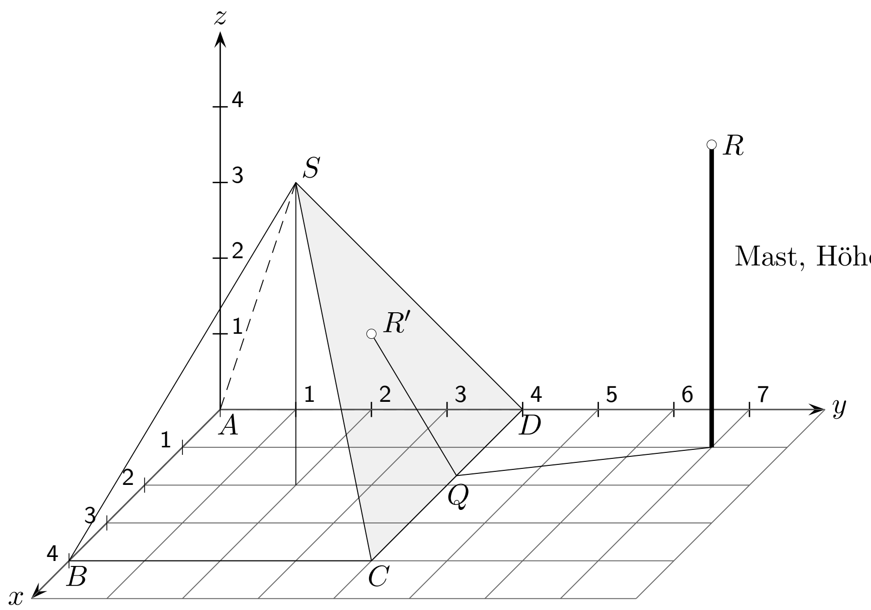


Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Spitze $S(2\,|\,2\,|\,4)$, siehe Grafik.

a) Die Koordinatenform der Ebene, in der das grau gefärbte Dreieck liegt, lautet $E\colon\; 2y + z = 8$. Erläutern Sie, wie diese Behauptung begründet werden kann.

b) Die Richtung des Sonnenlichts wird durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ erfasst.

Sie dürfen davon ausgehen, dass der Schattenpunkt der Mastspitze R auf dem grau gefärbten Dreieck liegt. Erläutern Sie, wie die Länge des Schattens, den der Mast wirft, ermittelt werden kann.



Gegeben ist eine quadratische Pyramide mit der Spitze $S(2\,|\,2\,|\,4)$, siehe Grafik.

a) Die Koordinatenform der Ebene, in der das grau gefärbte Dreieck liegt, lautet $E\colon\ 2y + z = 8$. Erläutern Sie, wie diese Behauptung begründet werden kann.

Dies ist auf mehrere Arten möglich:
3 Punkte einsetzen,
Koordinatenform ermitteln,
Orthogonalität zu den Richtungsvektoren zeigen, sowie Punktprobe durchführen.

b) Die Richtung des Sonnenlichts wird durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ erfasst.

Sie dürfen davon ausgehen, dass der Schattenpunkt der Mastspitze R auf dem grau gefärbten Dreieck liegt. Erläutern Sie, wie die Länge des Schattens, den der Mast wirft, ermittelt werden kann. Zwischenschritte:
R' ist der Schnittpunkt der Geraden (Richtungsvektor $\vec{v}$) durch R mit E.
Q ist der Schnittpunkt der Geraden CD mit einer Ebene (Richtungsvektor $\vec{v}$), in der der Mast liegt. Alternativ: Q als Schnittpunkt zweier Geraden ermitteln.

Zusatzfragen

Wie kann überprüft werden, dass der Schattenpunkt R' der Mastspitze auf dem grau gefärbten Dreieck liegt?

Wie lauten die Koordinaten von R' und Q? $R'(2\,|\,3\,|\,2),\ Q(7/4\,|\,4\,|\,0)$

Der Pyramide soll ein Quader mit maximalem Volumen einbeschrieben werden. Wie können die Maße des Quaders ermittelt werden?

Der Pyramide soll eine größtmögliche Kugel einbeschrieben werden. Wie können deren Mittelpunkt und Radius ermittelt werden?

↑ Geradenschar

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief zueinander verlaufen.

b) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E, die die Gerade g enthält und parallel zur Geraden h verläuft.
Unter welchem Winkel schneidet E die xy-Ebene?

c) Welchen Abstand hat die Gerade h zur Ebene E?

d) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist durch

$$g_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ 1-a \end{pmatrix}$$

eine Gerade festgelegt.

Zeigen Sie: Jede der drei Koordinatenachsen wird von der Gerade g_a geschnitten.
Bestimmen Sie die drei Schnittpunkte.
Die Schnittpunkte bilden zusammen mit dem Ursprung eine Dreieckspyramide.
Bestimmen Sie deren Volumen.

e) Welche Gerade g_a enthält den Punkt $P(-1 \mid 5 \mid 10)$?
Welchen Abstand hat diese Gerade zur Geraden g?

↑ Geradenschar

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief zueinander verlaufen.
Schnittansatz führt zu einem Widerspruch.

b) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E, die die Gerade g enthält und parallel zur Geraden h verläuft.
Unter welchem Winkel schneidet E die xy-Ebene? $\alpha = 70{,}5°$

c) Welchen Abstand hat die Gerade h zur Ebene E? $d = 9\,LE$

d) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist durch

$$g_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ 1-a \end{pmatrix}$$

eine Gerade festgelegt.

Zeigen Sie: Jede der drei Koordinatenachsen wird von der Gerade g_a geschnitten.
Bestimmen Sie die drei Schnittpunkte. $X(9\,|\,0\,|\,0),\ Y(0\,|\,-4{,}5\,|\,0),\ Z(0\,|\,0\,|\,4{,}5)$
Die Schnittpunkte bilden zusammen mit dem Ursprung eine Dreieckspyramide.
Bestimmen Sie deren Volumen. $V = 30{,}375\,VE$

e) Welche Gerade g_a enthält den Punkt $P(-1\,|\,5\,|\,10)$? $a = -0{,}5$
Welchen Abstand hat diese Gerade zur Geraden g? $e = \frac{16}{3}\,LE$

Differenzial- und Integralrechnung

Vektorrechnung

VR Aufgaben

VR weitere Aufgaben

Stochastik

Startseite