

Determinanten

Wir entwickeln eine Lösungsformel für Gleichungssysteme mit zwei Variablen.

$$\begin{array}{r} ax + cy = e \quad | \cdot (-b) \\ bx + dy = f \quad | \cdot a \\ \hline -abx - bcy = -be \\ abx + ady = af \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{array}} \right\} +$$

$$y(ad - bc) = af - be$$

$$y = \frac{af - be}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}$$

$$\text{analog} \quad x = \frac{ed - cf}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}$$

Man schreibt $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ für den Term $ad - bc$ und nennt das Zahlenschema bzw. seinen Wert *Determinante*.

Welche Regelmäßigkeit ist in der Determinantenschreibweise der Lösung enthalten?

Diese Überlegungen können auf n Gleichungen mit n Variablen verallgemeinert werden. Der Fall $n = 3$ soll hier noch behandelt werden.

Hierzu schreiben wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array}$$

als Vektorgleichung:

$$\vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z = \vec{d} \quad | \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

und erhalten unmittelbar

$$\begin{aligned} x &= \frac{\vec{d} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} \\ y &= \frac{\vec{a} \cdot (\vec{d} \times \vec{c})}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} \\ z &= \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} \end{aligned}$$

Man schreibt $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ für das Produkt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ und nennt das Zahlenschema bzw. seinen Wert *Determinante*.

Erläutere und beweise die Berechnungsmethode (eine unter vielen) für Determinanten:

$$\begin{array}{c} + \quad + \quad + \\ \left| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \right. \\ \hline - \quad - \quad - \end{array} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$