

## Aufgaben, gemischt

1. Die Ebene  $E$  ist gegeben durch die Punkte  $A(0 \mid -2 \mid 1)$ ,  $B(-1 \mid 0 \mid 2)$  und  $C(1 \mid 1 \mid 0)$ .  
Wie groß ist der Abstand von  $E$  zum Ursprung?
2. Wie groß ist der Abstand von  $Q(1 \mid 0 \mid -1)$  zur Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ?
3. In einem Betrieb sind 200 Personen beschäftigt.  
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person am Tag krank ist, beträgt 5%.  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind täglich
  - a) höchstens 4 Personen,
  - b) zwischen 7 und 13 (Grenzen eingeschlossen),
  - c) mindestens 16 Personen krank?
4. Die drei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  spannen einen Spat auf,  
dessen Volumen 10 VE beträgt. Wie groß ist dann  $a$ ?
5. Wir testen die Hypothesen auf dem 5%-Niveau. Wie lautet der Ablehnungsbereich?  
(Binomialverteilung,  $n = 200$ )
  - a)  $p \geq 0,4$
  - b)  $p \leq 0,6$
  - c)  $p = 0,5$  (beidseitig)
6. In der Gesamtbevölkerung leiden (höchstens) 15% aller Kinder an einer Hausstaub-Allergie,  
im Folgenden kurz als allergisch bezeichnet.
  - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 300 zufällig ausgewählten Kindern
    - i) mindestens 60
    - ii) höchstens 35an dieser Allergie leiden?
  - b) Wie groß muss die Anzahl einer Kindergruppe mindestens sein, damit mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit sich mindestens ein allergisches Kind in der Gruppe befindet?
  - c) Einige Ärzte vermuten, dass sich der Anteil 15% allergischer Kinder vergrößert hat und wollen dies durch einen Test anhand 300 Kinder belegen. Entwickeln sie einen geeigneten Test auf dem 5%-Niveau.

## Lösungen

1.  $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0, \quad \text{HNF}, \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. Fußpunkt  $F(-1 \mid 2 \mid -1), \quad d(Q, g) = \sqrt{8}$

3. a) 2,6%

b) 74,6%

c) 4,4%

4.  $a = 5$

5. a)  $\bar{A} = \{0, \dots, 68\}$

b)  $\bar{A} = \{132, \dots, 200\}$

c)  $\bar{A} = \{0, \dots, 85\} \cup \{115, \dots, 200\}$

6. a) i) 1,2%      ii) 5,9%

b)  $n = 19$

c)  $H_0: p \leq 15\%, \quad \bar{A} = \{56, \dots, 300\}$

Binomial- oder Normalverteilung

## Aufgaben, gemischt

7. Wir testen die Hypothesen auf dem 5%-Niveau. Wie lautet der Ablehnungsbereich?  
(Binomialverteilung,  $n = 2000$ , Näherung mit Normalverteilung, ohne Stetigkeitskorrektur)
- a)  $p \geq 0,20$   
b)  $p \leq 0,35$
8.  $X$  sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit  $\mu = 100$  und  $\sigma = 10$ .  
Für  $Z = X + X + X + X + X$  (Summanden unabhängig voneinander) ist  $P(Z > 550)$  zu ermitteln.  
Beachten Sie:  $V(X + X) = V(X) + V(X)$ .

Lösungen:

7. a)  $\mu = 400$   
 $\sigma = 17,89$   
 $\bar{A} = \{0, \dots, 370\}$
- b)  $\mu = 700$   
 $\sigma = 21,33$   
 $\bar{A} = \{736, \dots, 2000\}$
8.  $\mu = 500$   
 $\sigma = \sqrt{5} \cdot 10$   
 $P(Z > 550) = 1,3\%$

9. Gegeben ist die Ebenenschar  $E_t : (t - 4)x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 2t = 0, \quad t \in \mathbb{R},$

und die Gerade  $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

- a) Für welchen Wert von  $t$  ist  $E_t$  parallel zu  $g$ ?
- b) Die Ebene  $E^*$  geht durch den Punkt  $P(2 | 1 | 11)$  und ist parallel zu  $E_7$ .  
Ermitteln Sie eine Normalengleichung von  $E^*$  und berechnen Sie den Abstand von  $E_7$  und  $E^*$ .
- c) Zeigen Sie: Es gibt genau eine Ebene aus der Schar  $E_t$ , die auf keiner anderen Ebene der Schar senkrecht steht. Wie lautet ihre Gleichung?

#### Lösungshinweise

9. a)  $t = -4$

b)  $E^* : \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 70 = 0$   
 $d = 8$

c)  $(t - 4) \cdot (k - 4) + 40 = 0$   
 $t = 4$

10. Gegeben ist die Ebenenschar  $E_k: 4x + 2y + kz = 4k$  mit  $k > 0$ .
- Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
  - Jede Ebene der Schar schließt mit den Koordinatenebenen eine Pyramide ein. Für welches  $k$  beträgt das Pyramidenvolumen  $V = 12 \text{ VE}$ ?
  - Untersuchen Sie, ob die Ebenen der Schar gemeinsame Punkte haben (Anschauung ist möglich) und falls ja, erfassen Sie diese Punkte vektoriell.
  - An welche Ebene (Normalenform) nähern sich die Ebenen  $E_k$  an, falls  $k$  gegen Unendlich strebt? Begründen Sie dies auch algebraisch (*Tipp: Ebenengleichung durch  $k$  dividieren*).

#### Lösungshinweise

10. a)  $A(k | 0 | 0)$ ,  $B(0 | 2k | 0)$ ,  $C(0 | 0 | 4)$
- b)  $V_{\text{Quader}} = 8k^2$ ,  $V_{\text{Pyramide}} = \frac{4}{3}k^2$ ,  $k = 3$
- c)  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- d)  $z = 4$

11. Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist eine Ebenenschar  $E_a$  gegeben durch  $E_a: ax + (8 - a)y + 8z - 4 = 0$ .

Die Gerade  $g$  hat die Gleichung  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ .

- a) Bestimmen Sie  $a$  so, dass  $g$  orthogonal zu  $E_a$  ist.  
Zeigen Sie, dass  $g$  für keinen Wert von  $a$  parallel zu  $E_a$  verläuft.  
Für welchen Wert von  $a$  ist der Winkel zwischen  $g$  und  $E_a$   $30^\circ$ ?
- b) Welche Beziehung besteht zwischen  $a$  und  $a^*$ , wenn  $E_a$  und  $E_{a^*}$  orthogonal zueinander sind?
- c) Für welche Werte von  $a$  beträgt der Abstand des Ursprungs zu  $E_a$   $\frac{1}{8}\sqrt{8}$  LE?  
Welche Ebene der Schar hat vom Ursprung den maximalen Abstand?

### Lösungshinweise

11. a)  $a = 4$

Der Richtungsvektor von  $g$  ist für kein  $a$  orthogonal zum Normalenvektor der Ebene  $E_a$ .

$$\sin \alpha = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{|\vec{n}| |\vec{u}|} \right| \iff \frac{24}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2a^2 - 16a + 128}} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 16, \quad a_2 = -8$$

b)  $a = \frac{4a^* - 64}{a^* - 4}, \quad a^* \neq 4$

c) HNF

$$\frac{4}{\sqrt{2a^2 - 16a + 128}} = \frac{1}{8}\sqrt{8}$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 8$$

Maximum von  $d(a) = \frac{4}{\sqrt{2a^2 - 16a + 128}}$  an der Stelle  $a = 4$ , also  $E_4$