Aufgaben Vektorrechnung

1. Sonnensegel
2. Rollende Kugel
3. Dachzimmer
4. Sendemast
5. Prisma mit Zylinder
6. Kiste
7. Gebäude
8. Prisma und Kugel
9. Platte und Lichtquelle
10. Würfel und Dreieck
11. Solarpanel
12. Hafengebäude
13. Flugbahnen
14. Lichtkunst
15. Spidercam
16. Drohne
17. Podest
18. Theater
19. LK Sachsen 2021

↑ Sonnensegel   Hessen LK 2011 geändert

Zur Beschattung einer Terrasse wird ein dreieckförmiges Sonnensegel aufgespannt, dessen Befestigungen durch die Punkte $P_1(5\,|\,0\,|\,7)$, $P_2(5\,|\,6\,|\,1)$ und $P_3(-1\,|\,6\,|\,7)$ dargestellt werden.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Sonnensegels und ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform, die das Sonnensegel enthält.

b) Zeigen Sie, dass das Sonnensegel die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat.

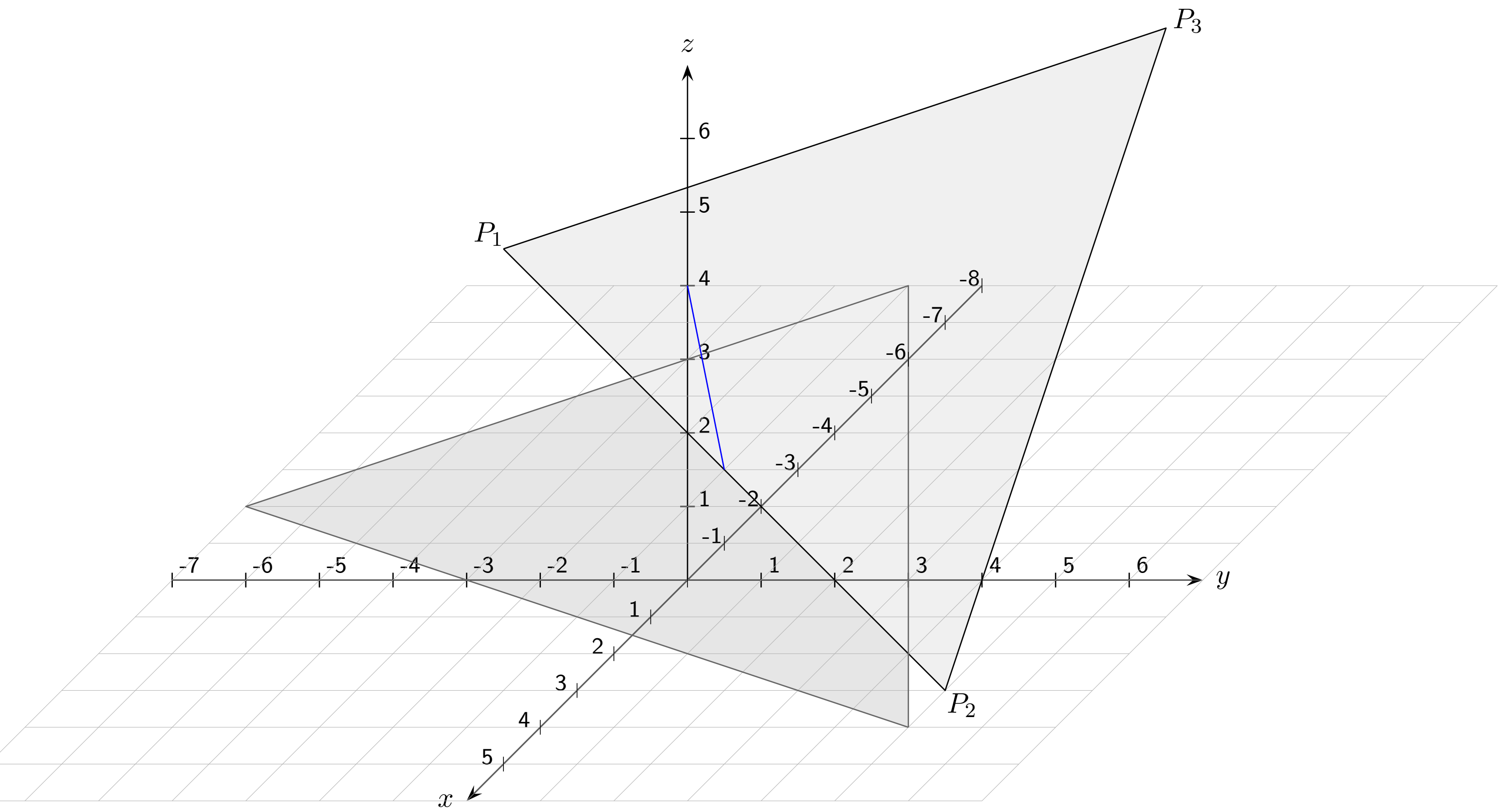
c) Die Sonnenstrahlen verlaufen in Richtung $\overrightarrow{v} = (1 \mid 1 \mid 1)^{\mathrm{T}}$. Untersuchen Sie, ob sich ein Gegenstand, der im Punkt $Q(-4\,|\,0\,|\,0)$ auf der Terrasse liegt, im Schatten des Sonnensegels befindet.

d) Ein Ball trifft senkrecht (parallel zur z-Achse) im Punkt $R(4\,|\,2\,|\,6)$ auf das Sonnensegel und rollt ohne zu springen vom Segel herunter. Begründen Sie die Behauptung:
Der Ball rollt auf einer Geraden g, die sowohl in der Ebene E des Sonnensegels als auch in derjenigen Ebene F liegt, welche senkrecht auf der xy-Ebene steht und einen Normalenvektor der Ebene E enthält.

Ermitteln Sie eine Gleichung von g.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S, an dem der Ball das Sonnensegel verlässt.

Zeichnen Sie den Weg des Balls auf dem Sonnensegel in das Schrägbild ein.



a) $E\colon x + y + z = 12$

b) $|\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{P_2P_3}| = |\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{72}$

c) Schattenpunkte:
$S_1(-2 \mid -7 \mid 0)$, $S_2(4 \mid 5 \mid 0)$, $S_3(-8 \mid -1 \mid 0)$

d) $F\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad F\colon x - y = 2$

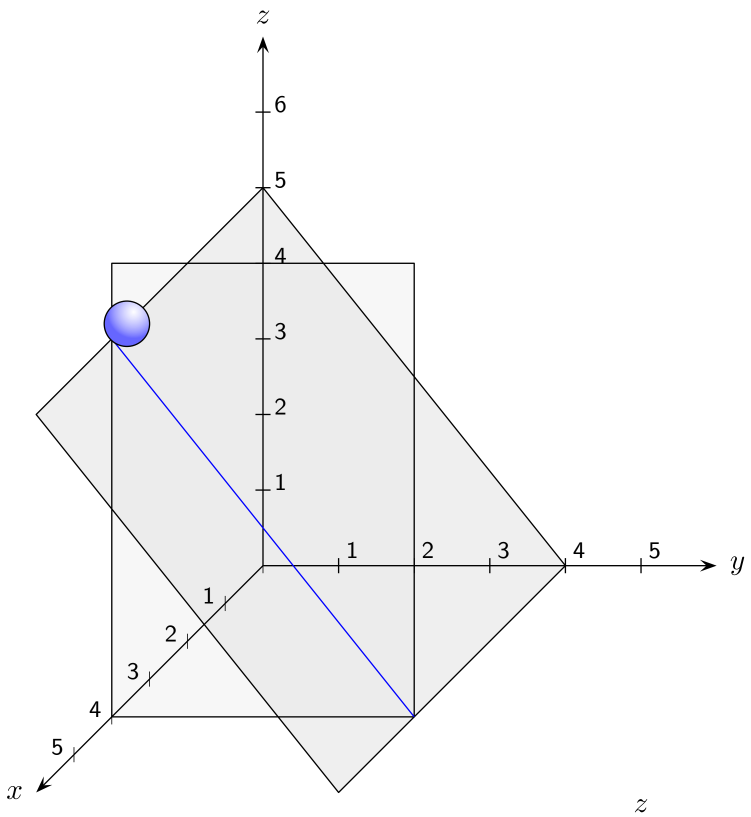
$g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ oder $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

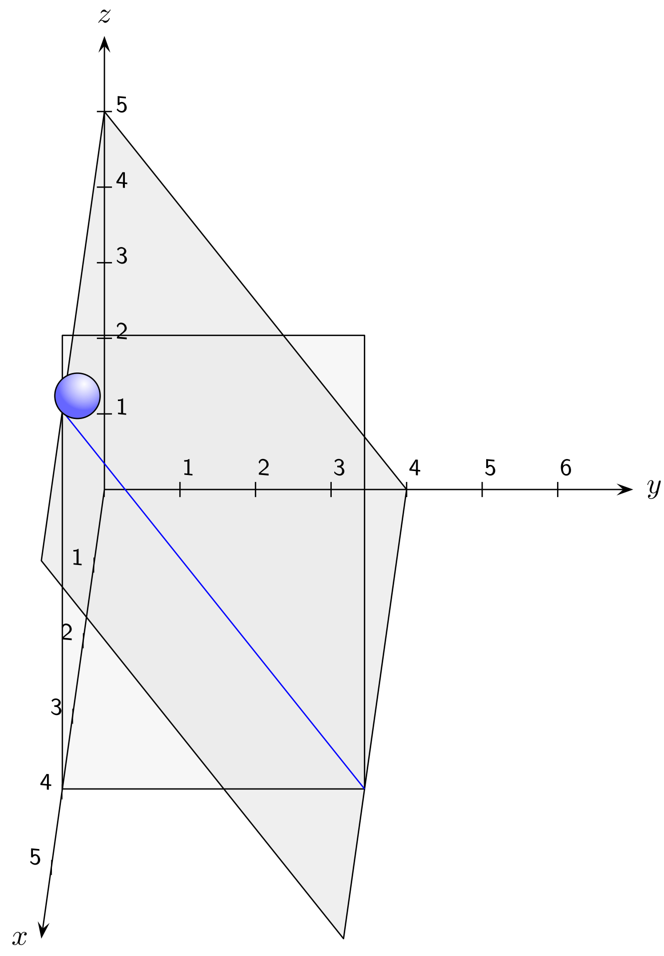
2. Möglichkeit: Spurgerade h von E in der xy-Ebene $h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Fußpunkt $Q(7 \mid 5 \mid 0)$ des Abstandes R zu h, Gerade g durch R und Q.

$S(5 \mid 3 \mid 4)$

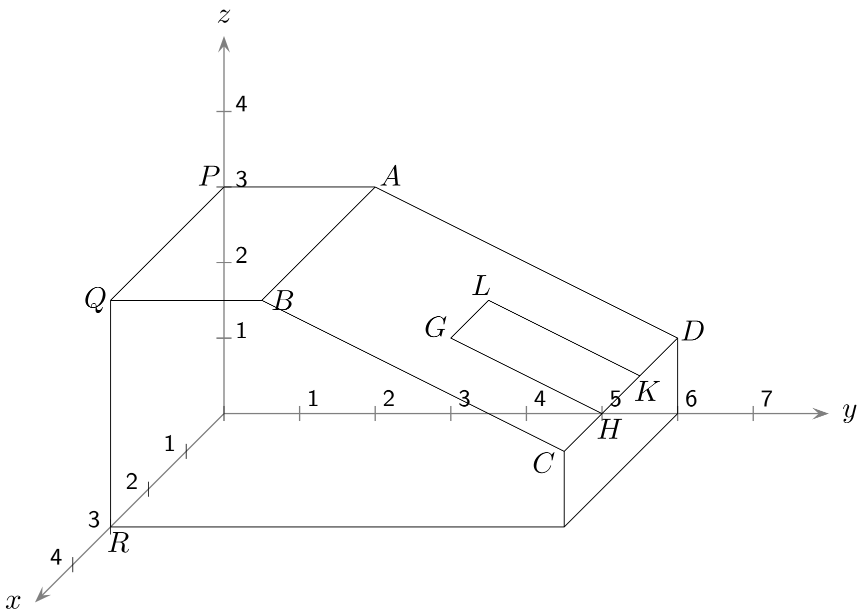
↑ Rollende Kugel





Begründe:
Wenn der Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene E_1 der Richtungsvektor $\vec{u}$ einer Ebene E_2 ist, dann verlaufen die Ebenen senkrecht zueinander.

↑ Dachzimmer



Die Abbildung zeigt modellhaft ein Dachzimmer in der Form eines geraden Prismas.
Der Boden und zwei der Seitenwände liegen in den Koordinatenebenen.
Das Rechteck $ABCD$ liegt in einer Ebene E und stellt den geneigten Teil der Deckenfläche dar.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
[*mögliches Ergebnis:* $E: \quad y + 2z = 8$]

b) Berechnen Sie den Abstand des Punkts R von der Ebene E .

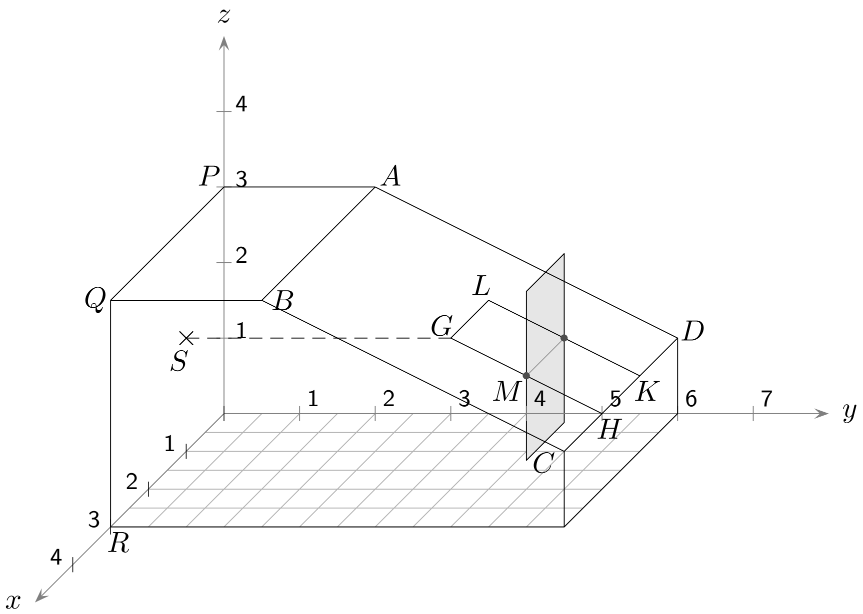
Das Rechteck $GHKL$ mit $G(2\,|\,4\,|\,2)$ hat die Breite $\overline{GL} = 1$. Es liegt in der Ebene E, die Punkte H und K liegen auf der Geraden CD. Das Rechteck stellt im Modell ein Dachflächenfenster dar; die Breite des Fensterrahmens soll vernachlässigt werden.

c) Geben Sie die Koordinaten der Punkte L, H und K an und bestimmen Sie den Flächeninhalt des Fensters.
[*zur Kontrolle:* $\overline{GH} = \sqrt{5}$]

d) Durch das Fenster einfallendes Sonnenlicht wird im Zimmer durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v} = (-2\,|\,-8\,|\,-1)^{\mathrm{T}}$ repräsentiert. Eine dieser Geraden verläuft durch den Punkt G und schneidet die Seitenwand $OPQR$ im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S sowie die Größe des Winkels, den diese Gerade mit der Seitenwand $OPQR$ einschließt.

e) Das Fenster ist drehbar um eine Achse, die im Modell durch die Mittelpunkte der Strecken $\overline{GH}$ und $\overline{LK}$ verläuft. Die Unterkante des Fensters schwenkt dabei in das Zimmer; das Drehgelenk erlaubt eine zum Boden senkrechte Stellung der Fensterfläche. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke $\overline{GH}$ und bestätigen Sie rechnerisch, dass das Fenster bei seiner Drehung den Boden nicht berühren kann.
[*Teilergebnis:* $M(2\,|\,5\,|\,1{,}5)$

↑ Dachzimmer



Die Abbildung zeigt modellhaft ein Dachzimmer in der Form eines geraden Prismas.
Der Boden und zwei der Seitenwände liegen in den Koordinatenebenen.
Das Rechteck $ABCD$ liegt in einer Ebene E und stellt den geneigten Teil der Deckenfläche dar.

a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

[*mögliches Ergebnis:* $E: \quad y + 2z = 8$]

b) Berechnen Sie den Abstand des Punkts R von der Ebene E . $\quad d(R, E) = \frac{8}{\sqrt{5}}$

Das Rechteck $GHKL$ mit $G(2 \mid 4 \mid 2)$ hat die Breite $\overline{GL} = 1$. Es liegt in der Ebene E, die Punkte H und K liegen auf der Geraden CD. Das Rechteck stellt im Modell ein Dachflächenfenster dar; die Breite des Fensterrahmens soll vernachlässigt werden.

c) Geben Sie die Koordinaten der Punkte L, H und K an und bestimmen Sie den Flächeninhalt des Fensters. $\quad L(1 \mid 4 \mid 2),\ H(2 \mid 6 \mid 1),\ K(1 \mid 6 \mid 1),\ A = \sqrt{5}\, m^2$ [*zur Kontrolle:* $\overline{GH} = \sqrt{5}$]

d) Durch das Fenster einfallendes Sonnenlicht wird im Zimmer durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{v} = (-2 \mid -8 \mid -1)^{\mathrm{T}}$ repräsentiert. Eine dieser Geraden verläuft durch den Punkt G und schneidet die Seitenwand $OPQR$ im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S sowie die Größe des Winkels, den diese Gerade mit der Seitenwand $OPQR$ einschließt. $\quad S(1 \mid 0 \mid 1{,}5),\ \alpha = 74{,}4°$

e) Das Fenster ist drehbar um eine Achse, die im Modell durch die Mittelpunkte der Strecken $\overline{GH}$ und $\overline{LK}$ verläuft. Die Unterkante des Fensters schwenkt dabei in das Zimmer; das Drehgelenk erlaubt eine zum Boden senkrechte Stellung der Fensterfläche. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke $\overline{GH}$ und bestätigen Sie rechnerisch, dass das Fenster bei seiner Drehung den Boden nicht berühren kann. [*Teilergebnis:* $M(2 \mid 5 \mid 1{,}5)$

$d(M, xy\text{-Ebene}) = 1{,}5 > 1{,}12$

↑ Sendemast

Die Ebene $E: \quad x + y + 2z = 8$ stellt für $z \geq 0$ einen Hang dar, der aus der xy-Ebene aufsteigt.
Im Punkt $H(6 \,|\, 4 \,|\, 0)$ steht ein $80\,m$ hoher Sendemast senkrecht zur xy-Ebene (1 LE entspricht $10\,m$).

a) Stellen Sie den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Hangs.
Der Sendemast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert.
Berechnen Sie die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang.
Bestimmen Sie die Länge des Stahlseils.

b) Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die xy-Ebene und den Hang. Der Schatten des Sendemastes endet in einem Punkt T des Hangs.
Beschreiben Sie einen Weg, wie man die Gesamtlänge des Schattens bestimmen kann.

c) Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt $K(6 \,|\, 4 \,|\, k)$ um.
Die Spitze des Sendemastes trifft dabei den Hang im Punkt $R(4 \,|\, 0 \,|\, 2)$.
Bestimmen Sie die Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist.

↑ Sendemast

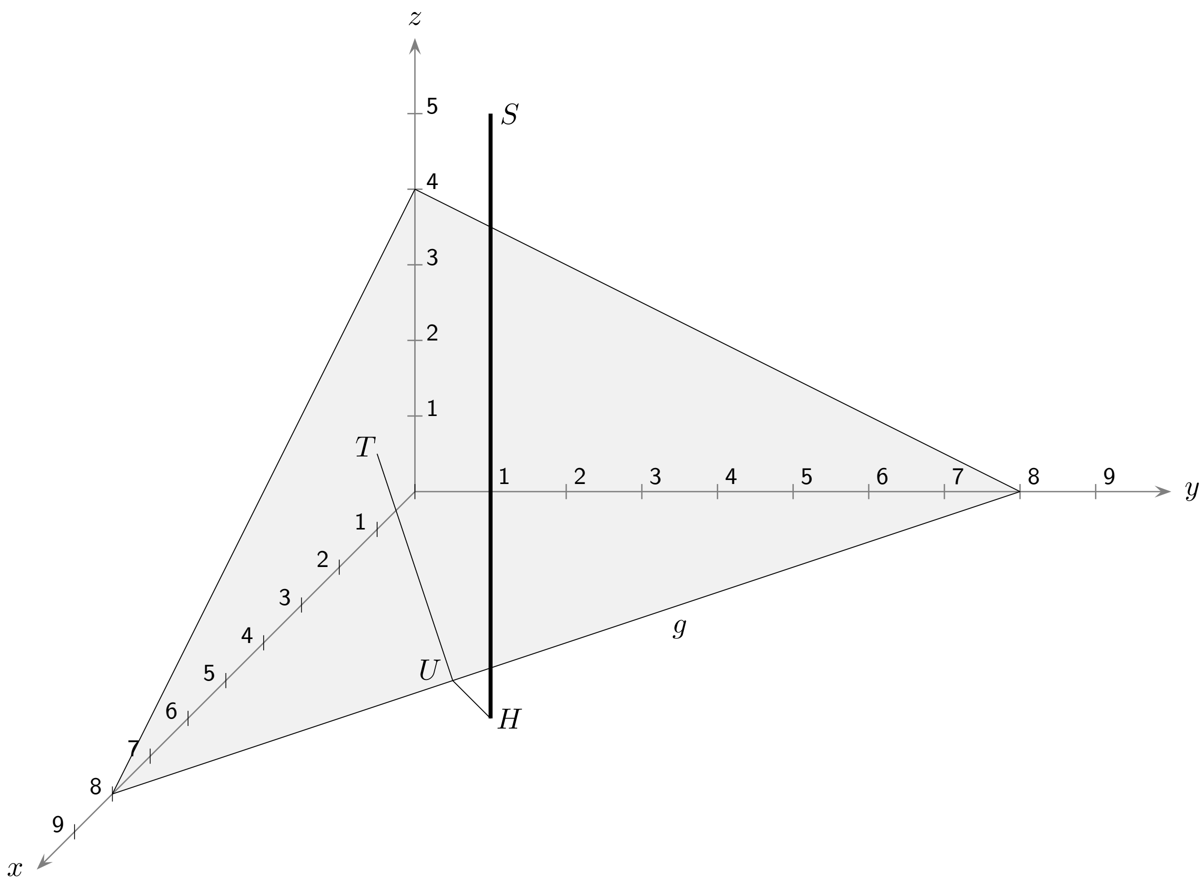
Die Ebene $E:\quad x + y + 2z = 8$ stellt für $z \geq 0$ einen Hang dar, der aus der xy-Ebene aufsteigt.
Im Punkt $H(6\,|\,4\,|\,0)$ steht ein $80\,m$ hoher Sendemast senkrecht zur xy-Ebene ($1\ LE$ entspricht $10\,m$).

a) Stellen Sie den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Hangs. 35,3°
Der Sendemast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert.
Berechnen Sie die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang. $F\left(\frac{13}{3}\,|\,\frac{7}{3}\,|\,\frac{2}{3}\right)$
Bestimmen Sie die Länge des Stahlseils. $L = 40{,}8\,m$

b) Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die xy-Ebene und den Hang. Der Schatten des Sendemastes endet in einem Punkt T des Hangs.
Beschreiben Sie einen Weg, wie man die Gesamtlänge des Schattens bestimmen kann.

Der Schatten (Steckenzug) verläuft vom Punkt H über U zu T.
Zunächst muss die Gleichung der Geraden g ermittelt werden.
Zur Berechnung des Punktes U wird eine Hilfsebene L aufgestellt, die die Punkte H, S und T enthält.
L wird mit der Geraden g geschnitten. Der Schnittpunkt ergibt U.
Die Länge des Schattens wird berechnet durch $\overline{HU} + \overline{UT}$.

c) Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt $K(6\,|\,4\,|\,k)$ um.
Die Spitze des Sendemastes trifft dabei den Hang im Punkt $R(4\,|\,0\,|\,2)$.
Bestimmen Sie die Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist. $\overline{SK} = \overline{RK},\ k = \frac{10}{3}$
Der Sendemast wird in einer Höhe von $\frac{100}{3}\,m$ abgeknickt.



↑ Prisma mit Zylinder

Die Punkte $A(5\,|\,0\,|\,0)$, $B(5\,|\,3\,|\,0)$, $C(5\,|\,0\,|\,4)$, $F(0\,|\,0\,|\,0)$, $G(0\,|\,3\,|\,0)$ und $H(0\,|\,0\,|\,4)$ sind die Ecken eines dreiseitigen Prismas mit der Grundfläche ABC.

a) Stellen Sie das Prisma in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordiantengleichung der Ebene E, in der die Fläche $BGHC$ liegt.
Unter welchem Winkel schneidet E die x_1x_2-Ebene?
Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden CG.
[*Teilergebnis:* $E\colon\ 4x_2 + 3x_3 = 12$]

b) Im Prisma liegt ein Zylinder mit dem Radius 0,5 und dem Grundkreismittelpunkt $M(0\,|\,0{,}5\,|\,0{,}5)$, dessen Achse parallel zur x_1-Achse verläuft.
Ermitteln Sie die Abstände des Punktes M von den drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas.
Berührt der Zylinder alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas?

c) Ein anderer Zylinder mit dem Radius r und dem Grundkreismittelpunkt $M^*(0\,|\,r\,|\,r)$, dessen Achse ebenfalls parallel zur x_1-Achse ist, soll alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas von innen berühren. Bestimmen Sie den Radius r dieses Zylinders.

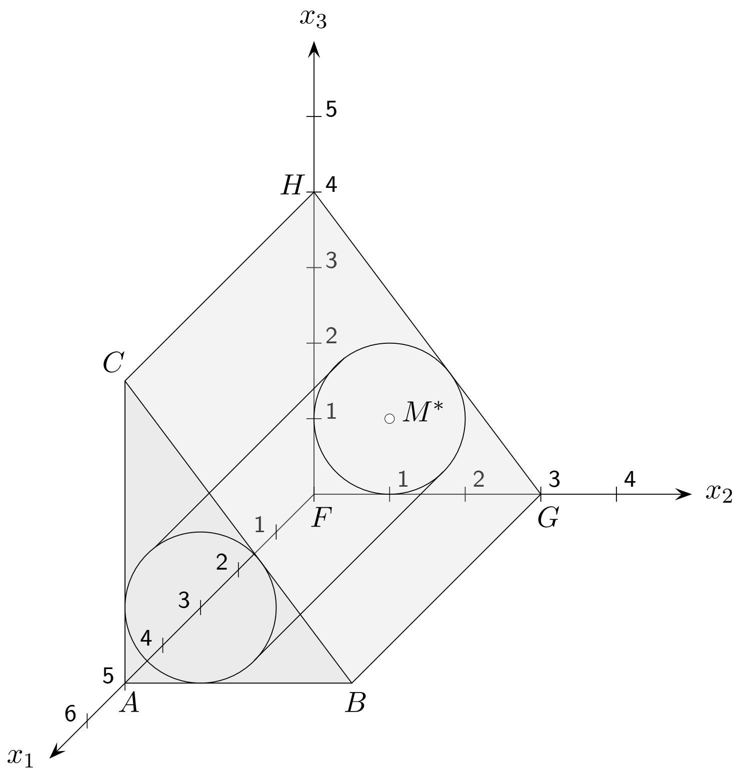
↑ Prisma mit Zylinder

Die Punkte $A(5\,|\,0\,|\,0)$, $B(5\,|\,3\,|\,0)$, $C(5\,|\,0\,|\,4)$, $F(0\,|\,0\,|\,0)$, $G(0\,|\,3\,|\,0)$ und $H(0\,|\,0\,|\,4)$ sind die Ecken eines dreiseitigen Prismas mit der Grundfläche ABC.

a) Stellen Sie das Prisma in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordiantengleichung der Ebene E, in der die Fläche $BGHC$ liegt.
Unter welchem Winkel schneidet E die x_1x_2-Ebene? $\alpha = 53{,}1^\circ$
Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden CG. $d(A, g) = 3{,}30$
[*Teilergebnis:* $E\colon\ 4x_2 + 3x_3 = 12$]

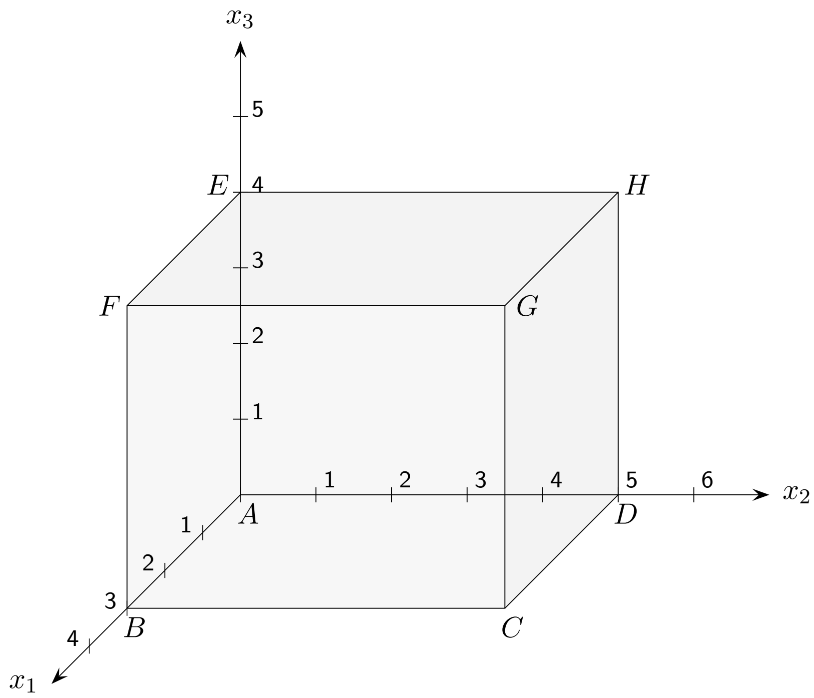
b) Im Prisma liegt ein Zylinder mit dem Radius 0,5 und dem Grundkreismittelpunkt $M(0\,|\,0{,}5\,|\,0{,}5)$, dessen Achse parallel zur x_1-Achse verläuft.
Ermitteln Sie die Abstände des Punktes M von den drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas.
$d_1 = d_2 = 0{,}5, \quad d_3(M, E) = 1{,}70 > 0{,}5$
Berührt der Zylinder alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas? nein

c) Ein anderer Zylinder mit dem Radius r und dem Grundkreismittelpunkt $M^*(0\,|\,r\,|\,r)$, dessen Achse ebenfalls parallel zur x_1-Achse ist, soll alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas von innen berühren. Bestimmen Sie den Radius r dieses Zylinders.
$d(M^*, E) = \left|\dfrac{4r + 3r - 12}{5}\right| = r,\ r_1 = 1,\ r_2 = 6$ (Berührung von außen), $M^*(0\,|\,1\,|\,1)$



↑ Kiste

Eine quaderförmige Kiste ist in einem Koordinatensytem durch die Eckpunkte
$A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(3\,|\,0\,|\,0)$, $D(0\,|\,5\,|\,0)$ und $F(3\,|\,0\,|\,4)$ festgelegt.
Die Fläche $EFGH$ stellt den Deckel der geschlossenen Kiste dar.
Dieser ist drehbar um die Kante EH.



Weiterhin ist für jedes $t \geq 0$ eine Ebene E_t gegeben durch: $E_t\colon\ tx_1 - x_3 = -4$.

a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Kanten AB und GH.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t liegt.
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel bei geschlossener Kiste?
Liegt der Deckel in einer Ebene E_{t^*}, wenn er um 90° geöffnet ist?

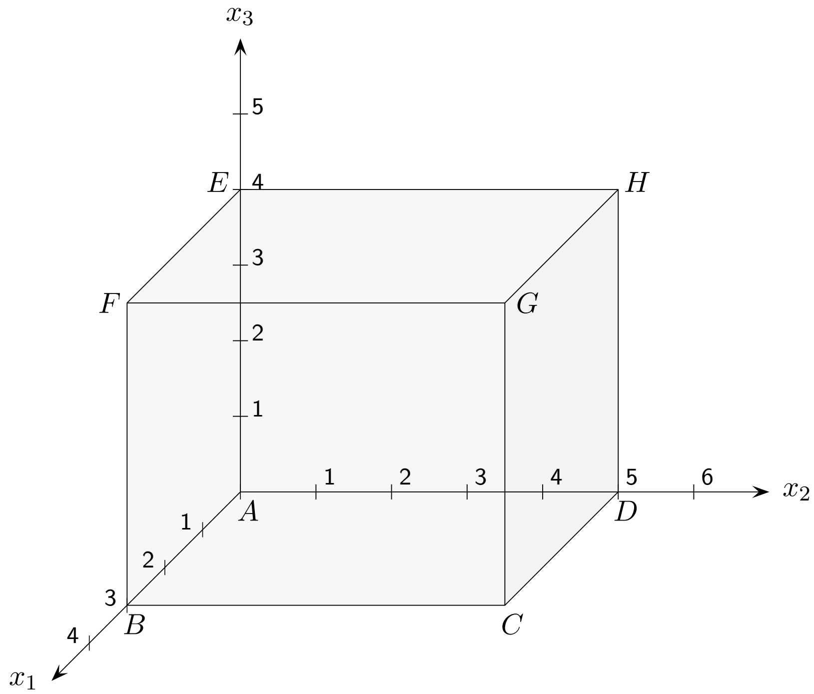
b) Wenn der Deckel der geöffneten Kiste in E_2 liegt, wird er durch einen Stab orthogonal zum Deckel abgestützt. Dieser Stab ist in der Mitte der Kante EF befestigt und trifft im Punkt P auf den Deckel. Berechnen Sie die Koordinaten von P.

c) Wie groß ist der Öffnungswinkel, wenn der Deckel in E_2 liegt?
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel, wenn der Öffnungswinkel 60° beträgt?
Bestimmen Sie den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α für $\alpha < 90°$.

d) Eine punktförmige Lichtquelle in $L(0\,|\,2{,}5\,|\,20)$ beleuchtet die Kiste.
Wie weit kann man die Kiste höchstens öffnen, ohne dass Licht von L in die Kiste fällt?

↑ Kiste

Eine quaderförmige Kiste ist in einem Koordinatensytem durch die Eckpunkte
$A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(3\,|\,0\,|\,0)$, $D(0\,|\,5\,|\,0)$ und $F(3\,|\,0\,|\,4)$ festgelegt.
Die Fläche *EFGH* stellt den Deckel der geschlossenen Kiste dar.
Dieser ist drehbar um die Kante EH.



Weiterhin ist für jedes $t \geq 0$ eine Ebene E_t gegeben durch: $E_t\colon\; tx_1 - x_3 = -4$.

a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Kanten AB und GH. $|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{41}$
Zeigen Sie, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t liegt. $g_{EH} \cap E_t$
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel bei geschlossener Kiste? $E_0\colon\; x_3 = 4$
Liegt der Deckel in einer Ebene E_{t^*}, wenn er um 90° geöffnet ist?
$x_1 = 0$ entspricht keiner Ebene der Schar, diese enthält stets x_3.

b) Wenn der Deckel der geöffneten Kiste in E_2 liegt, wird er durch einen Stab orthogonal zum Deckel abgestützt. Dieser Stab ist in der Mitte der Kante EF befestigt und trifft im Punkt P auf den Deckel. Berechnen Sie die Koordinaten von P. $P(0{,}3\,|\,0\,|\,4{,}6)$

c) Wie groß ist der Öffnungswinkel, wenn der Deckel in E_2 liegt? 63,4°
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel, wenn der Öffnungswinkel 60° beträgt?

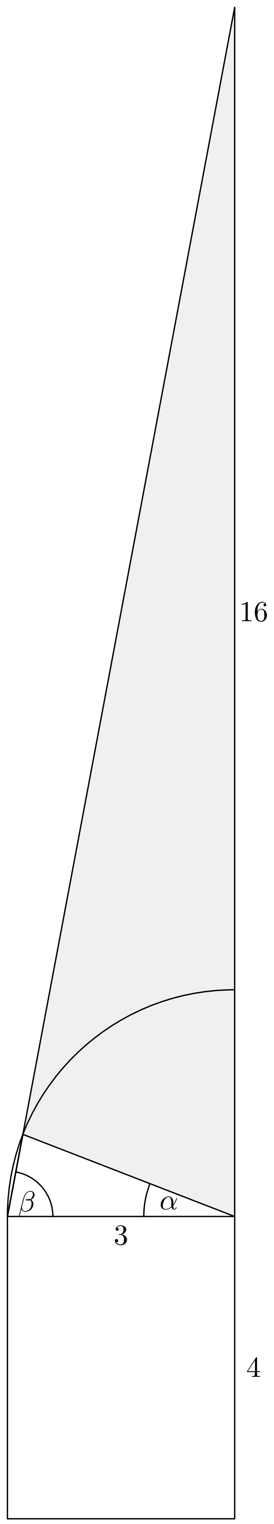
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad t = \sqrt{3} \quad (t \geq 0)$$

Bestimmen Sie den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α für $\alpha < 90^\circ$.

$$t = \sqrt{\frac{1}{(\cos\alpha)^2} - 1}$$

d) Eine punktförmige Lichtquelle in $L(0\,|\,2{,}5\,|\,20)$ beleuchtet die Kiste.
Wie weit kann man die Kiste höchstens öffnen, ohne dass Licht von L in die Kiste fällt?

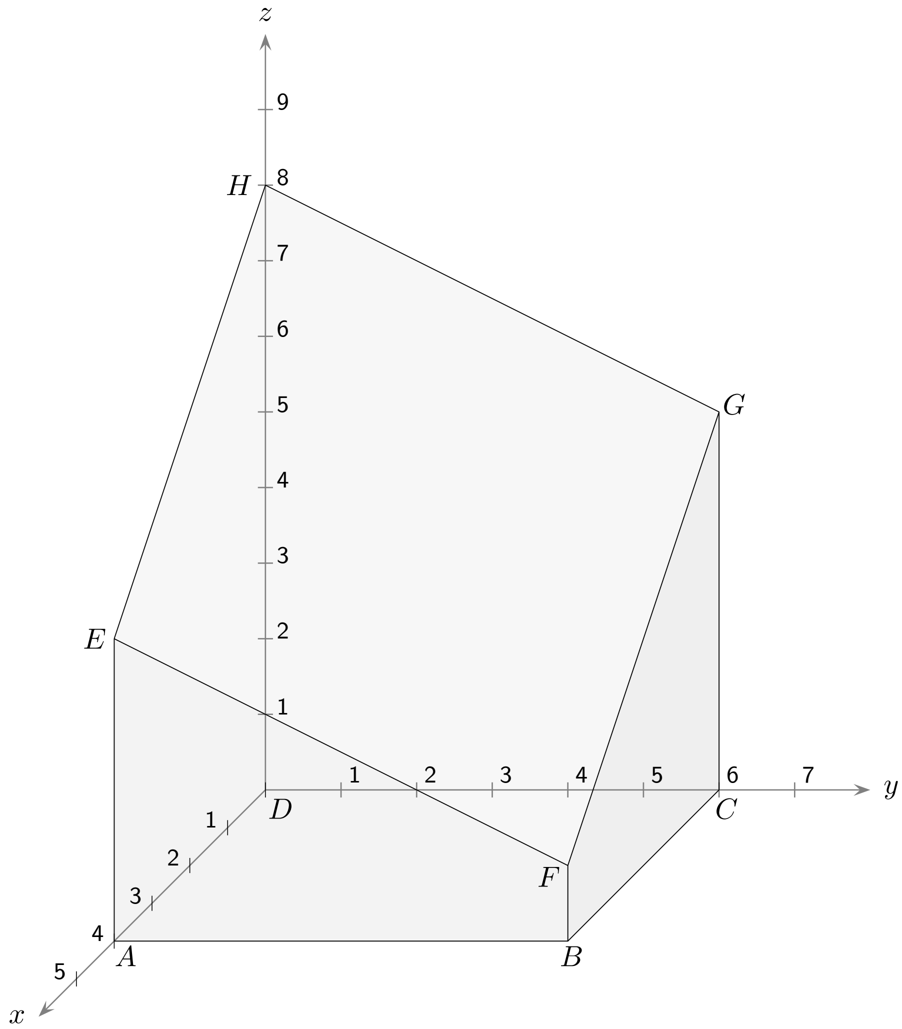
↑ Kiste



$\tan\beta = \dfrac{16}{3} \quad\Longrightarrow\quad \beta = 79{,}4^\circ$

$\alpha = 180^\circ - 2\beta = 21{,}2^\circ$ gleichschenkliges Dreieck

↑ Gebäude   Baden-Württemberg 2011



Ein Gebäude hat als Grundfläche das Rechteck $ABCD$ mit $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,6\,|\,0)$, $C(0\,|\,6\,|\,0)$ und $D(0\,|\,0\,|\,0)$ und als Dachfläche das Viereck $EFGH$ mit $E(4\,|\,0\,|\,4)$, $F(4\,|\,6\,|\,1)$, $G(0\,|\,6\,|\,5)$ und $H(0\,|\,0\,|\,8)$ (Koordinatenangaben in Meter).

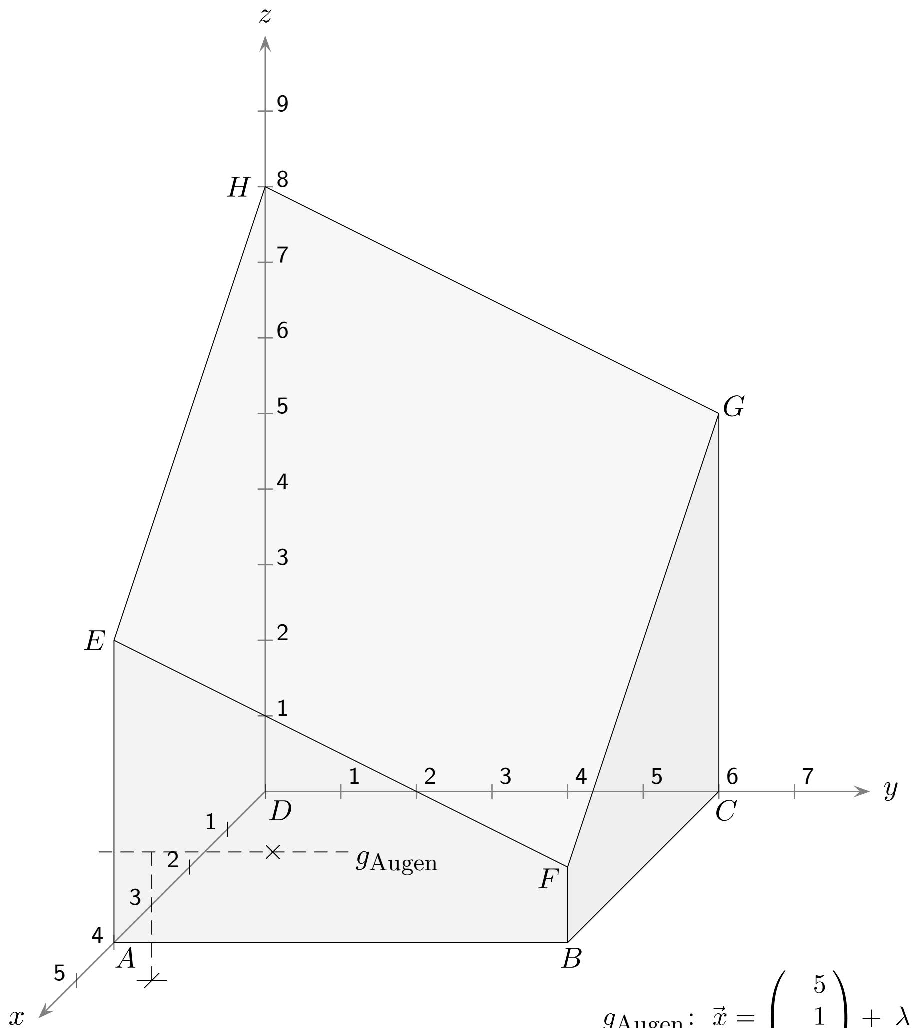
a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche $EFGH$ liegt.
Welchen Neigungswinkel besitzt die Dachfläche?
Zeigen Sie, dass die Dachfläche ein Parallelogramm ist.
Berechnen Sie den Inhalt der Dachfläche.

[*(Zwischenergebnis* $E_{\text{Dach}}: \quad 2x + y + 2z = 16$]

b) Im Innern des Gebäudes soll eine Lampe im Punkt $L(d\,|\,d\,|\,d)$ angebracht werden.
Die Lampe soll von der Bodenfläche und der Dachfläche des Gebäudes den gleichen Abstand haben.
Bestimmen Sie d.

c) Eine Person mit 1,7 m Augenhöhe bewegt sich vom Punkt $P(5\,|\,1\,|\,0)$ aus in positiver y-Richtung.
Wie weit muss sie mindestens gehen, damit sie die Ecke H sehen kann?

 Gebäude Baden-Württemberg 2011



$g_{\text{Augen}}: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

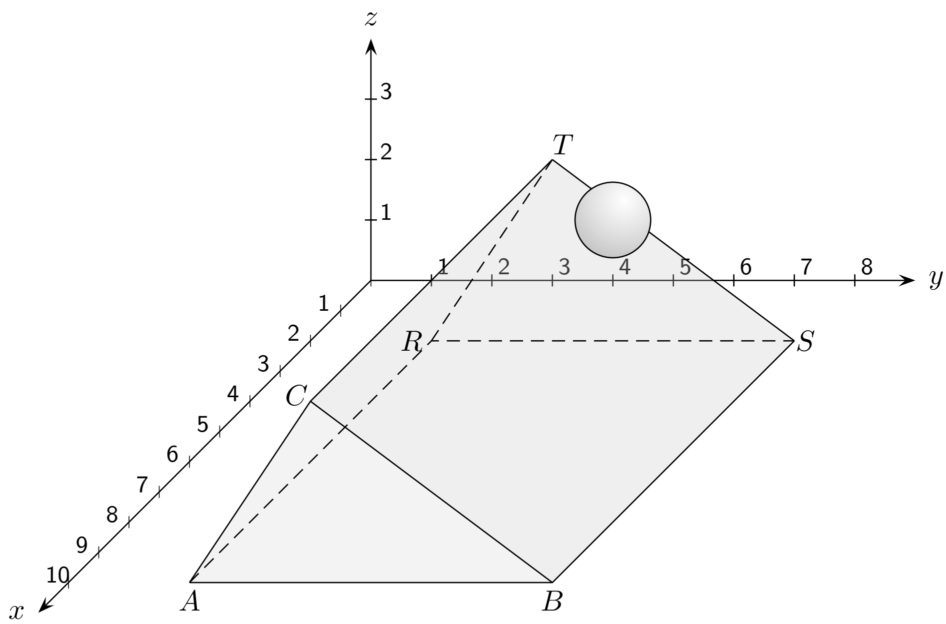
Ein Gebäude hat als Grundfläche das Rechteck $ABCD$ mit $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,6\,|\,0)$, $C(0\,|\,6\,|\,0)$ und $D(0\,|\,0\,|\,0)$ und als Dachfläche das Viereck $EFGH$ mit $E(4\,|\,0\,|\,4)$, $F(4\,|\,6\,|\,1)$, $G(0\,|\,6\,|\,5)$ und $H(0\,|\,0\,|\,8)$ (Koordinatenangaben in Meter).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche $EFGH$ liegt.
Welchen Neigungswinkel besitzt die Dachfläche? $48{,}2^\circ$
Zeigen Sie, dass die Dachfläche ein Parallelogramm ist. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ oder $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$
Berechnen Sie den Inhalt der Dachfläche. $36\,m^2$
[*Zwischenergebnis* $E_{\text{Dach}}: \ 2x + y + 2z = 16$]

b) Im Innern des Gebäudes soll eine Lampe im Punkt $L(d\,|\,d\,|\,d)$ angebracht werden.
Die Lampe soll von der Bodenfläche und der Dachfläche des Gebäudes den gleichen Abstand haben.
Bestimmen Sie d. $\overrightarrow{OL}$ in die HNF, $d = |\frac{5d-16}{3}|$, $d_1 = 2$, $d_2 = 8$ (außerhalb), $L(2\,|\,2\,|\,2)$

c) Eine Person mit $1{,}7\,m$ Augenhöhe bewegt sich vom Punkt $P(5\,|\,1\,|\,0)$ aus in positiver y-Richtung.
Wie weit muss sie mindestens gehen, damit sie die Ecke H sehen kann?
$g_{\text{Augen}} \cap E$, $\lambda = 1{,}6$, mindestens $1{,}6\,m$

↑ Prisma und Kugel



Von einem geraden Prisma sind die Punkte $A(10 \mid 2 \mid 0)$, $B(10 \mid 8 \mid 0)$, $C(10 \mid 4 \mid 3)$ und $S(2 \mid 8 \mid 0)$ gegeben.

a) Ermitteln Sie die Punkte R und T.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung (Koordinatenform) der Ebene E, in der die Seitenfläche $BSTC$ liegt.

c) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, den die Seitenkanten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ einschließen.

d) Die Ebene F enthält die Gerade CT und zerlegt das Prisma in zwei volumengleiche Teilkörper. Wählen Sie begründet einen Punkt P so, dass er gemeinsam mit den Punkten C und T die Ebene F festlegt.

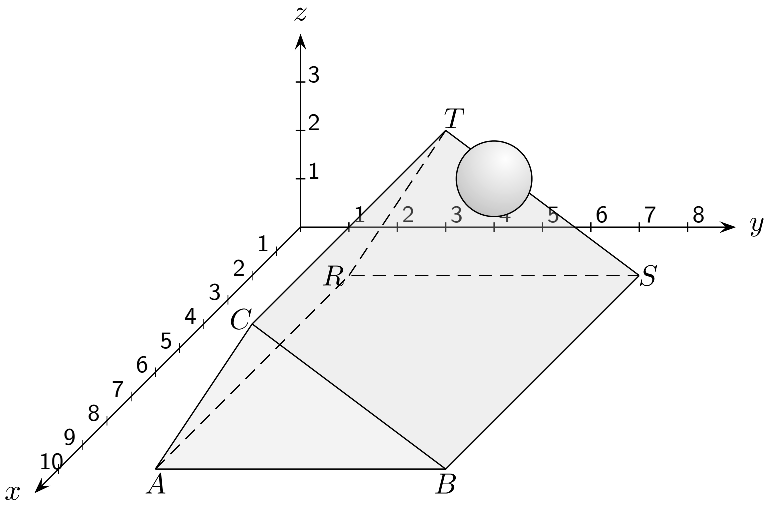
Der Punkt $M(3 \mid 5{,}5 \mid 2{,}5)$ ist der Mittelpunkt einer Kugel, die die Seitenfläche $BSTC$ im Punkt W berührt.

e) Berechnen Sie den Radius r der Kugel sowie die Koordinaten von W.

f) Die Kugel rollt nun die Seitenfläche $BSTC$ hinab. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt. Beschreiben Sie, wie die Länge des Wegs berechnet werden kann, den der Kugelmittelpunkt zurücklegt, bis die Kugel die xy-Ebene berührt.

g) Im Innern des Prismas soll eine Lampe im Punkt $L(6 \mid 5 \mid h)$ angebracht werden. Die Lampe soll von der Bodenfläche und der Seitenfläche $BSTC$ den gleichen Abstand haben. Ermitteln Sie h.

↑ Prisma und Kugel



Von einem geraden Prisma sind die Punkte $A(10\,|\,2\,|\,0)$, $B(10\,|\,8\,|\,0)$, $C(10\,|\,4\,|\,3)$ und $S(2\,|\,8\,|\,0)$ gegeben.

a) Ermitteln Sie die Punkte R und T. $R(2\,|\,2\,|\,0)$, $T(2\,|\,4\,|\,3)$

b) Ermitteln Sie eine Gleichung (Koordinatenform) der Ebene E, in der die Seitenfläche $BSTC$ liegt.
$3y + 4z = 24$

c) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels, den die Seitenkanten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ einschließen.
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{65}$, $\alpha = 86{,}8°$

d) Die Ebene F enthält die Gerade CT und zerlegt das Prisma in zwei volumengleiche Teilkörper. Wählen Sie begründet einen Punkt P so, dass er gemeinsam mit den Punkten C und T die Ebene F festlegt.
z. B. $P(10\,|\,5\,|\,0)$

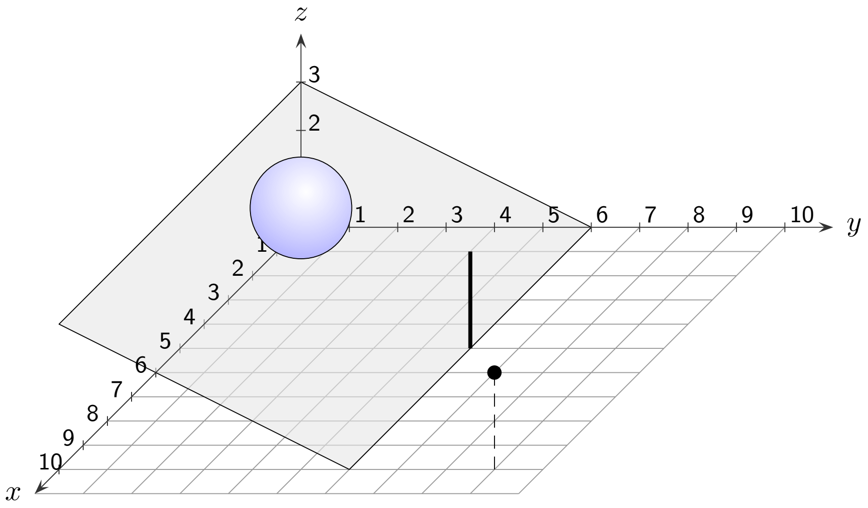
Der Punkt $M(3\,|\,5{,}5\,|\,2{,}5)$ ist der Mittelpunkt einer Kugel,
die die Seitenfläche $BSTC$ im Punkt W berührt.

e) Berechnen Sie den Radius r der Kugel sowie die Koordinaten von W. $r = 0{,}5$ $W(3\,|\,5{,}2\,|\,2{,}1)$

f) Die Kugel rollt nun die Seitenfläche $BSTC$ hinab.
Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g, auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.
Beschreiben Sie, wie die Länge des Wegs berechnet werden kann, den der Kugelmittelpunkt zurücklegt, bis die Kugel die xy-Ebene berührt.
$g: \vec{x} = \overrightarrow{OW} + \lambda\,\overrightarrow{TS}$
$d(M, N)$, N ist der Punkt auf der Geraden g mit der z-Koordinate 0,5

g) Im Innern des Prismas soll eine Lampe im Punkt $L(6\,|\,5\,|\,h)$ angebracht werden.
Die Lampe soll von der Bodenfläche und der Seitenfläche $BSTC$ den gleichen Abstand haben.
Ermitteln Sie h.
$\overrightarrow{OL}$ in die HNF, $h = \left|\frac{4h-9}{5}\right|$, $h = 1$, $L(6\,|\,5\,|\,1)$

↑ Platte und Lichtquelle



An einer rechteckigen Platte mit den Eckpunkten $A(10\,|\,6\,|\,0)$, $B(0\,|\,6\,|\,0)$, $C(0\,|\,0\,|\,3)$ und $D(10\,|\,0\,|\,3)$ ist im Punkt $F(5\,|\,6\,|\,0)$ ein $2\,m$ langer Stab befestigt, der in positive z-Richtung zeigt.
Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich zunächst im Punkt $L(10\,|\,9\,|\,2)$.
(Koordinatenangaben in m).

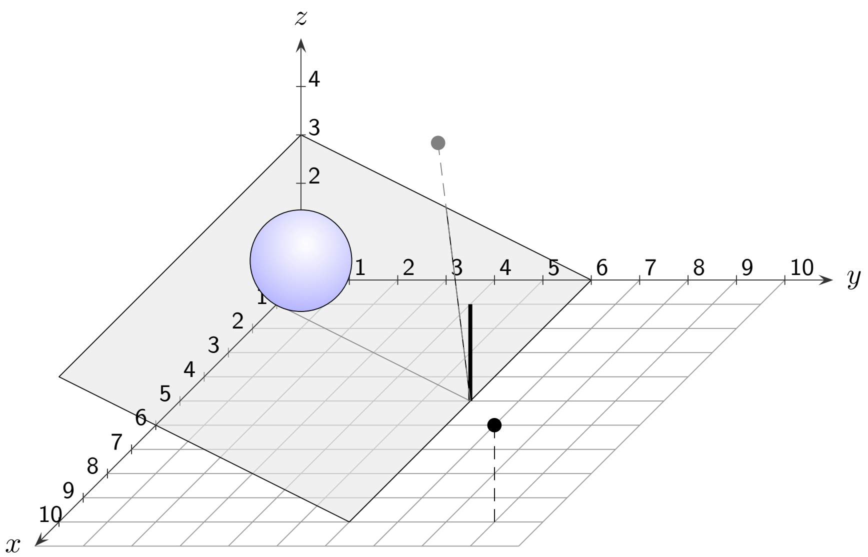
a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Platte liegt.
Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stab und der Platte. [Zur Kontrolle: E: $y + 2z = 6$]

b) Der Stab wirft einen Schatten. Untersuchen Sie, ob der Schatten vollständig auf der Platte liegt und berechnen Sie die Länge des Schattens auf der Platte.

c) Die Lichtquelle bewegt sich von L aus geradlinig in Richtung $\overrightarrow{v} = (-1\,|\,0\,|\,0)^{\mathrm{T}}$.
Betrachten Sie die Schattenpunkte des oberen Stabendes auf der Platte.
Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden, auf der sie liegen.

d) Der Punkt $M(5\,|\,2{,}5\,|\,3)$ ist der Mittelpunkt einer Kugel, die auf der Platte liegt.
Berechnen Sie den Radius r der Kugel. Die Kugel rollt nun die Platte hinab.
Beschreiben Sie, wie der Punkt auf dem Stab ermittelt werden kann, auf den die Kugel trifft.

↑ Platte und Lichtquelle



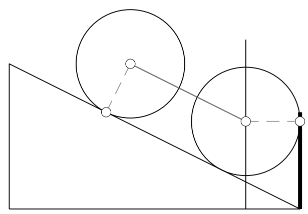
An einer rechteckigen Platte mit den Eckpunkten $A(10\,|\,6\,|\,0)$, $B(0\,|\,6\,|\,0)$, $C(0\,|\,0\,|\,3)$ und $D(10\,|\,0\,|\,3)$ ist im Punkt $F(5\,|\,6\,|\,0)$ ein $2\,m$ langer Stab befestigt, der in positive z-Richtung zeigt.
Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich zunächst im Punkt $L(10\,|\,9\,|\,2)$.
(Koordinatenangaben in m).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Platte liegt.
Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stab und der Platte. [Zur Kontrolle: E: $y + 2z = 6$]
63,4°

b) Der Stab wirft einen Schatten. Untersuchen Sie, ob der Schatten vollständig auf der Platte liegt und berechnen Sie die Länge des Schattens auf der Platte.
nein, Schattenpunkt des Stabendes auf der Ebene: $S^*\left(-\frac{5}{3}\,|\,2\,|\,2\right)$
Schattenpunkt auf der Kante: $K^*(0\,|\,3\,|\,1{,}5)$, $L = 6{,}02\,m$

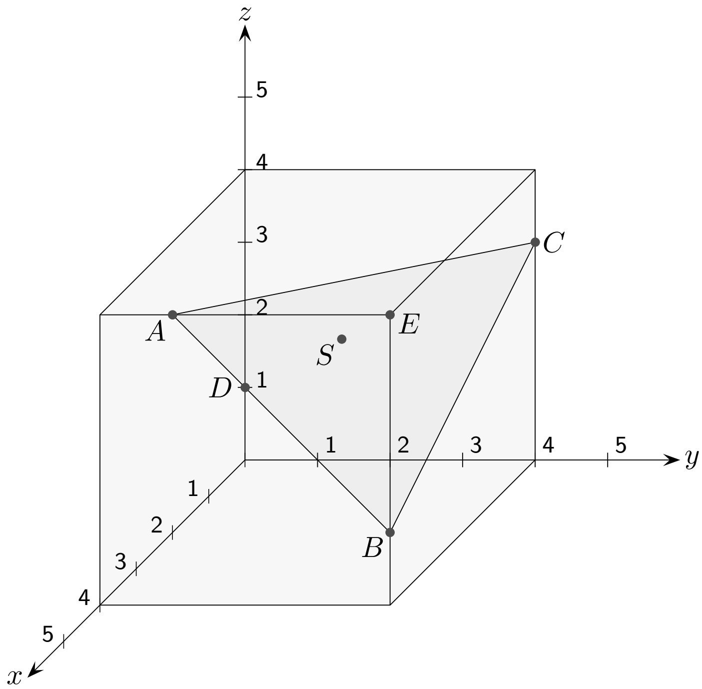
c) Die Lichtquelle bewegt sich von L aus geradlinig in Richtung $\overrightarrow{v} = (-1\,|\,0\,|\,0)^{\mathrm{T}}$.
Betrachten Sie die Schattenpunkte des oberen Stabendes auf der Platte.
Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden, auf der sie liegen. $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

d) Der Punkt $M(5\,|\,2{,}5\,|\,3)$ ist der Mittelpunkt einer Kugel, die auf der Platte liegt.
Berechnen Sie den Radius r der Kugel. Berührpunkt $B(5\,|\,2\,|\,2)$, $r = 1{,}12\,m$
Die Kugel rollt nun die Platte hinab.
Beschreiben Sie, wie der Punkt auf dem Stab ermittelt werden kann, auf den die Kugel trifft.



$\uparrow$ Würfel und Dreieck

In der Abbildung ist ein Würfel mit der Kantenlänge 4 dargestellt.
Die Punkte A, B, C und D sind jeweils 1 LE von der nächstgelegenen Ecke entfernt.



a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Dreiecksseiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$.

c) Begründen Sie, dass das Dreieck ABC nicht gleichseitig ist.

d) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden durch D und E mit der Dreiecksfläche.

e) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Dreiecksfläche verläuft.

f) Ermitteln Sie den minimalen Abstand von Punkten der Dreiecksfläche zum Ursprung.

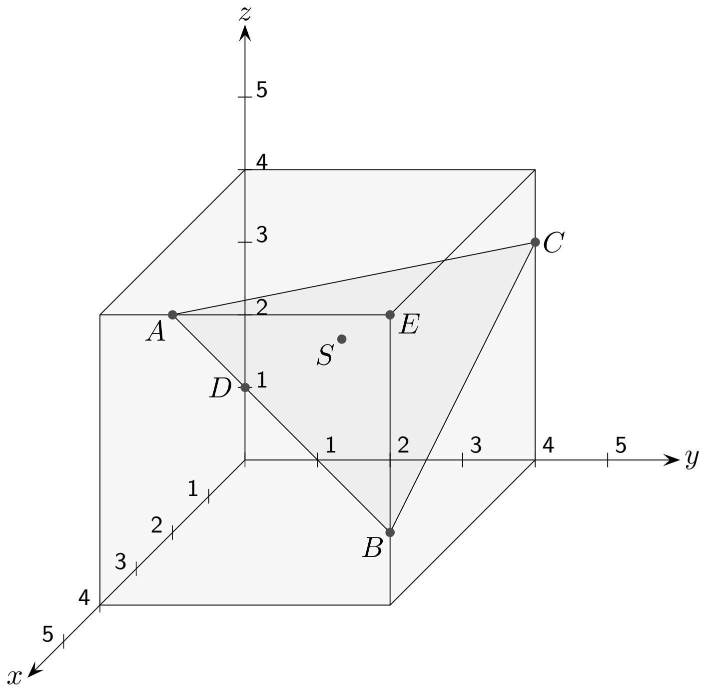
g) Der Punkt B sei auf seiner Kante verschiebbar. Untersuchen Sie, ob es Stellen gibt, so dass der Winkel in B rechtwinklig ist.

h) Wie groß ist der Abstand von C zur Strecke $\overline{AB}$?

i) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

↑ Würfel und Dreieck

In der Abbildung ist ein Würfel mit der Kantenlänge 4 dargestellt.
Die Punkte A, B, C und D sind jeweils 1 LE von der nächstgelegenen Ecke entfernt.



a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$. $\sqrt{18} \approx 4{,}24$

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Dreiecksseiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. $\alpha \approx 56{,}3°$

c) Begründen Sie, dass das Dreieck ABC nicht gleichseitig ist. Alle Winkel müssten 60° groß sein.

d) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden durch D und E mit der Dreiecksfläche. $S\left(\frac{8}{3} \mid \frac{8}{3} \mid 3\right)$

e) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Dreiecksfläche verläuft.

f) Ermitteln Sie den minimalen Abstand von Punkten der Dreiecksfläche zum Ursprung.

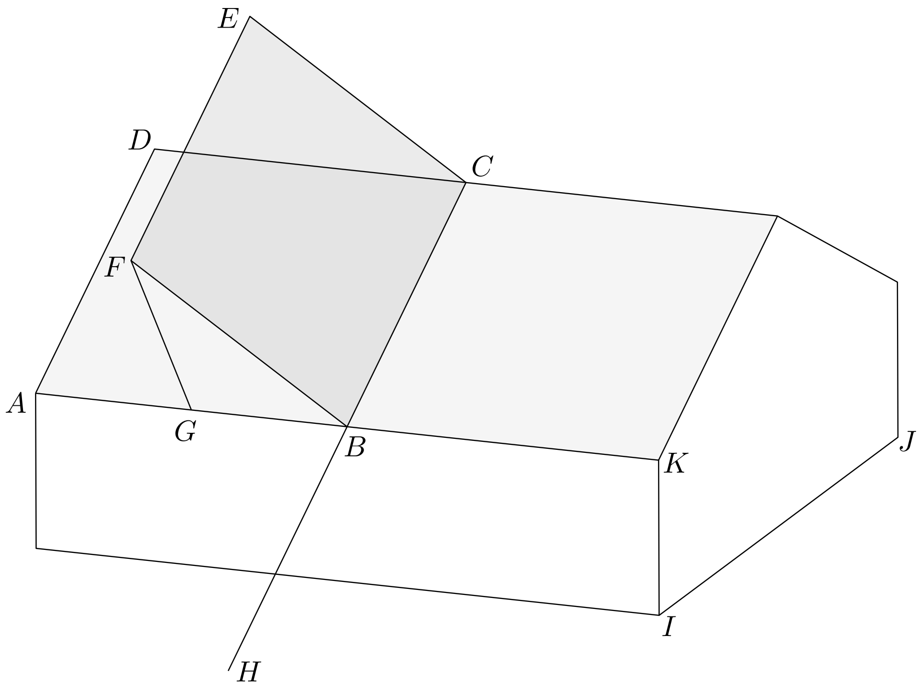
Gleichung der Ebene, in der das Dreieck liegt $x + 2y + 2z = 14, \quad d = \frac{14}{3}$

g) Der Punkt B sei auf seiner Kante verschiebbar. Untersuchen Sie, ob es Stellen gibt, so dass der Winkel in B rechtwinklig ist. $B_1(4 \mid 4 \mid 3),\; B_1(4 \mid 4 \mid 4)$

h) Wie groß ist der Abstand von C zur Strecke $\overline{AB}$? $3\sqrt{2}$

i) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks. $A = 9\,FE$

↑ Solarpanel



Auf einem Gebäude mit Satteldach wird ein Solarpanel angebracht. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte $A(2\,|\,2\,|\,4)$, $B(4\,|\,8\,|\,4)$, $C(-2\,|\,10\,|\,8)$, $D(-4\,|\,4\,|\,8)$ und $F(6\,|\,4\,|\,9)$. Der Erdboden liegt in der xy-Ebene. ($1\,LE$ entspricht $1\,m$)

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

b) Das Solarpanel $BCEF$ ist ebenfalls ein Rechteck. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes E.

c) Stellen Sie die Gleichung der Ebene E_1 auf, in der das Solarpanel liegt. Geben Sie diese Gleichung in Parameterform und in Koordinatenform an.

d) Die Ebene E_2, in der die Dachfläche $ABCD$ liegt, kann beschrieben werden durch die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 0$$

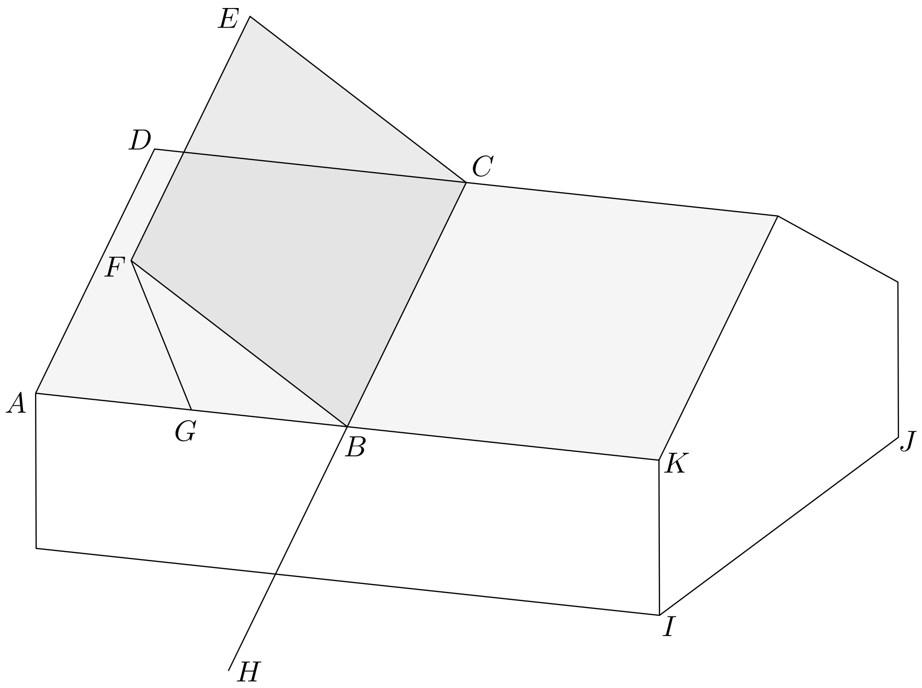
Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebenen E_1 und E_2.

e) Für die Montage des Solarpanels soll eine Schiene angebracht werden, welche in Verlängerung der Kante BC bis zum Erdboden reicht. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes H auf dem Boden und die benötigte Länge $\overline{HB}$ der Schiene.

f) Die Stütze $\overline{FG}$ ist senkrecht zur Dachfläche angebracht. Berechnen Sie die Koordinaten ihres Befestigungspunktes G und die Länge der Stütze.

g) Das Haus ist symmetrisch. B halbiert die Kante $\overline{AK}$. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte I und J.

↑ Solarpanel



Auf einem Gebäude mit Satteldach wird ein Solarpanel angebracht. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte $A(2\,|\,2\,|\,4)$, $B(4\,|\,8\,|\,4)$, $C(-2\,|\,10\,|\,8)$, $D(-4\,|\,4\,|\,8)$ und $F(6\,|\,4\,|\,9)$. Der Erdboden liegt in der xy-Ebene. ($1\,LE$ entspricht $1\,m$)

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, gegenüberliegende Seiten des Vierecks sind parallel und gleich lang, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, also liegt ein Rechteck vor

b) $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $|\,\overrightarrow{BF}\,| = \sqrt{45}$, $|\,\overrightarrow{BC}\,| = \sqrt{56}$,

$A = |\,\overrightarrow{BF}\,| \cdot |\,\overrightarrow{BC}\,| = \sqrt{45} \cdot \sqrt{56} = 50{,}2\,[m^2]$, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BF}$, $E(0\,|\,6\,|\,13)$

c) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 38 \\ 20 \end{pmatrix}$, $E_1\colon\ 26x + 38y + 20z = 488$

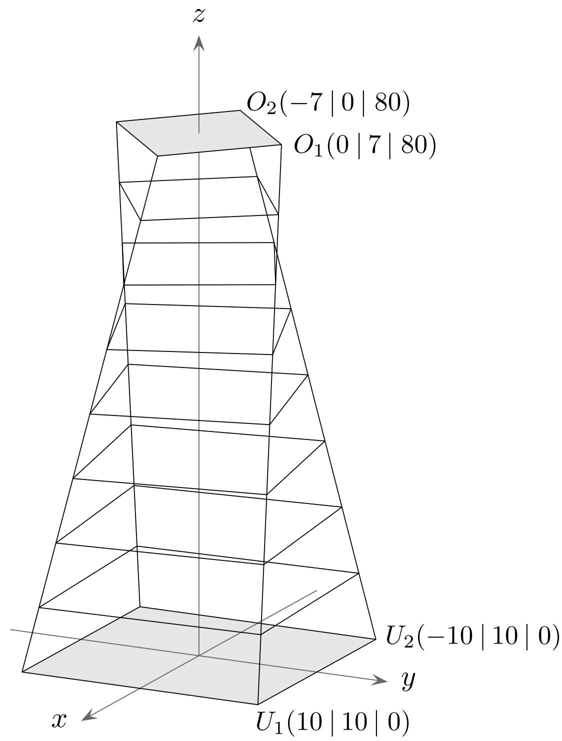
d) $\cos\alpha = \dfrac{70}{\sqrt{35 \cdot 630}}$, $\alpha = 61{,}9°$

e) Spurpunkt der Geraden BC: $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + t\,\overrightarrow{BC}$, $H(10\,|\,6\,|\,0)$, $|\overline{HB}| = 7{,}48$

f) Schnitt der Geraden FG: $\vec{x} = \overrightarrow{OF} + s\vec{n}_2$ mit E_2, $G(3\,|\,5\,|\,4)$, $|\,\overrightarrow{FG}\,| = 5{,}92$

g) $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, $I(6\,|\,14\,|\,0)$, $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OI} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $J(-6\,|\,18\,|\,0)$

↑ Hafengebäude



Die Grafik beinhaltet die architektonische Idee eines Hochhauses am Hamburger Hafen (in z-Richtung nicht maßstäblich). Die Bodenfläche und das Dach bilden je ein waagerechtes Quadrat, dessen Mittelpunkt auf der z-Achse liegt.

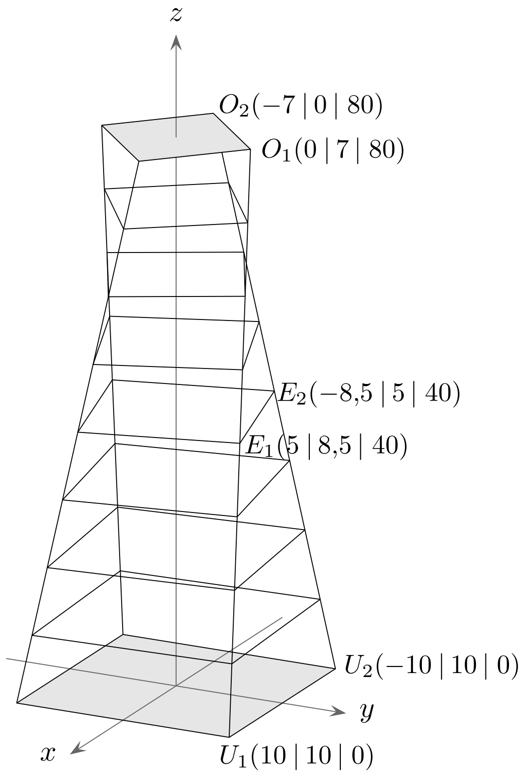
a) Ermitteln Sie die Gleichungen der Geraden U_1O_1 und U_2O_2.

b) In verschiedenen Höhen h haben die Stockwerke viereckige waagerechte Bodenflächen. Begründen Sie, dass diese Vierecke Quadrate sind und ermitteln Sie für $h = 40$ den Flächeninhalt.

c) Ermitteln Sie den Winkel, um den die Bodenfläche des Geschosses mit der Bodenhöhe $h = 40$ gegenüber dem Grundgeschoss gedreht ist.
Untersuchen Sie, ob die Bodenflächen aufeinander folgender Geschosse mit gleichen Abständen stets um den gleichen Winkel weitergedreht sind.

d) Stellen Sie sich vor, das Gebäude würde in der gleichen Weise auf eine Gesamthöhe von $120\,m$ nach oben weitergebaut werden. Die Geschosshöhe sei $4\,m$.
Welche Geschossbodenfläche wäre am kleinsten?

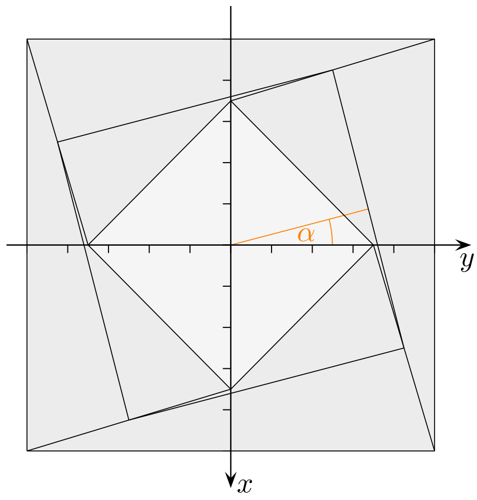
↑ Hafengebäude



a) $g_{U_1O_1}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 80 \end{pmatrix}$, $\quad g_{U_2O_2}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 80 \end{pmatrix}$

b)

Draufsicht



Aus Symmetriegründen müssen Seiten und Winkel dieser Vierecke gleich sein.
$A = \overrightarrow{E_1E_2} \cdot \overrightarrow{E_1E_2} = 194{,}5$

c) Der Drehwinkel kann in der xy-Ebene betrachtet werden.
$\alpha = \arctan \dfrac{1{,}75}{6{,}75} = 14{,}53°$

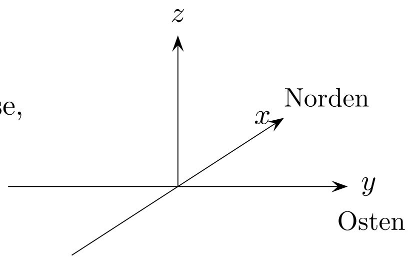
Wären die Drehwinkel gleich, würde die Dachfläche gegenüber der Bodenfläche um $2 \cdot 14{,}53°$ gedreht sein, es sind jedoch $45°$.

d) $F_1\left(10 - \frac{h}{8} \,|\, 10 - \frac{3h}{80} \,|\, h\right)$, $\; F_2\left(-10 + \frac{3h}{80} \,|\, 10 - \frac{h}{8} \,|\, h\right)$

$A(h) = \overrightarrow{F_1F_2} \cdot \overrightarrow{F_1F_2}$ quadratische Funktion, Minimum bei $h_{\min} = 95{,}4$

Im 25. Geschoss (Bodenhöhe $96\,m$) wäre die Bodenfläche minimal, $A(96) = 89{,}92\;[m^2]$.

↑ Flugbahnen



Mit dem Abheben eines Flugzeuges beginnt die Startflugphase, die durch die Gerade

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix}$$

unter der vereinfachenden Annahme einer konstanten Geschwindigkeit beschrieben werden soll. Dabei ist der Parameter t die Zeit in Sekunden nach dem Abheben des Flugzeugs zum Zeitpunkt $t = 0$, Zahlenangaben in m.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Flugzeugs in der Startflugphase in km/h.
Hinweis: Berechnen Sie dazu den in der 1. Sekunde zurückgelegten Weg.
Bestimmen Sie die Größe des Steigungswinkels, den das Flugzeug in der Startflugphase gegenüber der Rollbahn hat.

b) Der Kontrollraum des Flughafentowers befindet sich im Punkt $T(0\,|\,100\,|\,30)$.
Berechnen Sie die kürzeste Entfernung, die das Flugzeug in der Startflugphase zum Tower hat.

c) Der Start des Flugzeugs erfolgt bei sonnigem Wetter.
Die Richtung der Sonneneinstrahlung wird durch $\vec{s} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Schattens des Flugzeugs, der sich fortwährend auf der xy-Ebene bewegt.

Begründen Sie, dass es einen Unterschied zwischen Schattengeschwindigkeit und Geschwindigkeit des Flugzeugs gibt.

Untersuchen Sie, ob es eine Situation geben könnte, in der die Schattengeschwindigkeit gleich Null ist.

d) In direkter Nähe des Flughafens hat sich eine Regenfront aufgebaut.
Die Front liegt in der Ebene $E\colon\ 4x + 3y = 12000$.

Beschreiben Sie (kurz) die Lage der Regenfront im Koordinatensystem.

Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem das Flugzeug in die Regenfront eintaucht, sowie die dazugehörige Flughöhe.

e) Der Flughafentower überwacht den gesamten Flugverkehr im Überwachungsbereich seines Radars. Der halbkugelförmige Überwachungsbereich hat einen Radius von 15 km, der Mittelpunkt der Halbkugel befinde sich in $T(0\,|\,100\,|\,30)$.
Ein vorüber fliegendes Flugzeug, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Radar in der Position $P(3000\,|\,-8000\,|\,6000)$ befindet, fliegt (auch vor dem Zeitpunkt $t = 0$) in konstanter Höhe mit einer Geschwindigkeit von 150 m/s geradlinig nordwärts.

Ermitteln Sie die Zeitspanne, in der sich das Flugzeug im Überwachungsbereich des Radars befindet.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_2, in dem sich das startende (aus den vorhergehenden Aufgaben) und das vorüber fliegende Flugzeug am nächsten kommen.

Man spricht von einer Beinahekollision, wenn sich Flugzeuge um weniger als 2 km nähern.
Entscheiden Sie, ob es zwischen den beiden Flugzeugen zu einer Beinahekollision kommt.
Untersuchen Sie, ob die Entfernung beider Flugzeuge zu dem kritischen Zeitpunkt t_2 mit dem Abstand der Flugbahnen übereinstimmt.

f) Das zweite Flugzeug aus e) befindet sich nach wie vor in 6000 m Höhe.
Der GPS-Empfang ist schlecht, deshalb bittet der Pilot drei in der Nähe befindliche Radarstationen um Navigationshilfe. Die drei Stationen haben folgende Positionen:
$T(0 \mid 100 \mid 30)$ (aus b) bekannt), $T_2(-2000 \mid -10000 \mid 30)$ und $T_3(5000 \mid -12000 \mid 30)$.
Der Pilot erfährt (fast zeitgleich), dass sich die drei Radarstationen in folgenden Distanzen (zu seiner Position) befinden: $d = 8405\,m$, $d_2 = 9254\,m$ und $d_3 = 9415\,m$.
Bestimmen Sie die Position des Flugzeuges zum Zeitpunkt der Anfrage.
Beurteilen Sie Ihr Ergebnis mit dem Wissen aus e) auf Plausibilität.

↑ Flugbahnen

a) $s = \sqrt{30^2 + 48^2 + 36^2} = 67{,}082$ Die Startgeschwindigkeit beträgt etwa $241{,}5\ km/h$.
Steigungswinkel $\alpha = 32{,}5°$

b) Die gesuchte Entfernung beträgt ungefähr $276{,}12\ m$ ($t = \frac{518}{75}$).

c) Das Flugzeug startet in $S(-200 \mid -400 \mid 0)$ und ist eine Sekunde später in $A(-170 \mid -352 \mid 36)$.
$A'(-182 \mid -328 \mid 0)$, Spurpunkt der Geraden $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{s}$, ist der Schatten von A.
$|\overrightarrow{SA'}| = \sqrt{74{,}2}$ Die Schattengeschwindigkeit beträgt etwa $267\ km/h$.

Die Projektionsstrecke, abhängig von der Richtung der Sonneneinstrahlung, ist länger als die entsprechende Flugstrecke.
Fliegt man genau gegen die Sonne, so wäre der Schatten ein fester Punkt.

d) Die Regenfront liegt in einer zur z-Achse parallelen Ebene bzw. senkrecht zur xy-Ebene. Das Flugzeug gerät in ca. $1909\ m$ Höhe in die Regenfront ($t_1 = 53{,}03$, z-Komponente des Schnittpunkts).

e) Zum vorüber fliegenden Flugzeug gehört die Gleichung $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3000 \\ -8000 \\ 6000 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OT}| = 15000$, $t^2 - 108t - 5099{,}96 = 0$ $t_1 = 143{,}531$, $t_1 = -35{,}531$

Die Radarüberwachung dauert insgesamt etwa $179\ s$ oder etwa 3 Minuten.

Zu einem Zeitpunkt t_2 (nach dem Abheben von der Startbahn) befindet sich das startende Flugzeug im Punkt A und das vorüber fliegende Flugzeug zur gleichen Zeit t_2 im Punkt B mit

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3000 \\ -8000 \\ 6000 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$|\overrightarrow{AB}|$ ist minimal für $t_2 = 86{,}3$. Mit diesem Wert gilt $|\overrightarrow{AB}| = 3192{,}2\ [m]$.
Es besteht keine Gefahr einer Beinahekollision.

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht auf keinem der beiden Richtungsvektoren der Flugbahnen senkrecht (Skalarprodukte ungleich null). Hiermit sind die Entfernung der Flugzeuge und der Abstand der Flugbahnen nicht identisch. Alternativ: Den Abstand $d = 1382{,}8\ m$ der windschiefen Flugbahnen berechnen.

f) Die unbekannte Position des Flugzeuges sei $X(x \mid y \mid 6000)$.
Dann gelten die drei Gleichungen: $|\overrightarrow{TX}| = 8405$, $|\overrightarrow{T_2X}| = 9254$, $|\overrightarrow{T_3X}| = 9415$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 200y &= 34993125 && \text{(I)} \\ x^2 + y^2 + 4000x + 20000y &= -54004384 && \text{(II)} \\ x^2 + y^2 - 10000x + 24000y &= -115998675 && \text{(III)} \end{aligned}$$

Man subtrahiert (II) - (I) und (III) - (II) und erhält das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4000x + 20200y &= -88997509 \\ -14000x + 4000y &= -61994291 \\ \hline x_1 &= 3000 \\ x_2 &= -5000 \end{aligned}$$

Das Flugzeug ist auf dem Nordkurs geblieben und ist gegenüber der Position aus e) 3 km in gleicher Höhe weitergeflogen.

↑ Lichtkunst

Das Werk eines Künstlers besteht aus einer Skulptur und zwei starren Stromschienen, die von einer Wand (xz-Ebene) zur anderen Wand (yz-Ebene) verlaufen. Auf diesen Schienen können Lampen bewegt werden, um die Skulptur zu beleuchten. Da die Schienen nur einen Durchmesser von $4\,cm$ haben, soll diese Ausdehnung in den Rechnungen vernachlässigt werden. Die Schienen werden also als Teile von Geraden angesehen. Die beiden Stromschienen sind an den Wänden befestigt und verbinden die Punkte $P_1(10\,|\,0\,|\,3)$ und $Q_1(0\,|\,6\,|\,6)$ bzw. $P_2(8\,|\,0\,|\,5)$ und $Q_2(0\,|\,8\,|\,4)$. 1 Längeneinheit entspricht $1\,m$.

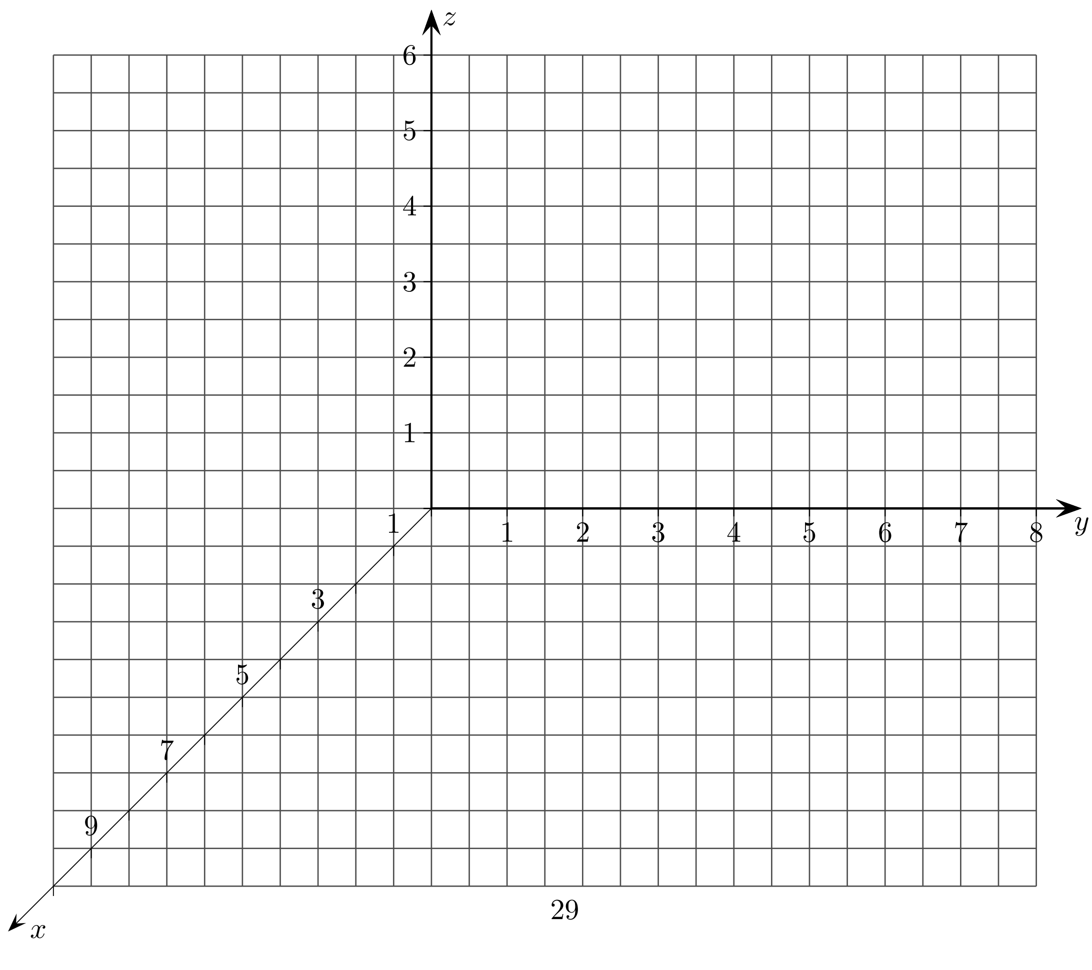
a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden g_1 und g_2, die den Verlauf der Stromschienen beschreiben und zeichnen Sie die Stromschienen in ein Koordinatensystem ein.

b) Zeigen Sie, dass sichergestellt ist, dass die Stromschienen sich nicht berühren.

c) In den Punkten $L_1(5\,|\,3\,|\,4{,}5)$ und $L_2(2\,|\,6\,|\,4{,}25)$ befinden sich Lampen, die als punktförmige Lichtquellen betrachtet werden können. Weisen Sie nach, dass L_1 auf g_1 liegt und L_2 auf g_2, und bestimmen Sie den Abstand der beiden Lampen voneinander.
Zeichnen Sie die Lampenpunkte in das Koordinatensystem ein.

d) Der höchste Punkt der Skulptur sei $S(2\,|\,4\,|\,2{,}25)$. Der Künstler möchte, dass der Schatten dieser Skulpturenspitze noch auf den Fußboden des Raumes (xy-Ebene) und nicht auf eine Wand fällt. Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung nur eine der beiden Lampen eingeschaltet werden darf. Bestimmen Sie den Schattenpunkt R auf dem Fußboden des Raumes und zeichnen Sie R und S in das Koordinatensystem ein.

e) An die Stromschienen sollen neue Lampen angebracht werden, die von der Schiene $0{,}2\,m$ vertikal herunterhängen. Beurteilen Sie, ob dies möglich ist, ohne dass dadurch die freie Beweglichkeit der Lampen auf der gesamten oberen Schiene durch die untere Schiene eingeschränkt wird.



↑ Lichtkunst

a) $g_1\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + s\,\overrightarrow{P_1Q_1},\quad g_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-10\\6\\3\end{pmatrix}$

$g_2\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP_2} + s\,\overrightarrow{P_2Q_2},\quad g_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-8\\8\\-1\end{pmatrix}$

b) Gleichsetzen von g_1 und g_2 ergibt: $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{3}{8}$, 3. Zeile $\frac{15}{8} \neq 2$, kein Schnittpunkt

c) $\overrightarrow{OL_1} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{P_1Q_1},\quad \overrightarrow{OL_2} = \overrightarrow{OP_2} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{P_2Q_2},\quad |\,\overrightarrow{L_2L_1}\,| = 4{,}25\ [m]$

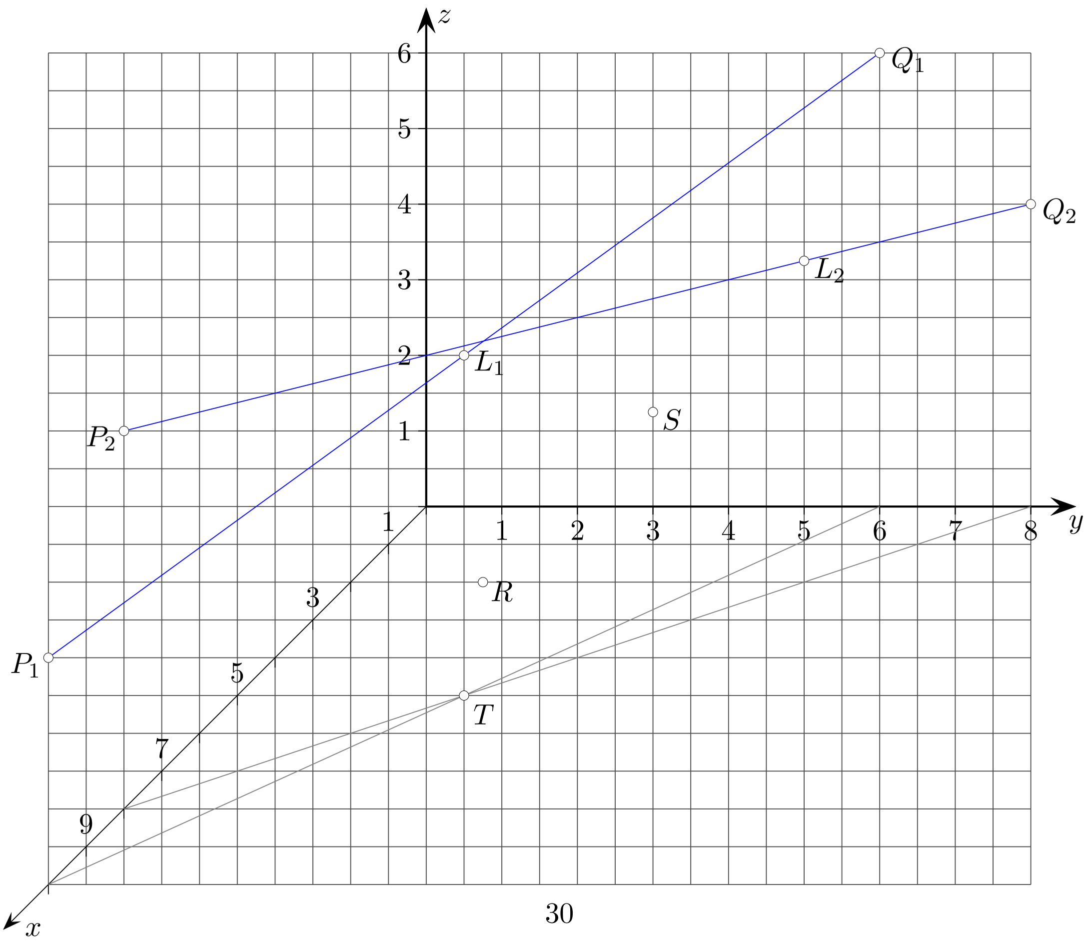
d) $h_1\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OS} + r\,\overrightarrow{SL_1},\quad h_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\2{,}25\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-1\\2{,}25\end{pmatrix}$, Spurpunkt $U(-1\,|\,5\,|\,0)$.

$h_2\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OS} + r\,\overrightarrow{SL_2},\quad h_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\2{,}25\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$, Spurpunkt $R(2\,|\,1{,}75\,|\,0)$

Nur die Lampe L_2 darf eingeschaltet werden (keine negativen Koordinaten).

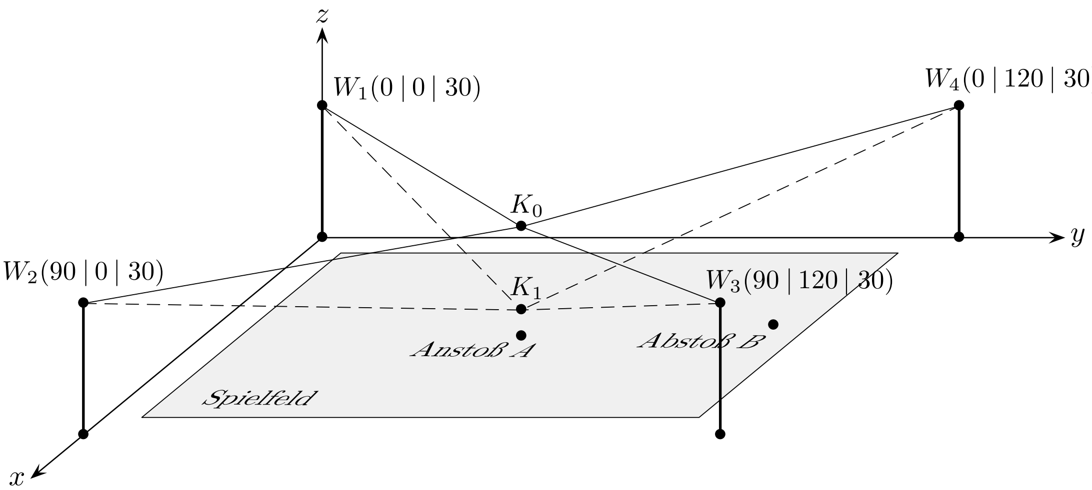
e) Am Schnittpunkt $T(5\,|\,3\,|\,0)$ der Projektionsgeraden (z-Koordinate null) ist die Höhendifferenz der Schienen zu ermitteln, $g_1\colon\ \begin{pmatrix}5\\3\\H_1\end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_1} + s\,\overrightarrow{P_1Q_1}$, $s = \frac{1}{2}$, $H_1 = 4{,}5$ (kürzer: siehe L_1) und für g_2: $t = \frac{3}{8}$, $H_2 = 4{,}625$

Die Höhendifferenz über T beträgt $H_2 - H_1 = 0{,}125\ [m]$, so dass eine Lampe, die $0{,}2\,m$ tief von der Schiene 2 hängt, die Schiene 1 dort berühren würde.



↑ Spidercam

Für die Fernsehübertragung eines Fußballspiels wird über dem Spielfeld eine bewegliche Kamera (Spidercam) installiert. Ein Seilzugsystem, das an vier Masten befestigt wird, hält die Kamera in der gewünschten Position. Seilwinden, welche die Seile koordiniert verkürzen und verlängern, ermöglichen eine Bewegung der Kamera.
In der Abbildung ist das horizontale Spielfeld modellhaft als Rechteck in der xy-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems dargestellt. Die Punkte W_1, W_2, W_3 und W_4 beschreiben die Positionen der vier Seilwinden. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität, d. h. alle vier Seilwinden sind in einer Höhe von 30 m angebracht.



Der Punkt $A(45\,|\,60\,|\,0)$ beschreibt die Lage des Anstoßpunkts auf dem Spielfeld.
Die Kamera befindet sich zunächst in einer Höhe von 25 m vertikal über dem Anstoßpunkt.
Um den Anstoß zu filmen, wird die Kamera um 19 m vertikal abgesenkt. In der Abbildung ist die ursprüngliche Kameraposition durch den Punkt K_0, die abgesenkte Position durch den Punkt K_1 dargestellt.

a) Berechnen Sie die Seillänge, die von jeder der vier Seilwinden abgerollt werden muss, um dieses Absenken zu ermöglichen, wenn man davon ausgeht, dass die Seile geradlinig verlaufen.

Kurze Zeit später legt sich ein Torhüter den Ball für einen Abstoß bereit. Der Abstoß soll von der Kamera aufgenommen werden. Durch das gleichzeitige Verlängern beziehungsweise Verkürzen der vier Seile wird die Kamera entlang einer geraden Bahn zu einem Zielpunkt bewegt, der in einer Höhe von 10 m über dem Spielfeld liegt. Im Modell wird der Zielpunkt durch den Punkt K_2 beschrieben, die Bewegung der Kamera erfolgt vom Punkt K_1 entlang der Geraden g mit der Gleichung

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OK_1} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \text{ zum Punkt } K_2. \qquad (K_2 \text{ wird in der Grafik durch } W_3 \text{ verdeckt.})$$

b) Bestimmen Sie die Koordinaten von K_2. [Ergebnis: $K_2(51\,|\,100\,|\,10)$]

c) Im Zielpunkt ist die Kamera zunächst senkrecht nach unten orientiert. Um die Position des Balls anzuvisieren, die im Modell durch den Punkt $B(40\,|\,105\,|\,0)$ beschrieben wird, muss die Kamera gedreht werden. Berechnen Sie die Größe des erforderlichen Drehwinkels.

Der Torwart führt den Abstoß aus. Der höchste Punkt der Flugbahn des Balls wird im Modell durch den Punkt $H(50 \mid 70 \mid 15)$ beschrieben.

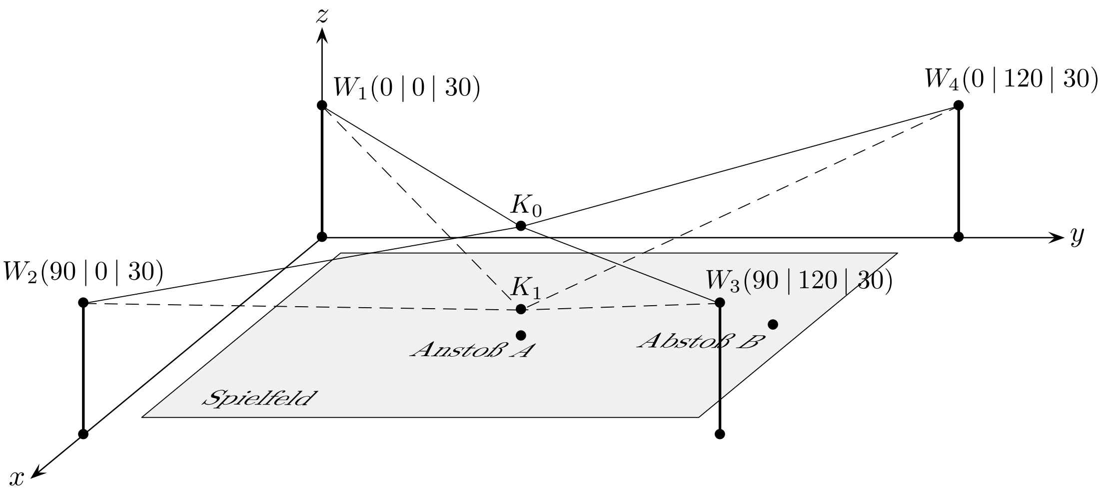
d) Ermitteln Sie eine Gleichung der durch die Punkte W_1, W_2 und K_2 festgelegten Ebene E in Normalenform und weisen Sie nach, dass H unterhalb von E liegt.

[mögliches Teilergebnis: $E\colon\ y + 5z = 150$]

e) Machen Sie plausibel, dass folgende allgemeine Schlussfolgerung falsch ist:
„Liegen der Startpunkt und der anvisierte höchste Punkt einer Flugbahn des Balls im Modell unterhalb der Ebene E, so kann der Ball entlang seiner Bahn die Seile, die durch $[W_1K_2]$ und $[W_2K_2]$ beschrieben werden, nicht berühren.“

↑ Spidercam

Für die Fernsehübertragung eines Fußballspiels wird über dem Spielfeld eine bewegliche Kamera (Spidercam) installiert. Ein Seilzugsystem, das an vier Masten befestigt wird, hält die Kamera in der gewünschten Position. Seilwinden, welche die Seile koordiniert verkürzen und verlängern, ermöglichen eine Bewegung der Kamera.
In der Abbildung ist das horizontale Spielfeld modellhaft als Rechteck in der xy-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems dargestellt. Die Punkte W_1, W_2, W_3 und W_4 beschreiben die Positionen der vier Seilwinden. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität, d. h. alle vier Seilwinden sind in einer Höhe von 30 m angebracht.



Der Punkt $A(45\,|\,60\,|\,0)$ beschreibt die Lage des Anstoßpunkts auf dem Spielfeld.
Die Kamera befindet sich zunächst in einer Höhe von 25 m vertikal über dem Anstoßpunkt.
Um den Anstoß zu filmen, wird die Kamera um 19 m vertikal abgesenkt. In der Abbildung ist die ursprüngliche Kameraposition durch den Punkt K_0, die abgesenkte Position durch den Punkt K_1 dargestellt.

a) Berechnen Sie die Seillänge, die von jeder der vier Seilwinden abgerollt werden muss, um dieses Absenken zu ermöglichen, wenn man davon ausgeht, dass die Seile geradlinig verlaufen.

$$S_0 = |\overrightarrow{W_1K_0}| = \sqrt{5650}$$
$$S_1 = |\overrightarrow{W_1K_1}| = \sqrt{6201}$$
$$l = S_1 - S_0 \approx 3{,}58\,[\mathrm{m}]$$

Kurze Zeit später legt sich ein Torhüter den Ball für einen Abstoß bereit. Der Abstoß soll von der Kamera aufgenommen werden. Durch das gleichzeitige Verlängern beziehungsweise Verkürzen der vier Seile wird die Kamera entlang einer geraden Bahn zu einem Zielpunkt bewegt, der in einer Höhe von 10 m über dem Spielfeld liegt. Im Modell wird der Zielpunkt durch den Punkt K_2 beschrieben, die Bewegung der Kamera erfolgt vom Punkt K_1 entlang der Geraden g mit der Gleichung

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OK_1} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \text{ zum Punkt } K_2.$$ (K_2 wird in der Grafik durch W_3 verdeckt.)

b) Bestimmen Sie die Koordinaten von K_2. [Ergebnis: $K_2(51\,|\,100\,|\,10)$]

Schnitt von g mit der Ebene $z = 10$

c) Im Zielpunkt ist die Kamera zunächst senkrecht nach unten orientiert. Um die Position des Balls anzuvisieren, die im Modell durch den Punkt $B(40\,|\,105\,|\,0)$ beschrieben wird, muss die Kamera gedreht werden. Berechnen Sie die Größe des erforderlichen Drehwinkels.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \measuredangle(\overrightarrow{K_2B}, \vec{v}) = 50{,}4°$$

Der Torwart führt den Abstoß aus. Der höchste Punkt der Flugbahn des Balls wird im Modell durch den Punkt $H(50\,|\,70\,|\,15)$ beschrieben.

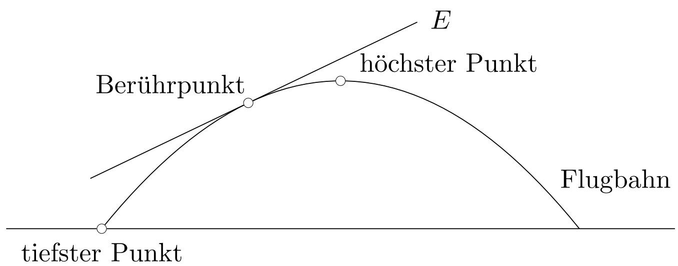
d) Ermitteln Sie eine Gleichung der durch die Punkte W_1, W_2 und K_2 festgelegten Ebene E in Normalenform und weisen Sie nach, dass H unterhalb von E liegt.

[mögliches Teilergebnis: $E\colon\ y + 5z = 150$]

möglich $\quad E\colon\ 1800y + 9000z = 270000$

Die z Koordinaten von $H(50\,|\,70\,|\,15)$ und $P(50\,|\,70\,|\,a)$ werden verglichen, wobei a so bestimmt wird, dass $P \in E$ gilt, $a = 16$ (Punktprobe). H liegt somit unterhalb der Ebene E.

e) Machen Sie plausibel, dass folgende allgemeine Schlussfolgerung falsch ist:
„Liegen der Startpunkt und der anvisierte höchste Punkt einer Flugbahn des Balls im Modell unterhalb der Ebene E, so kann der Ball entlang seiner Bahn die Seile, die durch $[W_1K_2]$ und $[W_2K_2]$ beschrieben werden, nicht berühren.“



Die Flugbahn des Fußballs verläuft im Allgemeinen parabelförmig. Die Skizze veranschaulicht, dass die Flugbahn die Ebene berühren oder schneiden kann, selbst wenn ihr Startpunkt und ihr höchster Punkt unterhalb von E liegen.

↑ Drohne

Eine Bodenstation überwacht den Flug einer Drohne. Die Bewegung kann modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden, dessen xy-Ebene die Horizontale beschreibt. Der Standort der Bodenstation wird durch den Punkt $B(0\,|\,2000\,|\,0)$ beschrieben, der Startpunkt der Drohne durch $S(6600\,|\,-2000\,|\,70)$, das Ziel durch $Z(-1500\,|\,7600\,|\,70)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Die Drohne fliegt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Zu S steigt sie vertikal auf, in Z vertikal ab. Diese beiden Flugabschnitte bleiben im Weiteren unberücksichtigt.

a) Begründen Sie, dass die horizontale Flugbahn der Drohne im Modell entlang der Strecke

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6600 \\ -2000 \\ 70 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8100 \\ 9600 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le r \le 1, \qquad \text{verläuft.}$$

Die Dauer des horizontalen Flugs beträgt 15 Minuten.

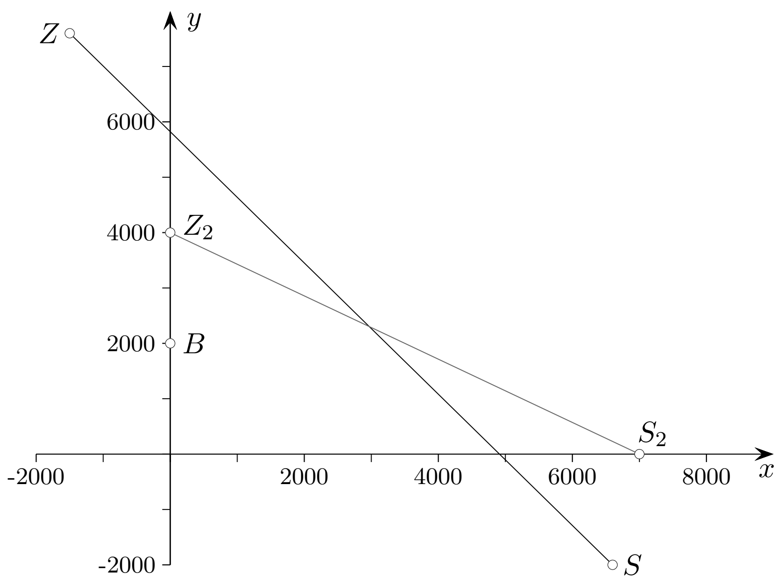
b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Drohne in Kilometern pro Stunde.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, der die Position der Drohne nach 10 Minuten Flugdauer beschreibt.

c) Ermitteln Sie die kürzeste Entfernung, die die Drohne auf ihrem horizontalen Flug zur Bodenstation hat.

d) Nach welcher Flugdauer hat die Drohne erstmalig von der Bodenstation eine Entfernung von 4 km?

e) Gleichzeitig mit der ersten Drohne startet eine zweite Drohne im Punkt $S_2(7000\,|\,0\,|\,70)$ mit dem Ziel $Z_2(0\,|\,4000\,|\,70)$. Ihre Flugdauer beträgt 20 Minuten.
Nach welcher Flugdauer haben die Drohnen die kürzeste Entfernung voneinander?



↑ Drohne

Eine Bodenstation überwacht den Flug einer Drohne. Die Bewegung kann modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden, dessen xy-Ebene die Horizontale beschreibt. Der Standort der Bodenstation wird durch den Punkt $B(0\,|\,2000\,|\,0)$ beschrieben, der Startpunkt der Drohne durch $S(6600\,|\,-2000\,|\,70)$, das Ziel durch $Z(-1500\,|\,7600\,|\,70)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Die Drohne fliegt geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Zu S steigt sie vertikal auf, in Z vertikal ab. Diese beiden Flugabschnitte bleiben im Weiteren unberücksichtigt.

a) Begründen Sie, dass die horizontale Flugbahn der Drohne im Modell entlang der Strecke

$$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 6600 \\ -2000 \\ 70 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -8100 \\ 9600 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le r \le 1, \qquad \text{verläuft.}$$

$r = 0$ und $r = 1$ einsetzen ...

Die Dauer des horizontalen Flugs beträgt 15 Minuten.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Drohne in Kilometern pro Stunde.

$|\overrightarrow{SZ}| = 12560{,}65$ [m] 837,38 m/min 50,24 km/h

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, der die Position der Drohne nach 10 Minuten Flugdauer beschreibt. $r = 2/3$, $P(1200\,|\,4400\,|\,70)$

c) Ermitteln Sie die kürzeste Entfernung, die die Drohne auf ihrem horizontalen Flug zur Bodenstation hat. Abstand Punkt/Gerade 2465,83 m

d) Nach welcher Flugdauer hat die Drohne erstmalig von der Bodenstation eine Entfernung von 4 km? $|\overrightarrow{X} - \overrightarrow{A}| = 4000$, $r_1 = 0{,}331$, $(P(3914{,}91\,|\,1182{,}33\,|\,70))$, $d \approx 5$ min

$(r_2 = 0{,}833)$

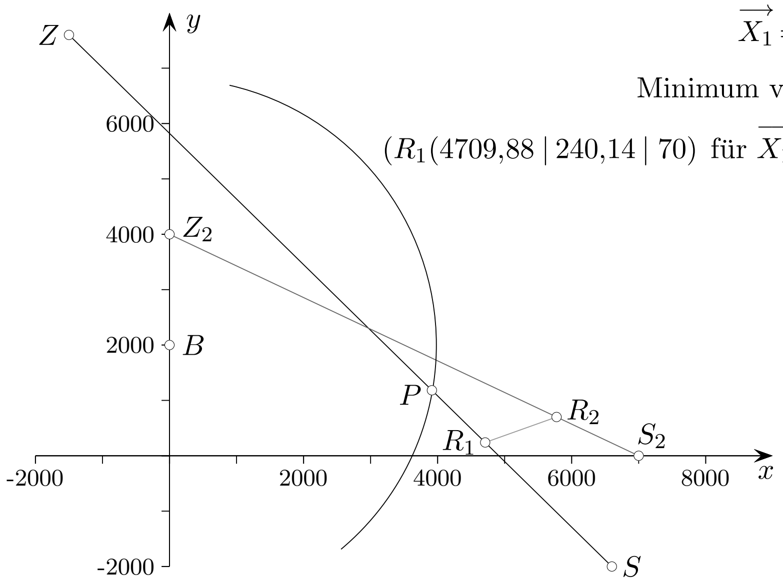
e) Gleichzeitig mit der ersten Drohne startet eine zweite Drohne im Punkt $S_2(7000\,|\,0\,|\,70)$ mit dem Ziel $Z_2(0\,|\,4000\,|\,70)$. Ihre Flugdauer beträgt 20 Minuten.
Nach welcher Flugdauer haben die Drohnen die kürzeste Entfernung voneinander?

(Der Schnittpunkt $Q(2968{,}97\,|\,2303{,}45\,|\,70)$ führt nicht zur Lösung.)

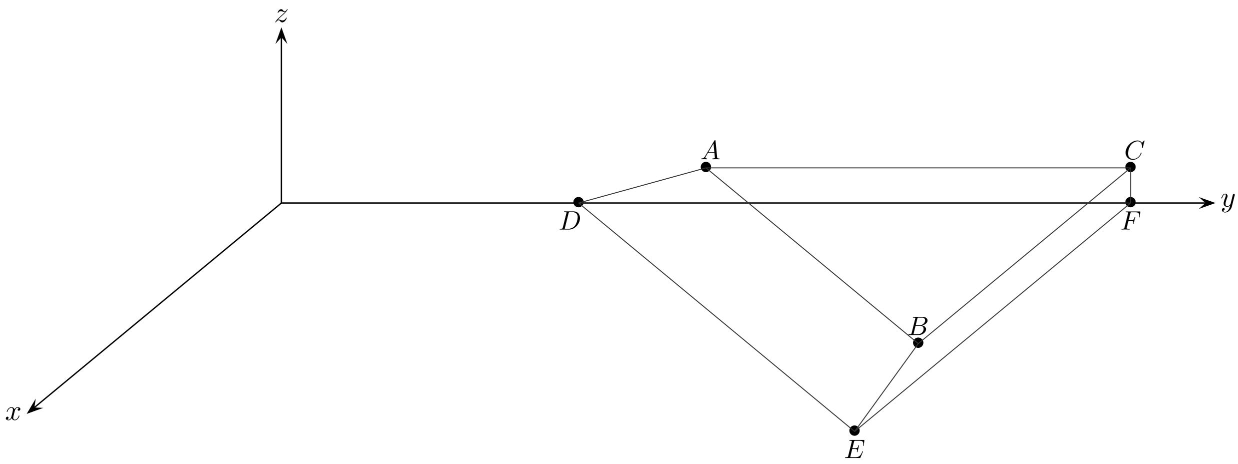
$\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{S} + \frac{r}{15}\,\overrightarrow{SL}, \qquad \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{S_2} + \frac{r}{20}\,\overrightarrow{S_2L_2}$

Minimum von $|\overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{X_1}|$ für $r \approx 3{,}5$ (1160,1 m)

$(R_1(4709{,}88\,|\,240{,}14\,|\,70)$ für $\overrightarrow{X_1}$, $R_2(5774{,}92\,|\,700{,}044\,|\,70)$ für $\overrightarrow{X_2})$



↑ Podest Berlin 2020 ähnlich



Der abgebildete Körper $ABCDEF$ mit $A(0\,|\,10\,|\,1)$, $B(10\,|\,20\,|\,1)$, $C(0\,|\,20\,|\,1)$, $D(0\,|\,7\,|\,0)$ und $F(0\,|\,20\,|\,0)$ stellt modellhaft ein Podest dar, das auf der Bühne eines Theaters steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) A, B und D liegen in der Ebene H.
Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform.

b) Begründen Sie, dass die Gerade i: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

sowohl in der xy-Ebene als auch in der Ebene H liegt.

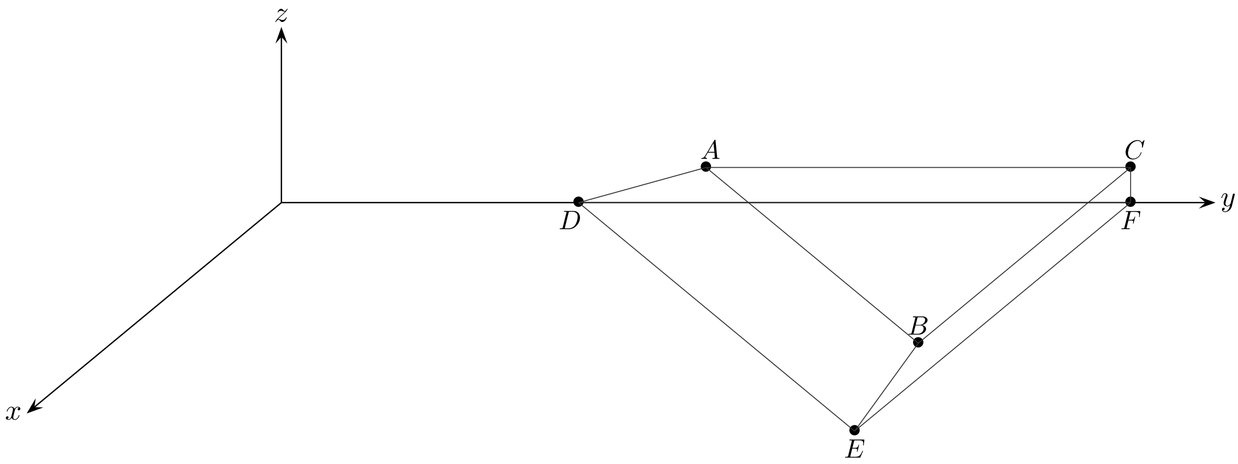
c) Der Punkt E liegt auf der Geraden i, wobei der Abstand von E und F ebenso groß ist wie der Abstand von D zu F. Ermitteln Sie die Koordinaten von E.

d) Untersuchen Sie, ob die beiden Seitenflächen $ACFD$ und $BEFC$ senkrecht zur xy-Ebene stehen.

e) Begründen Sie, ohne zu rechnen, dass die Vierecke $ACFD$ und $BEFC$ den gleichen Flächeninhalt haben.

f) Zeigen Sie, dass die Deckfläche des Podests rechtwinklig ist, und berechnen Sie deren Flächeninhalt.

↑ Podest



Der abgebildete Körper $ABCDEF$ mit $A(0\,|\,10\,|\,1)$, $B(10\,|\,20\,|\,1)$, $C(0\,|\,20\,|\,1)$, $D(0\,|\,7\,|\,0)$ und $F(0\,|\,20\,|\,0)$ stellt modellhaft ein Podest dar, das auf der Bühne eines Theaters steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) A, B und D liegen in der Ebene H.
Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform. $\quad x - y + 3z + 7 = 0$

b) Begründen Sie, dass die Gerade i: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

sowohl in der xy-Ebene als auch in der Ebene H liegt.

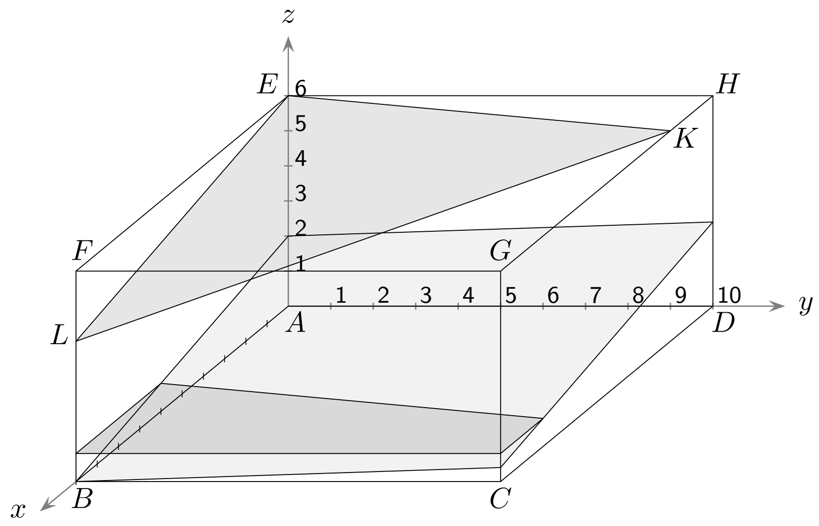
c) Der Punkt E liegt auf der Geraden i, wobei der Abstand von E und F ebenso groß ist wie der Abstand von D zu F. Ermitteln Sie die Koordinaten von E. $\quad E(13\,|\,20\,|\,0)$

d) Untersuchen Sie, ob die beiden Seitenflächen $ACFD$ und $BEFC$ senkrecht zur xy-Ebene stehen.
$ACFD$ liegt in der yz-Ebene, $BEFC$ in der Ebene $y = 20$

e) Begründen Sie, ohne zu rechnen, dass die Vierecke $ACFD$ und $BEFC$ den gleichen Flächeninhalt haben. Trapeze sind kongruent.

f) Zeigen Sie, dass die Deckfläche des Podests rechtwinklig ist, und berechnen Sie deren Flächeninhalt. $\quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\quad A = 50\ [\mathrm{m}^2]$

↑ Theater   Berlin 2020 gA



Eine ehemalige Lagerhalle soll für ein Theater umgebaut werden. Die Lagerhalle hat eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 10 m. Die Grundfläche liegt in der xy-Ebene. Die Höhe der Halle beträgt 6 m. Als „Himmel" wird, wie in der Abbildung modellhaft dargestellt ist, eine dreieckige Plane aufgespannt. Gegeben sind die Punkte $E(0\,|\,0\,|\,6)$, $K(2\,|\,10\,|\,6)$ und $L(10\,|\,0\,|\,4)$, $1\ LE = 1$ m.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte H und G an.
Untersuchen Sie, ob die Plane die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.

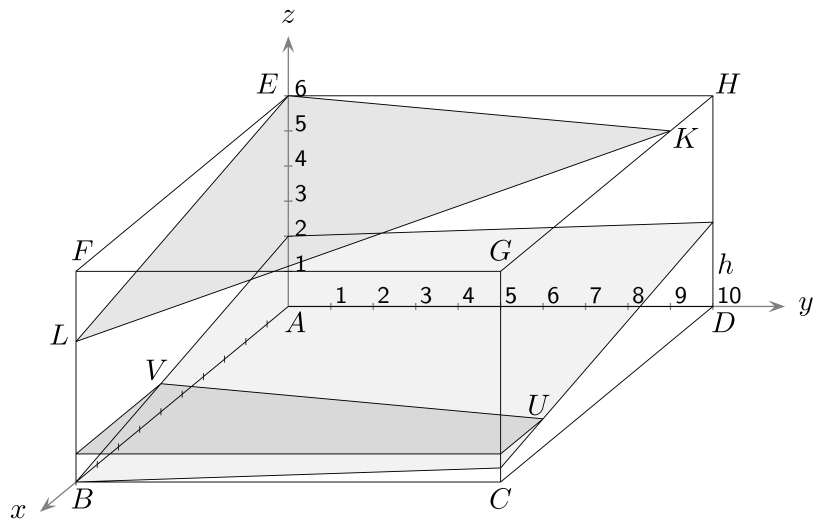
b) Die Plane liegt in einer Ebene E_P.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_P in Koordinatenform.

c) In die Lagerhalle wird ein Boden für den Zuschauerraum eingebaut. Der Boden soll in der Ebene E_B liegen, die parallel zur Plane und durch den Punkt B verläuft. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_B in Koordinatenform.
Ermitteln Sie, wie groß die maximale Höhe des Bodens über der Grundfläche ist.

d) Begründen Sie, dass der Abstand der Plane vom Boden des Zuschauerraums kleiner als 4 m ist.

e) Für die Schauspieler wird schließlich eine Bühne eingebaut. Der Boden der Bühne verläuft parallel zur Grundfläche der Halle in einer Höhe von 0,8 m so weit, bis sie auf den Boden des Zuschauerraums trifft. Berechnen Sie die Größe der trapezförmigen Bühnenfläche.

↑ Theater



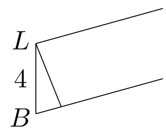
Eine ehemalige Lagerhalle soll für ein Theater umgebaut werden. Die Lagerhalle hat eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 10 m. Die Grundfläche liegt in der xy-Ebene. Die Höhe der Halle beträgt 6 m. Als „Himmel“ wird, wie in der Abbildung modellhaft dargestellt ist, eine dreieckige Plane aufgespannt. Gegeben sind die Punkte $E(0\,|\,0\,|\,6)$, $K(2\,|\,10\,|\,6)$ und $L(10\,|\,0\,|\,4)$, 1 $LE = 1$ m.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte H und G an. $H(0\,|\,10\,|\,6),\ G(10\,|\,10\,|\,6)$
Untersuchen Sie, ob die Plane die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat. $|\overrightarrow{EL}| = |\overrightarrow{EK}| = \sqrt{104}$

b) Die Plane liegt in einer Ebene E_P. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_P in Koordinatenform. [*Kontrollergebnis:* $E_P\colon\quad 5x - y + 25z = 150$]

c) In die Lagerhalle wird ein Boden für den Zuschauerraum eingebaut. Der Boden soll in der Ebene E_B liegen, die parallel zur Plane und durch den Punkt B verläuft. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_B in Koordinatenform. $E_B\colon\quad 5x - y + 25z = 50$
Ermitteln Sie, wie groß die maximale Höhe des Bodens über der Grundfläche ist. $h = 60/25 = 2{,}4$ [m]

d) Begründen Sie, dass der Abstand der Plane vom Boden des Zuschauerraums kleiner als 4 m ist.

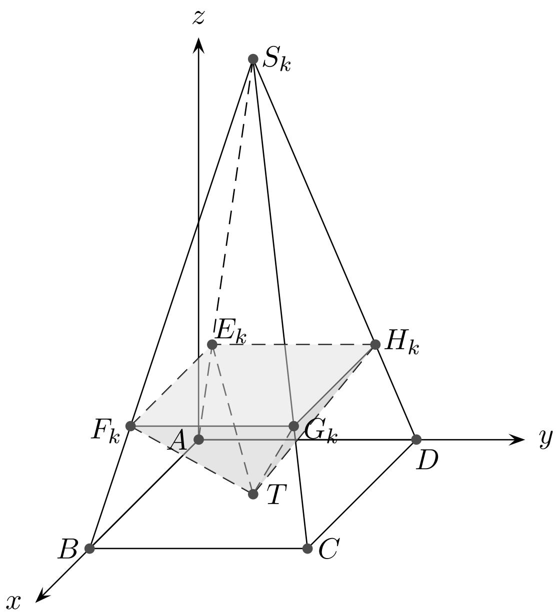


e) Für die Schauspieler wird schließlich eine Bühne eingebaut. Der Boden der Bühne verläuft parallel zur Grundfläche der Halle in einer Höhe von 0,8 m so weit, bis sie auf den Boden des Zuschauerraums trifft. Berechnen Sie die Größe der trapezförmigen Bühnenfläche.

$U(x\,|\,10\,|\,0{,}8)$ und $V(x\,|\,0\,|\,0{,}8)$ in E_B einsetzen

$U(8\,|\,10\,|\,0{,}8),\ V(6\,|\,0\,|\,0{,}8),\quad A_T = \frac{2+4}{2}\cdot 10 = 30\ [\mathrm{m}^2]$

↑ LK Sachsen 2021



In einem kartesischen Koordinatensystem werden die Pyramiden $ABCDS_k$ mit $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(2\,|\,0\,|\,0)$, $C(2\,|\,2\,|\,0)$, $D(0\,|\,2\,|\,0)$ und $S_k(1\,|\,1\,|\,k)$ mit $k \in \mathbb{R},\ \ k > 1$ betrachtet. Die gemeinsame Grundfläche $ABCD$ dieser Pyramiden ist quadratisch. Die Abbildung zeigt beispielhaft eine dieser Pyramiden.

a) Berechnen Sie für $k = 4$ den Inhalt der Mantelfläche der geraden Pyramide $ABCDS_4$.
Geben Sie für eine Symmetrieebene der Pyramide $ABCDS_4$ eine Gleichung in parameterfreier Form an. Begründen Sie, dass die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ keine Symmetrieebene der Pyramide $ABCDS_4$ beschreibt.

b) Begründen Sie, dass jede der Pyramiden $ABCDS_k$ gerade ist.

c) Die Seitenfläche ABS_k liegt in einer Ebene.
Zeigen Sie, dass diese Ebene durch die Gleichung $ky - z = 0$ beschrieben werden kann.
Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Seitenfläche ABS_k gegenüber der Grundfläche $ABCD$ um einen Winkel der Größe $60°$ geneigt ist.

Der abgebildete Punkt T ist der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche $ABCD$.

d) Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{TS_k}$ wird mit Q_k bezeichnet. Für einen Wert von k ist Q_k von der Grundfläche $ABCD$ dreimal so weit entfernt wie von jeder der vier Seitenflächen der Pyramide $ABCDS_k$. Ermitteln Sie diesen Wert von k.

e) Die Ebene mit der Gleichung $z = 1$ schneidet die vier vom Punkt S_k ausgehenden Kanten der Pyramide $ABCDS_k$ in den Punkten E_k, F_k, G_k und H_k (siehe Abbildung). Berechnen Sie die x- und y-Koordinate von F_k. Bestimmen Sie diejenigen Werte von k, für die das Verhältnis des Volumens der Pyramide $E_kF_kG_kH_kT$ zum Volumen der Pyramide $ABCDS_k$ 1:8 beträgt.

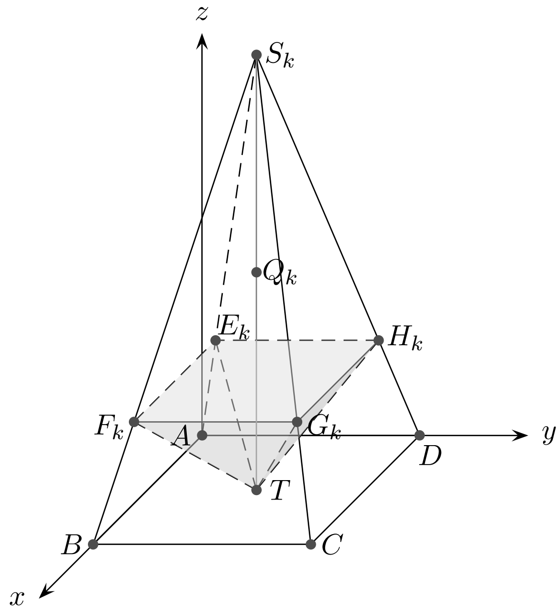
Eine Werbefirma produziert Schlüsselanhänger in Form von Pyramiden, wobei 75 % dieser Pyramiden ein Firmenlogo besitzen. Die Anzahl der Pyramiden mit Firmenlogo unter den der Produktion zufällig entnommenen Pyramiden wird als binomialverteilt angenommen.

f) Der Produktion werden 200 Pyramiden zufällig entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 50 % und weniger als 70 % dieser Pyramiden ein Firmenlogo besitzen.

g) Ermitteln Sie, wie viele Pyramiden der Produktion mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens 10 dieser Pyramiden ein Firmenlogo besitzen.

h) 70 % aller produzierten Pyramiden bestehen aus durchsichtigem Material. Der Anteil derjenigen Pyramiden, die aus durchsichtigem Material bestehen und grün sind, beträgt 14 %. Von allen produzierten Pyramiden sind 26 % grün. Der Produktion der Werbefirma wird eine Pyramide zufällig entnommen. Stellen Sie den Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. Untersuchen Sie die Ereignisse „Die Pyramide besteht aus durchsichtigem Material.“ und „Die Pyramide ist grün.“ auf stochastische Abhängigkeit. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine entnommene Pyramide aus durchsichtigem Material besteht, unter der Bedingung, dass sie nicht grün ist.

↑ LK Sachsen 2021



In einem kartesischen Koordinatensystem werden die Pyramiden $ABCDS_k$ mit $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(2\,|\,0\,|\,0)$, $C(2\,|\,2\,|\,0)$, $D(0\,|\,2\,|\,0)$ und $S_k(1\,|\,1\,|\,k)$ mit $k \in \mathbb{R},\ \ k > 1$ betrachtet. Die gemeinsame Grundfläche $ABCD$ dieser Pyramiden ist quadratisch. Die Abbildung zeigt beispielhaft eine dieser Pyramiden.

a) Berechnen Sie für $k = 4$ den Inhalt der Mantelfläche der geraden Pyramide $ABCDS_4$. $A = 4\sqrt{17}$ FE

Geben Sie für eine Symmetrieebene der Pyramide $ABCDS_4$ eine Gleichung in parameterfreier Form an. Begründen Sie, dass die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ keine Symmetrieebene der Pyramide $ABCDS_4$ beschreibt.

Symmetrieebenen: $y = 1,\ x = 1,\ x - y = 0,\ x + y = 2$

Die z-Koordinate des Normalenvektors $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ungleich null.

b) Begründen Sie, dass jede der Pyramiden $ABCDS_k$ gerade ist. $\overrightarrow{TS_k} \perp$ Grundfläche $ABCD$.

c) Die Seitenfläche ABS_k liegt in einer Ebene.

Zeigen Sie, dass diese Ebene durch die Gleichung $ky - z = 0$ beschrieben werden kann.

A, B und S_k liegen in der Ebene.

Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Seitenfläche ABS_k gegenüber der Grundfläche $ABCD$ um einen Winkel der Größe $60°$ geneigt ist.

Bed. Die Normalenvektoren $n_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$ und $n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ schließen einen Winkel von $60°$ ein.

$\cos 60° = |n_1||n_2|,\ \cos 60° = \frac{-1}{\sqrt{k^2+1}},$ alternativ $\tan 60° = k,\ k = \sqrt{3}$

Der abgebildete Punkt T ist der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche $ABCD$.

d) Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{TS_k}$ wird mit Q_k bezeichnet. Für einen Wert von k ist Q_k von der Grundfläche $ABCD$ dreimal so weit entfernt wie von jeder der vier Seitenflächen der Pyramide $ABCDS_k$. Ermitteln Sie diesen Wert von k.

$$Q_k\left(1 \mid 1 \mid \frac{k}{2}\right), \quad d(Q_k, E_{ABCD}) = \frac{k}{2}, \quad d(Q_k, E_{ABS_k}) = \frac{k - k/2}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$3 \cdot \frac{k/2}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{k}{2}, \quad k = \sqrt{8} \quad (k > 0)$$

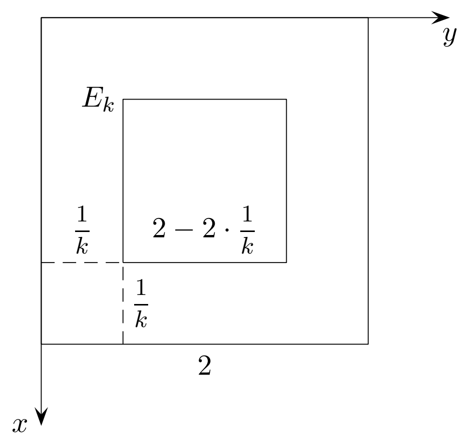
e) Die Ebene mit der Gleichung $z = 1$ schneidet die vier vom Punkt S_k ausgehenden Kanten der Pyramide $ABCDS_k$ in den Punkten E_k, F_k, G_k und H_k (siehe Abbildung). Berechnen Sie die x- und y-Koordinate von F_k.

$$\text{Gerade } BS_k \;\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

$$rk = 1, \quad r = \frac{1}{k}, \quad F_k\left(2 - \frac{1}{k} \mid \frac{1}{k} \mid 1\right)$$

Bestimmen Sie diejenigen Werte von k, für die das Verhältnis des Volumens der Pyramide $E_kF_kG_kH_kT$ zum Volumen der Pyramide $ABCDS_k$ 1:8 beträgt.

$$\begin{aligned} V_{gr} &= \frac{1}{3} 2 \cdot 2 \cdot k && \text{große Pyramide} \\ V_{kl} &= \frac{1}{3}(2 - \frac{2}{k})^2 \cdot 1 && \text{kleine Pyramide} \\ 8 \cdot V_{kl} &= V_{gr} \\ \frac{8}{3}(2 - \frac{2}{k})^2 &= \frac{4}{3}k \\ (k_1 &= 0{,}764) && k > 1 \\ k_2 &= 2 \\ k_3 &= 5{,}236 \end{aligned}$$



Eine Werbefirma produziert Schlüsselanhänger in Form von Pyramiden, wobei 75 % dieser Pyramiden ein Firmenlogo besitzen. Die Anzahl der Pyramiden mit Firmenlogo unter den der Produktion zufällig entnommenen Pyramiden wird als binomialverteilt angenommen.

f) Der Produktion werden 200 Pyramiden zufällig entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 50 % und weniger als 70 % dieser Pyramiden ein Firmenlogo besitzen.

$$P(100 < X < 140) = P(101 \leq X \leq 139) \approx 0{,}045$$

g) Ermitteln Sie, wie viele Pyramiden der Produktion mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens 10 dieser Pyramiden ein Firmenlogo besitzen.

$$P(X \geq 10) \geq 0{,}95, \;\; n \geq 17$$

h) 70 % aller produzierten Pyramiden bestehen aus durchsichtigem Material. Der Anteil derjenigen Pyramiden, die aus durchsichtigem Material bestehen und grün sind, beträgt 14 %. Von allen produzierten Pyramiden sind 26 % grün. Der Produktion der Werbefirma wird eine Pyramide zufällig entnommen. Stellen Sie den Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. Untersuchen Sie die Ereignisse „Die Pyramide besteht aus durchsichtigem Material.“ und „Die Pyramide ist grün.“ auf stochastische Abhängigkeit. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine entnommene Pyramide aus durchsichtigem Material besteht, unter der Bedingung, dass sie nicht grün ist.

	g	$\overline{g}$	*Summe*
d	0,14	0,56	0,7
$\overline{d}$	0,12	0,18	0,3
Summe	0,26	0,74	1

d: Material durchsichtig
g: Pyramiden ist grün

$$\begin{aligned} P(d) \cdot P(g) &\stackrel{?}{=} P(d \cap g) \\ 0{,}7 \cdot 0{,}26 &\stackrel{?}{=} 0{,}14 \\ 0{,}182 &\neq 0{,}14 \end{aligned}$$

d und g sind abhängig.

$$P(d|\overline{g}) = \frac{P(d \cap \overline{g})}{P(\overline{g})} = \frac{0{,}56}{0{,}74} = 0{,}76$$