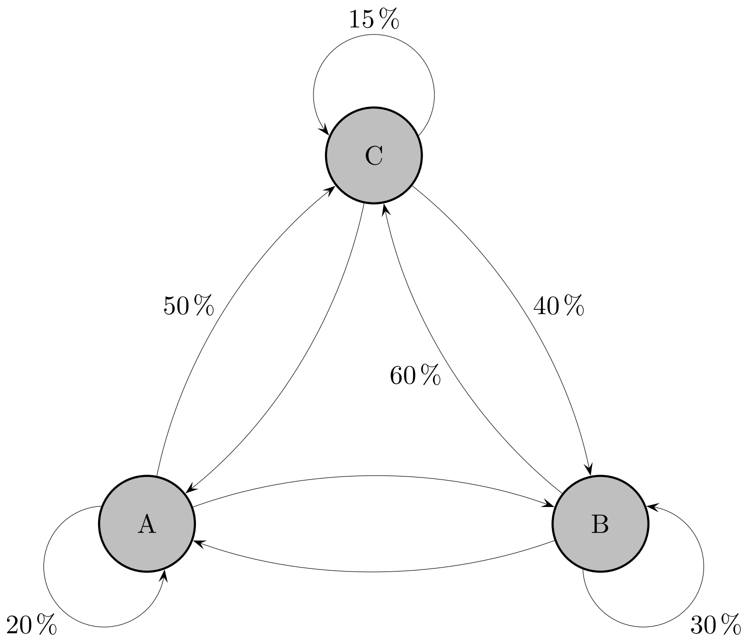


1. a) Ergänzen Sie das Diagramm eines Austauschprozesses und ermitteln Sie die Übergangsmatrix.

   b) Bestimmen Sie die Grenzverteilung.

   c) Der Startvektor sei $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gegen welchen Grenzzustandsvektor $\overrightarrow{v_\infty}$ konvergiert die Folge $\overrightarrow{v_0}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, ... ? Wie lautet $\overrightarrow{v_3}$?

   d) Existiert $\overrightarrow{v_{-1}}$?

   e) Ermitteln Sie den Grenzzustandsvektor für einen Startvektor mit der Spaltensumme 2000.

   f) Erläutern Sie den Begriff Gleichgewichtsverteilung.

↑ Ergebnisse

a) Ergänzen Sie das Diagramm eines Austauschprozesses und ermitteln Sie die Übergangsmatrix.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}45 \\ 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}40 \\ 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Grenzverteilung.

$$\overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} 0{,}265 \\ 0{,}340 \\ 0{,}396 \end{pmatrix}$$

c) Der Startvektor sei $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gegen welchen Grenzzustandsvektor $\overrightarrow{v_\infty}$ konvergiert die Folge $\overrightarrow{v_0}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, ... ? Wie lautet $\overrightarrow{v_3}$?

$$\overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} 185{,}45 \\ 237{,}69 \\ 276{,}87 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 172{,}75 \\ 233{,}10 \\ 294{,}15 \end{pmatrix}$$

d) Existiert $\overrightarrow{v_{-1}}$?

$$\overrightarrow{v_{-1}} = \begin{pmatrix} -8850 \\ 6650 \\ 2900 \end{pmatrix}$$

Negative Komponenten wurden hier nicht ausgeschlossen.
In einem Anwendungsbezug, z. B. Entwicklung von Populationen, könnte dies jedoch sein.

e) Ermitteln Sie den Grenzzustandsvektor für einen Startvektor mit der Spaltensumme 2000.

$$\overrightarrow{u_\infty} = \begin{pmatrix} 529{,}85 \\ 679{,}10 \\ 791{,}04 \end{pmatrix}$$

f) Erläutern Sie den Begriff Gleichgewichtsverteilung.

Für eine Gleichgewichtsverteilung $\vec{g}$ gilt: $\mathcal{A} \cdot \vec{g} = \vec{g}$. Durch den Übergang verändert sich die Verteilung also nicht. Dann folgt $\mathcal{A}^n \cdot \vec{g} = \vec{g}$, $\vec{g}$ ist daher auch die Grenzverteilung.
Für stochastische Matrizen strebt jede Anfangsverteilung (mit gleicher Spaltensumme) gegen $\vec{g}$.

2. In einer Kleinstadt mit ca. 20 000 Haushalten gibt es drei große Supermärkte A, B und C, in denen sich die Haushalte mit Lebensmitteln versorgen. Das monatliche Wechselverhalten der Haushalte wird in der folgenden Tabelle verdeutlicht:

Haushalt wechselt von

	A	B	C
zu A	70 %	10 %	10 %
zu B	20 %	80 %	30 %
zu C	10 %	10 %	60 %

a) Zeichnen Sie einen Übergangsgraphen zu diesem Wechselverhalten.

b) Gegeben sei eine Anfangsverteilung von 3 500 Haushalten, die bei A einkaufen, 11 200 Haushalten, die bei B und 5 300 Haushalten, die bei C einkaufen.
Berechnen Sie die Verteilungen des Vormonats, sofern möglich, sowie der nächsten beiden Monate.

c) Ermitteln Sie, welches Wechselverhalten die Kundschaft des Supermarktes B hätte, wenn langfristig 30 % bei A, 50 % bei B und 20 % bei C einkauften, sofern das Wechselverhalten der Kundschaft von A und C unverändert bliebe.

d) Zurückgehende Investitionen in Werbung und nachlassende Kundenfreundlichkeit im Supermarkt B führen zum Verlust eines Viertels seiner Stammkundschaft. Zudem wechselt von der wechselwilligen Kundschaft der Supermärkte A und C keiner mehr zum Supermarkt B, sondern wechselt zu dem anderen Supermarkt.
Geben Sie eine Übergangsmatrix an, die das neue Kundenverhalten in obiger Kleinstadt wiedergibt, und begründen Sie ohne Rechnung, welche Auswirkungen ein solches Kundenverhalten langfristig für den Supermarkt B hat.

e) Von der prozentualen Verteilung der Kunden für den Monat November ist nur die 3. Komponente bekannt, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$. Hierbei liegt das Wechselverhalten von a) zu Grunde.

Bestimmen Sie einen Bereich, in dem der Prozentsatz für die Kunden von A im nächsten Monat liegen kann.

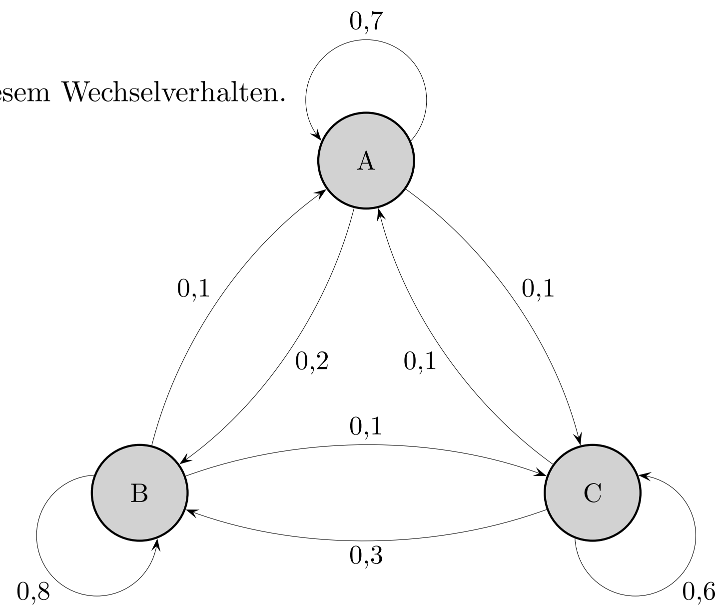
↑ Ergebnisse

In einer Kleinstadt mit ca. 20 000 Haushalten gibt es drei große Supermärkte A, B und C, in denen sich die Haushalte mit Lebensmitteln versorgen. Das monatliche Wechselverhalten der Haushalte wird in der folgenden Tabelle verdeutlicht:

Haushalt wechselt von

	A	B	C
zu A	70 %	10 %	10 %
zu B	20 %	80 %	30 %
zu C	10 %	10 %	60 %

a) Zeichnen Sie einen Übergangsgraphen zu diesem Wechselverhalten.



b) Gegeben sei eine Anfangsverteilung von 3 500 Haushalten, die bei A einkaufen, 11 200 Haushalten, die bei B und 5 300 Haushalten, die bei C einkaufen.
Berechnen Sie die Verteilungen des Vormonats, sofern möglich, sowie der nächsten beiden Monate.

$$\overrightarrow{v_{-1}} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 10900 \\ 6600 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 4100 \\ 11250 \\ 4650 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 4460 \\ 11215 \\ 4325 \end{pmatrix}$$

c) Ermitteln Sie, welches Wechselverhalten die Kundschaft des Supermarktes B hätte, wenn langfristig 30 % bei A, 50 % bei B und 20 % bei C einkauften, sofern das Wechselverhalten der Kundschaft von A und C unverändert bliebe.

$$\mathcal{M}^* = \begin{pmatrix} 0{,}7 & x & 0{,}1 \\ 0{,}2 & y & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 1-x-y & 0{,}6 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}^* \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}5 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}5 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}14 \\ 0{,}76 \\ 0{,}10 \end{pmatrix}$$

d) Zurückgehende Investitionen in Werbung und nachlassende Kundenfreundlichkeit im Supermarkt B führen zum Verlust eines Viertels seiner Stammkundschaft. Zudem wechselt von der wechselwilligen Kundschaft der Supermärkte A und C keiner mehr zum Supermarkt B, sondern wechselt zu dem anderen Supermarkt.
Geben Sie eine Übergangsmatrix an, die das neue Kundenverhalten in obiger Kleinstadt wiedergibt, und begründen Sie ohne Rechnung, welche Auswirkungen ein solches Kundenverhalten langfristig für den Supermarkt B hat.

$$\mathcal{M}^{**} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Supermarkt B verliert langfristig alle Kunden.

e) Von der prozentualen Verteilung der Kunden für den Monat November ist nur die 3. Komponente bekannt, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$. Hierbei liegt das Wechselverhalten von a) zu Grunde.

Bestimmen Sie einen Bereich, in dem der Prozentsatz für die Kunden von A im nächsten Monat liegen kann.

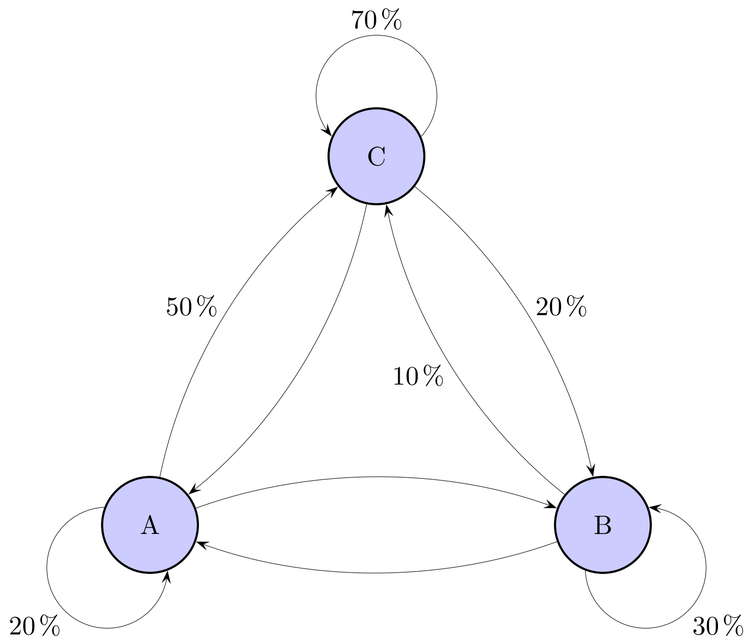
$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0{,}9 - a \\ 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq a \leq 0{,}9$$

$\mathcal{M}$ erfasst das Wechselverhalten von a).

Von $\mathcal{M} \cdot \overrightarrow{v}$ ist die 1. Komponente zu betrachten: $0{,}7a + (0{,}9 - a)0{,}1 + 0{,}1^2$

$a = 0$ und $a = 0{,}9$ eingesetzt ergeben den Bereich: $[10\,\%,\ 64\,\%]$

↑ Matrizenrechnung Austauschprozess



a) Ermitteln Sie den Grenzzustandsvektor $\overrightarrow{v_\infty}$ für einen Startvektor mit der Spaltensumme 2000.

b) Wieviel “fließt“ in der Gleichgewichtsverteilung in A in einem Takt ab bzw. zu?

$$\overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$-400 + 100 + 300 = 0$

↑ Aufgabe Übergangsmatrix

a)

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Ermittle die Grenzverteilung (Spaltensumme 1) mit einer einzigen Gleichung (kein Gleichungssystem lösen), ohne GTR.

b)

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 1 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Wie wird hier die Grenzverteilung (Spaltensumme 1) sein?
(Eine Rechnung ist nicht erforderlich.)

↑ Lösungshinweise

a)

$$\mathcal{A} \ = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Ermittle die Grenzverteilung (Spaltensumme 1) mit einer einzigen Gleichung
(kein Gleichungssystem lösen), ohne GTR.

Ansatz (warum?)

$$\overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1-2a \end{pmatrix}$$

$$0{,}25 \cdot a + 0{,}25 \cdot (1-2a) = a \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0{,}2$$

b)

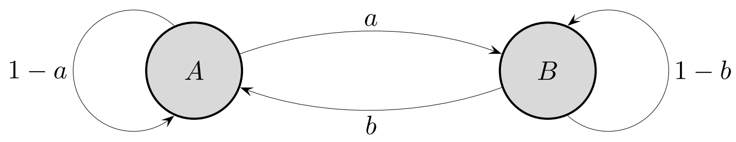
$$\mathcal{B} \ = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 1 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Wie wird hier die Grenzverteilung (Spaltensumme 1) sein?
(Eine Rechnung ist nicht erforderlich.)

Der mittlere Zustand ist absorbierend.

$$\overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑ Aufgabe Stochastische Matrix



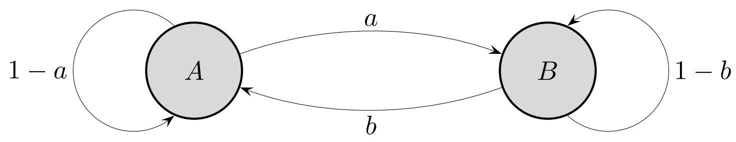
Die Übergangsmatrix lautet:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$$

Interpretiere die Elemente der Matrix:

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} (1-a)^2 + ab & (1-a)b + (1-b)b \\ a(1-a) + a(1-b) & ba + (1-b)^2 \end{pmatrix}$$

↑ Aufgabe Stochastische Matrix



Die Übergangsmatrix lautet:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$$

Interpretiere die Elemente der Matrix:

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} (1-a)^2 + ab & b(1-a) + (1-b)b \\ a(1-a) + a(1-b) & ba + (1-b)^2 \end{pmatrix}$$

$(1-a)^2 + ab$ gibt den Anteil von A an, der nach 2 Takten wieder nach A gelangt.
Von A nach A in 2 Takten zu gelangen, ist auf 2 Arten möglich:

$A \xrightarrow{1-a} A \xrightarrow{1-a} A$

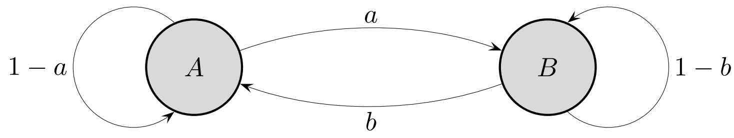
$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} A$

$b(1-a) + (1-b)b$ gibt den Anteil von B an, der nach 2 Takten nach A gelangt.
Von B nach A in 2 Takten zu gelangen, ist auf 2 Arten möglich:

$B \xrightarrow{b} A \xrightarrow{1-a} A$

$B \xrightarrow{1-b} B \xrightarrow{b} A$

↑ Aufgabe Stochastische Matrix



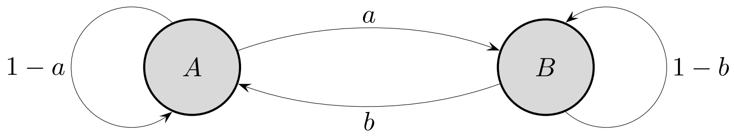
Die Übergangsmatrix lautet:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$$

Ermittle die fehlenden Elemente, ohne $\mathcal{M}^3$ auszurechnen:

$$\mathcal{M}^3 = \begin{pmatrix} (1-a)^3 + 2(1-a)ab + ab(1-b) \\ a(1-a)^2 + (1-a)(1-b)a + a^2b + a(1-b)^2 \end{pmatrix}$$

↑ Aufgabe Stochastische Matrix



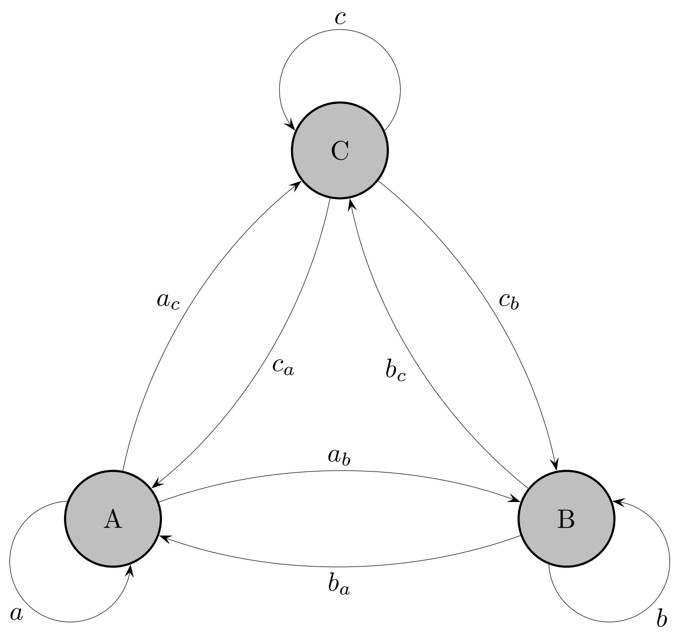
Die Übergangsmatrix lautet:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$$

Ermittle die fehlenden Elemente, ohne $\mathcal{M}^3$ auszurechnen:

$$\mathcal{M}^3 = \begin{pmatrix} (1-a)^3 + 2(1-a)ab + ab(1-b) & (1-a)^2b + (1-a)(1-b)b + b^2a + b(1-b)^2 \\ a(1-a)^2 + (1-a)(1-b)a + a^2b + a(1-b)^2 & ab(1-a) + 2(1-b)ab + (1-b)^3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Aufgabe Stochastische Matrix



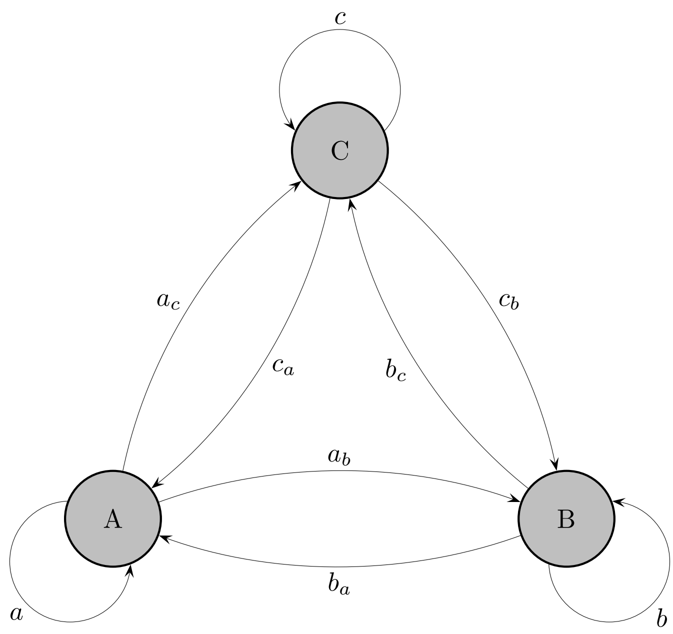
Die Übergangsmatrix lautet:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b_a & c_a \\ a_b & b & c_b \\ a_c & b_c & c \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}^3 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

Ermittle m_{11}, ohne $\mathcal{M}^3$ auszurechnen.

↑ Aufgabe Stochastische Matrix



Die Übergangsmatrix lautet:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b_a & c_a \\ a_b & b & c_b \\ a_c & b_c & c \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}^3 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

Ermittle m_{11}, ohne $\mathcal{M}^3$ auszurechnen.

$$m_{11} = a(a^2 + a_b \cdot b_a + a_c \cdot c_a) + a_b(a \cdot b_a + b_a \cdot b + c_a \cdot b_c) + a_c(a \cdot c_a + b_a \cdot c_b + c \cdot c_a)$$

↑ Wanderbewegungen

In einem Reservat, aufgeteilt in 3 Regionen, wurden die jährlichen Wanderbewegungen von Zebras beobachtet. Die Tabelle enthält die Ergebnisse.

Tiere wechseln von

	A	B	C
nach A	0,20	0,10	0,30
nach B	0,60	0,70	0,20
nach C	0,20	0,20	0,50

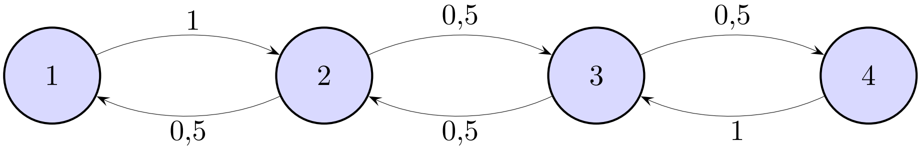
a) Gegeben sei eine Anfangsverteilung von 2100 Zebras in Region A, 1300 in B und 500 in C. Das Wanderverhalten wird für die Zukunft als stabil angenommen.

Ermitteln Sie die Anzahlen der Zebras in den einzelnen Regionen für die nächsten 3 Jahre und langfristig.
Es wird versucht, die Verteilung im Monat vor der Zählung zu ermitteln.
Zu welcher Schlussfolgerung führt das?

b) Durch Veränderung der Lebensbedingungen verenden jährlich in der Region A 20 % des jeweiligen Bestandes, in der Region C kommen von außen jährlich 15 % des jeweiligen Bestandes hinzu. Dies trifft auch schon für die Anfangsverteilung vor Beginn der Wanderung zu.
Das Wanderungsverhalten der Tiere ändert sich im Übrigen nicht.
Geben Sie die Matrix $\mathcal{V}$ an, die nur diese Veränderung erfasst, sowie die Matrix $\mathcal{N}$ für die Beschreibung des gesamten Wanderverhaltens. Wie kann $\mathcal{N}$ mit $\mathcal{V}$ erhalten werden?

Die letzte Fragestellung ist unabhängig von der Modellierung.
Untersuchen Sie - zunächst ohne Rechnung - die Möglichkeiten, dass $\mathcal{N}^\infty$ nicht existiert, der Prozess konvergiert oder expandiert.
Diskutieren Sie die Situation, falls man von 10 % statt 15 % jährlichen Zuwachses ausginge.

↑ Maus-Aufgabe



In einem Versuchslabyrinth wird einer Maus an 4 Orten Futter angeboten.
Das Übergangsdiagramm beinhaltet die Wahrscheinlichkeiten für die Ortswechsel.

a) Untersuchen Sie mit dem Ansatz $\mathcal{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$, ob eine stationäre Verteilung existiert.

Zur Kontrolle: $\vec{x} = (0{,}1 \mid 0{,}2 \mid 0{,}2 \mid 0{,}1)^{\mathrm{T}}$

Um Verteilungen sinnvoll interpretieren zu können, gehen wir davon aus, dass sich die Maus (annähernd) gleichlange an den jeweiligen Orten aufhält bevor sie sich neues Futter sucht.

b) Begründen Sie, dass jede Potenz der zugehörigen Übergangsmatrix $\mathcal{M}$ Null-Elemente enthält.

c) Untersuchen Sie für die verschiedenen Anfangsverteilungen:

$\vec{x_1} = (1 \mid 0 \mid 0 \mid 0)^{\mathrm{T}}$ Diese Schreibweise als transponierter Vektor ist platzsparend.

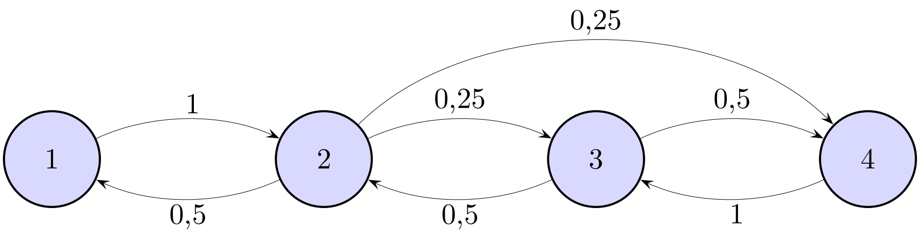
$\vec{x_2} = (0 \mid 1 \mid 0 \mid 0)^{\mathrm{T}}$

$\vec{x_3} = (0{,}1 \mid 0{,}4 \mid 0{,}4 \mid 0{,}1)^{\mathrm{T}}$

$\vec{x_4} = (0{,}15 \mid 0{,}20 \mid 0{,}35 \mid 0{,}30)^{\mathrm{T}}$

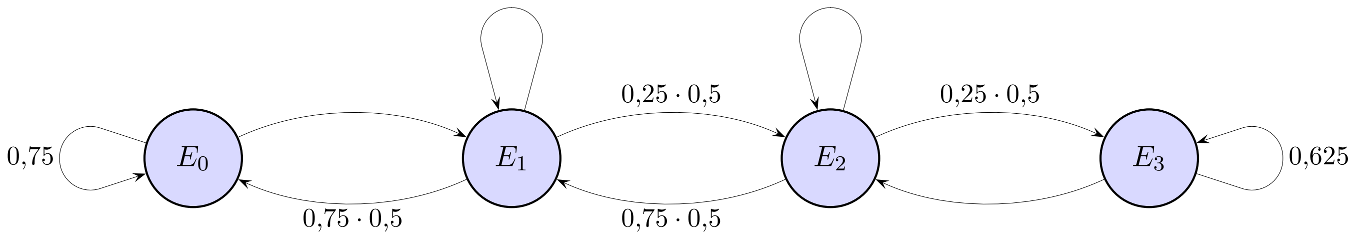
ob langfristige Prognosen für die einzelnen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten möglich sind.

d) Dem Labyrinth wird der direkte Weg von 2 nach 4 hinzugefügt.



Zeigen Sie, dass die Maus durch 5maliges Wechseln von jeder Ausgangsposition zu jedem Ort gelangen kann. Welche Konsequenzen ergeben sich für die 5. Potenz der zugehörigen Übergangsmatrix und für eine Fragestellung wie in c)?

↑ Warteschlange



An einer Tankstelle treffen Kunden ein - pro Zeiteinheit höchstens einer. Falls der Tankwart gerade einen Kunden bedient, müssen die anderen sich in eine Warteschlange einordnen. Ihre Bedienung erfolgt frühestens in der Periode nach ihrer Ankunft. An der Tankstelle ist zur Zeit Platz für 3 Autos. Sind sie besetzt, so müssen potentielle Kunden weiterfahren. Der Inhaber der Tankstelle möchte nun wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass sich genau drei Autos an der Tankstelle befinden, um so entscheiden zu können, ob noch Platz für weitere Autos geschaffen werden muss.
Empirische Untersuchungen ergaben folgende Werte:
In jedem Zeitintervall beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Ankunft eines Kunden $p_1 = 0{,}25$. Mit der Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0{,}5$ endet die Bedienung des Kunden im Zeitintervall - unabhängig von der Anzahl der bisher benötigten Zeiteinheiten. Im Zustand E_i befinden sich i Kunden an der Tankstelle. Die Übergangswahrscheinlichkeiten können dem folgenden Diagramm entnommen werden.

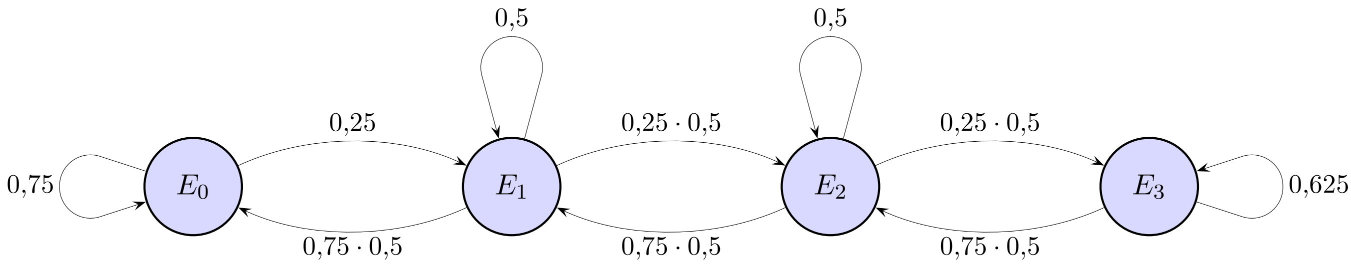
Die Wahrscheinlichkeit 0,625, dass die Warteschlange im Zustand E_3 bleibt, setzt sich zusammen aus:
$0{,}5$ (Bedienung endet) $\cdot\, 0{,}25$ (neuer Kunde) $+\, 0{,}5$ (Bedienung endet nicht)

a) Erläutern Sie kurz, wie sich die im Diagramm angegebenen Wahrscheinlichkeiten ergeben und ergänzen Sie die Fehlenden.

b) Zu Beginn sei kein Auto an der Tankstelle, d. h. die Wahrscheinlichkeit für E_0 ist gleich eins, für die anderen Zustände gleich null. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zustände für die nächsten 5 Zeiteinheiten.

c) Untersuchen Sie, wie sich die Wahrscheinlichkeiten langfristig entwickeln werden und beantworten Sie die eingangs gestellte Frage.

↑ Warteschlange   Lösungshinweise



a) ...

b) $a = 0{,}25 \cdot 0{,}5$
$b = 0{,}75 \cdot 0{,}5$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & b & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & b & 0 \\ 0 & a & 0{,}5 & b \\ 0 & 0 & a & 0{,}625 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{v_0} = (1 \mid 0 \mid 0 \mid 0)^{\mathrm{T}}$

$\overrightarrow{v_1} = (0{,}75 \mid 0{,}25 \mid 0 \mid 0)^{\mathrm{T}}$

$\overrightarrow{v_2} = (0{,}656 \mid 0{,}313 \mid 0{,}0313 \mid 0)^{\mathrm{T}}$

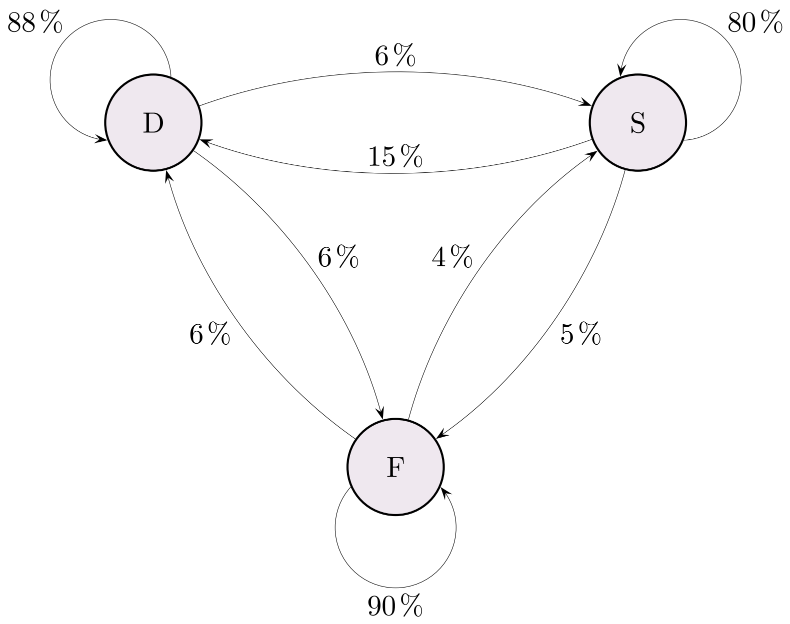
$\overrightarrow{v_3} = (0{,}609 \mid 0{,}332 \mid 0{,}055 \mid 0{,}004)^{\mathrm{T}}$

$\overrightarrow{v_4} = (0{,}582 \mid 0{,}339 \mid 0{,}070 \mid 0{,}009)^{\mathrm{T}}$

$\overrightarrow{v_5} = (0{,}563 \mid 0{,}341 \mid 0{,}081 \mid 0{,}015)^{\mathrm{T}}$

c) $\overrightarrow{v_\infty} = (0{,}509 \mid 0{,}340 \mid 0{,}113 \mid 0{,}038)^{\mathrm{T}}$

↑ Münzwanderung



Zum 1.1.2002 wurden in allen beteiligten EU-Ländern Euro-Münzen in Umlauf gebracht. In jedem Land wurden ausschließlich Münzen eigener Prägung eingesetzt. Für die dann einsetzende „Münzenwanderung pro Jahr" zwischen den Gebieten Deutschland (D), Frankreich (F) und Sonstige Länder (S) sollten sich die jährlichen Wanderungsanteile gemäß dem obenstehenden Übergangsgraphen verhalten.

a) Erstellen Sie für diesen Vorgang eine Übergangsmatrix und beschreiben Sie die Übergänge in Worten.

b) Ermitteln Sie unter den genannten Hypothesen die prozentuale Verteilung der deutschen Münzen auf die drei Gebiete (D,F,S) zum 1.1.2003, zum 1.1.2004 und zum 1.1.2006, und geben Sie die Übergangsmatrix für 2 Jahre an.
Ihre Startverteilung beschreibt der Vektor $\vec{D}_{02} = (100 \mid 0 \mid 0)^T$.
Zum 1.1.02 befinden sich also 100 % der deutschen Münzen in Deutschland.

c) Untersuchen Sie, ob es eine stationäre Verteilung der Münzen auf die drei Gebiete gibt, und geben Sie diese ggfs. an.

d) Zum 1.1.2002 wurden in Deutschland 800 Mio, in Frankreich 600 Mio und in den sonstigen Ländern 150 Mio Münzen ausgegeben. Ermitteln Sie die Gesamtanzahl aller Münzen jeweils in den drei Gebieten zum 1.1.2003, und erklären Sie, inwieweit man bei dieser Problemstellung die Matrixmultiplikation einsetzen kann.

e) Bestimmen Sie den Anteil deutscher Euromünzen, die am 1.1.2004

  I Deutschland nie verlassen haben,

  II in Deutschland sind und zuvor im Ausland waren.

a) $$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}88 & 0{,}06 & 0{,}15 \\ 0{,}06 & 0{,}90 & 0{,}05 \\ 0{,}06 & 0{,}04 & 0{,}80 \end{pmatrix}$$

b) $$\vec{D}_{03} = \begin{pmatrix} 88 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_{04} = \begin{pmatrix} 78{,}7 \\ 10{,}98 \\ 10{,}32 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}787 & 0{,}113 & 0{,}255 \\ 0{,}110 & 0{,}816 & 0{,}094 \\ 0{,}103 & 0{,}072 & 0{,}651 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_{06} = \begin{pmatrix} 65{,}8 \\ 18{,}6 \\ 15{,}6 \end{pmatrix}$$

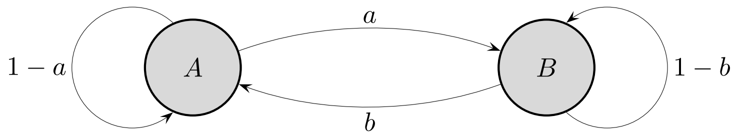
c) stationäre Verteilung $\vec{D} = \begin{pmatrix} 43{,}5 \\ 36{,}2 \\ 20{,}3 \end{pmatrix}$

d) $$\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 762{,}5 \\ 595{,}5 \\ 192 \end{pmatrix}$$

e) I $0{,}88 \cdot 0{,}88 = 0{,}774$

II $0{,}06 \cdot 0{,}15 + 0{,}06 \cdot 0{,}06 = 0{,}0126$

↑ Taxifahrt



Ein Taxifahrer beginnt seine Tour am Morgen im Ort A.
Er wechselt die Orte mit den Wahrscheinlichkeiten $a = \frac{1}{3}$ und $b = \frac{1}{4}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, dass das Taxi nach n Fahrten in A ist?
Ändert sich diese Wahrscheinlichkeit beim Start in B?
Ist P auch die Aufenthaltswahrscheinlichkeit?

↑ Fixvektor

Für einen Fixvektor $\vec{x}$ einer stochastischen Matrix $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}\,\vec{x} = \vec{x}$ oder z. B.

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & = & x_1 \\
a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & = & x_2 \\
a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & a_{33}\,x_3 & = & x_3
\end{array}$$

Zeige, dass eine Gleichung, z. B. die 3., sich aus den anderen beiden Gleichungen durch Multiplikation und Addition ergibt.

↑ Fixvektor

Für einen Fixvektor $\vec{x}$ einer stochastischen Matrix $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}\,\vec{x} = \vec{x}$ oder z. B.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & = & x_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & = & x_2 \\ a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & a_{33}\,x_3 & = & x_3 \end{array}$$

Zeige, dass eine Gleichung, z. B. die 3., sich aus den anderen beiden Gleichungen durch Multiplikation und Addition ergibt.

Das Gleichungssystem kann umgeformt werden:

$$\begin{array}{rcrcrcc} (a_{11}-1)\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & = & 0 \\ a_{21}\,x_1 & + & (a_{22}-1)\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & = & 0 \\ a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & (a_{33}-1)\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aus $a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1$ folgt $a_{31} = 1 - a_{11} - a_{21} = -(a_{11} - 1) - a_{21}$

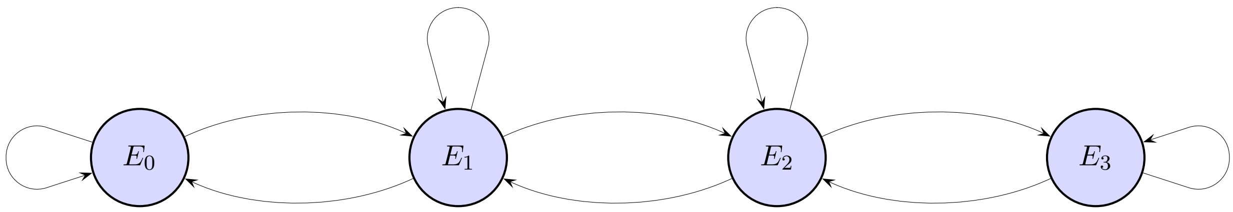
Es kann vermutet werden, dass sich die 3. Gleichung aus der Summe der mit -1 multiplizierten übrigen Gleichungen ergibt. Die Vermutung wird durch eine Betrachtung der beiden anderen Spalten bestätigt.

Aus $a_{12} + a_{22} + a_{32} = 1$ folgt $a_{32} = 1 - a_{12} - a_{22} = -a_{12} - (a_{22} - 1)$

Aus $a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1$ folgt $a_{33} - 1 = -a_{13} - a_{23}$

Das Gleichungssystem ist unterbestimmt.
Eine Gleichung (z. B. die 3.) kann weggelassen werden
oder wird durch $x_1 + x_2 + x_3 = S$ ersetzt. Hierbei ist S die Spaltensumme (der Anfangsverteilung).

↑ Wartungsbetrieb

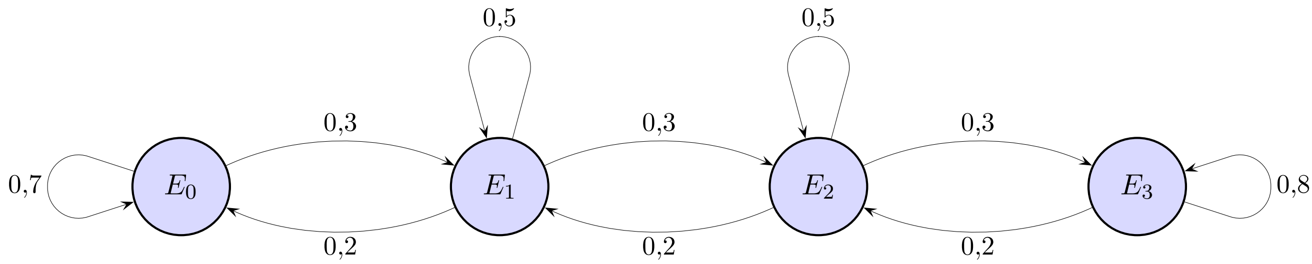


Ein Wartungsbetrieb nimmt jeden Morgen zwischen 8.00 und 9.00 Uhr Aufträge entgegen, höchstens jedoch zwei. Die Wahrscheinlichkeiten für den Eingang keines Auftrags, eines Auftrags oder zweier Aufträge betragen 0,2; 0,5 und 0,3. Die Auftragseingänge an verschiedenen Tagen erfolgen unabhängig voneinander. An jedem Tag kann nur ein Auftrag abgearbeitet werden.
Falls schon drei Aufträge vor Auftragsannahme am Morgen vorliegen, wird nur noch höchstens ein weiterer Auftrag entgegengenommen.

a) Der Graph erfasst die relevanten Übergänge. Der Index i gibt Anzahl der unbearbeiteten Aufträge an, die am Morgen vor Auftragsannahme vom Vortage übriggeblieben sind. Ermitteln Sie die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten.

b) Untersuchen Sie, ob eine stabile Verteilung existiert und falls ja, interpretieren Sie sie.

↑ Wartungsbetrieb



Ein Wartungsbetrieb nimmt jeden Morgen zwischen 8.00 und 9.00 Uhr Aufträge entgegen, höchstens jedoch zwei. Die Wahrscheinlichkeiten für den Eingang keines Auftrags, eines Auftrags oder zweier Aufträge betragen 0,2; 0,5 und 0,3. Die Auftragseingänge an verschiedenen Tagen erfolgen unabhängig voneinander. An jedem Tag kann nur ein Auftrag abgearbeitet werden.
Falls schon drei Aufträge vor Auftragsannahme am Morgen vorliegen, wird nur noch höchstens ein weiterer Auftrag entgegengenommen.

a) Der Graph erfasst die relevanten Übergänge. Der Index i gibt Anzahl der unbearbeiteten Aufträge an, die am Morgen vor Auftragsannahme vom Vortage übriggeblieben sind. Ermitteln Sie die fehlenden Übergangswahrscheinlichkeiten.

b) Untersuchen Sie, ob eine stabile Verteilung existiert und falls ja, interpretieren Sie sie.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{v_\infty} = (0{,}123 \mid 0{,}185 \mid 0{,}277 \mid 0{,}415)^{\mathrm{T}}$

↑ Matrizen

$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}$ Assoziativität

$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$ Distributivität

Beachte: Im Allgemeinen gilt $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$

Für die zu einer quadratischen Matrix $\mathcal{A}$ inverse Matrix $\mathcal{A}^{-1}$ gilt: $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{E}$
Die inverse Matrix ist eindeutig bestimmt.
Wäre $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{E}$, so ergäbe ein Multiplikation von links mit $\mathcal{A}^{-1}$ die Gleichheit $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$.

Beweise:

a) $\left(\mathcal{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathcal{A}$

b) $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1} \cdot \mathcal{A}^{-1}$

Beweise:

a) $\left(\mathcal{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathcal{A}$

b) $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1} \cdot \mathcal{A}^{-1}$

a) Es ist $\mathcal{A}^{-1} \cdot \left(\mathcal{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathcal{E}$.

Mit $\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{E}$ und der Eindeutigkeit folgt die Behauptung.

Möglich (etwas umständlicher) wäre auch die Folgerung: $\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \left(\mathcal{A}^{-1}\right)^{-1}$
Eine Multiplikation von links mit $\mathcal{A}$ zeigt die Behauptung.

b) Es ist $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})^{-1} = \mathcal{E}$,

aber auch $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot (\mathcal{B}^{-1} \cdot \mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{E}$, wie leicht mit der Assoziativität gesehen werden kann.

Mit der Eindeutigkeit folgt die Behauptung.
Bei genauerer Betrachtung muss auch noch $(\mathcal{B}^{-1} \cdot \mathcal{A}^{-1}) \cdot (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \mathcal{E}$ gezeigt werden,
was nun leicht ist.

↑ Matrizen

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a & a^2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$.

↑ Matrizen

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} a & a^2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix}$$

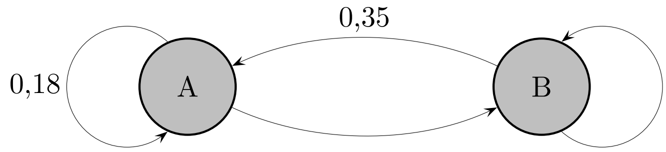
Berechne $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$.

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Beachte:

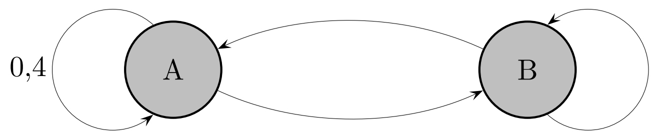
$$\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix}$$

1. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge des Übergangsgraphen und geben Sie die zugehörige stochastische Übergangsmatrix an.



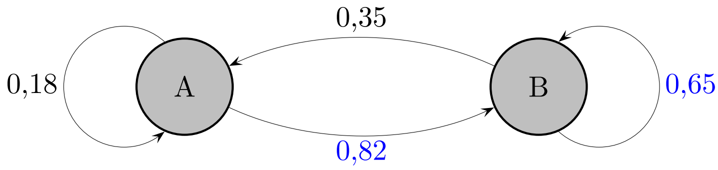
2. Gegeben ist der Grenzvektor $\overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ sowie das (unvollständige) Übergangsdiagramm.

   Geben Sie die zugehörige stochastische Übergangsmatrix an.



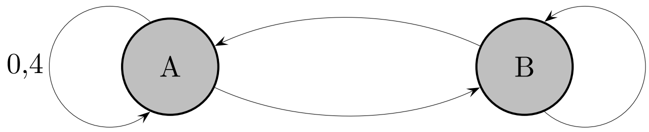
3. Zeigen Sie allgemein:
   Das Produkt zweier stochastischer 2×2-Matrizen ist wieder eine stochastische Matrix.
   Tipp: Geschicktes Ausklammern verkürzt den Rechenweg.

1. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge des Übergangsgraphen und geben Sie die zugehörige stochastische Übergangsmatrix an.



2. Gegeben ist der Grenzvektor $\overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ sowie das (unvollständige) Übergangsdiagramm.

   Geben Sie die zugehörige stochastische Übergangsmatrix an.



$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}15 \\ 0{,}6 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

3. Zeigen Sie allgemein:
   Das Produkt zweier stochastischer 2×2-Matrizen ist wieder eine stochastische Matrix.
   Tipp: Geschicktes Ausklammern verkürzt den Rechenweg.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 1-c & 1-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + b(1-c) & ad + b(1-d) \\ (1-a)c + (1-b)(1-c) & (1-a)d + (1-b)(1-d) \end{pmatrix}$$

$$c(\ldots) + (1-c)(\ldots) = \ldots = 1$$

$$d(\ldots) + (1-d)(\ldots) = \ldots = 1$$

↑ Fitness-Studio

Ein neu eröffnetes Fitness-Studio „LadyFit“ hat durch das Angebot eines kostenlosen Probemonats eine große Zahl von Kundinnen für seine Kursangebote in Steppaerobic (S), Wirbelsäulengymnastik (W), Modern Dance (M) gewinnen können. Alle Kurse finden täglich parallel statt und dürfen von einem Tag auf den anderen gewechselt werden. Die Kurswahl der Teilnehmerinnen am Ende des ersten Tages sieht so aus:

Kundin wechselt von

	S	W	M
zu S	5 %	40 %	40 %
zu W	30 %	8 %	50 %
zu M	65 %	52 %	10 %

Sie können davon ausgehen, dass jede Kundin täglich an einem der drei Kurse teilnimmt und das Wahlverhalten der Kursteilnehmerinnen für die gesamte von Ihren Berechnungen betroffene Zeit unverändert bleibt.

a) Am ersten Tag belegten 15 % der Kundinnen Steppaerobic, 80 % Wirbelsäulengymnastik, 5 % Modern Dance.

Berechnen Sie die prozentuale Aufteilung aller Kundinnen auf die Kurse am zweiten, dritten und vierten Tag und untersuchen Sie die weitere Entwicklung der Verteilung.

b) Wie sähe die prozentuale Anfangsverteilung aus, falls die Anzahlen der Kundinnen für die Kurse S, W und M sich anfänglich im Verhältnis 3 : 2 : 4 verhalten würden?

c) Der Wirbelsäulengymnastik-Kurs wird durch einen Tai-Chi-Kurs ausgewechselt.
Nach einigen Tagen stellt sich die stationäre (stabile) Verteilung

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}6 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

ein. Die neue Übergangsmatrix hat jetzt die Form

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} a & b & 0{,}3 \\ c & d & e \\ 0{,}1 & 0{,}1 & f \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Werte der Koeffizienten a bis f unter der zusätzlichen Annahme, dass der Anteil der Teilnehmerinnen, die von Tag zu Tag dem Tai-Chi-Kurs treu bleiben, 70 % beträgt.

d) Die neue Übergangsmatrix hat jetzt die Form:

$$\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Welche Bedeutung hat die 3. Zeile (dreimal 0,1) für die Entwicklung einer beliebigen Anfangsverteilung?
Was kann dann hinsichtlich der Existenz der inversen Matrix $\mathcal{M}_3^{-1}$ ausgesagt werden, <u>ohne</u> sie ausrechnen zu wollen?

e) Unter den durch die Matrix $\mathcal{M}_3$ aus d) beschriebenen Verhältnissen sei die Verteilung der Damen auf die drei Kurse an einem bestimmten Tag durch

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Prozentsätze
v_1' und v_2' des folgenden Tages liegen können.

↑ Fitness-Studio Ergebnisse

Ein neu eröffnetes Fitness-Studio „LadyFit“ hat durch das Angebot eines kostenlosen Probemonats eine große Zahl von Kundinnen für seine Kursangebote in Steppaerobic (S), Wirbelsäulengymnastik (W), Modern Dance (M) gewinnen können. Alle Kurse finden täglich parallel statt und dürfen von einem Tag auf den anderen gewechselt werden. Die Kurswahl der Teilnehmerinnen am Ende des ersten Tages sieht so aus:

Kundin wechselt von

	S	W	M
zu S	5 %	40 %	40 %
zu W	30 %	8 %	50 %
zu M	65 %	52 %	10 %

Sie können davon ausgehen, dass jede Kundin täglich an einem der drei Kurse teilnimmt und das Wahlverhalten der Kursteilnehmerinnen für die gesamte von Ihren Berechnungen betroffene Zeit unverändert bleibt.

a) Am ersten Tag belegten 15 % der Kundinnen Steppaerobic, 80 % Wirbelsäulengymnastik, 5 % Modern Dance.

Berechnen Sie die prozentuale Aufteilung aller Kundinnen auf die Kurse am zweiten, dritten und vierten Tag und untersuchen Sie die weitere Entwicklung der Verteilung.

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 34{,}8 \\ 13{,}4 \\ 51{,}9 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 27{,}8 \\ 37{,}4 \\ 34{,}7 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} 30{,}3 \\ 28{,}7 \\ 41{,}0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_\infty} = \begin{pmatrix} 29{,}6 \\ 31{,}0 \\ 39{,}3 \end{pmatrix}$$

b) Wie sähe die prozentuale Anfangsverteilung aus, falls die Anzahlen der Kundinnen für die Kurse S, W und M sich anfänglich im Verhältnis 3 : 2 : 4 verhalten würden?

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3/9 \\ 2/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33{,}3 \\ 22{,}2 \\ 44{,}4 \end{pmatrix}$$

c) Der Wirbelsäulengymnastik-Kurs wird durch einen Tai-Chi-Kurs ausgewechselt.
Nach einigen Tagen stellt sich die stationäre (stabile) Verteilung

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}6 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

ein. Die neue Übergangsmatrix hat jetzt die Form

$$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} a & b & 0{,}3 \\ c & d & e \\ 0{,}1 & 0{,}1 & f \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Werte der Koeffizienten a bis f unter der zusätzlichen Annahme, dass der Anteil der Teilnehmerinnen, die von Tag zu Tag dem Tai-Chi-Kurs treu bleiben, 70 % beträgt.

$d = 0{,}7$

$a = 0{,}5;\ \ b = 0{,}2;\ \ c = 0{,}4;\ \ e = 0{,}6;\ \ f = 0{,}1$

d) Die neue Übergangsmatrix hat jetzt die Form:

$$\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Welche Bedeutung hat die 3. Zeile (dreimal 0,1) für die Entwicklung einer beliebigen Anfangsverteilung?
Was kann dann hinsichtlich der Existenz der inversen Matrix $\mathcal{M}_3^{-1}$ ausgesagt werden, <u>ohne</u> sie ausrechnen zu wollen?

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0{,}1 \cdot (v_1 + v_2 + v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Es ist zu ersehen, dass der Anteil der M-Teilnehmerinnen unabhängig von der Verteilung des Vortages 10 % beträgt.
Ein Rückschluss auf die Verteilung des Vortages ist daher nicht möglich.

e) Unter den durch die Matrix $\mathcal{M}_3$ aus d) beschriebenen Verhältnissen sei die Verteilung der Damen auf die drei Kurse an einem bestimmten Tag durch

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die Prozentsätze v_1' und v_2' des folgenden Tages liegen können.

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_3 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_3 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}9 - v_2 \\ v_2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}48 - 0{,}3v_2 \\ 0{,}3v_2 + 0{,}42 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$0 \le v_2 \le 0{,}9 \quad \Longrightarrow \quad 0{,}21 \le v_1' \le 0{,}48$$
$$0{,}42 \le v_2' \le 0{,}69$$

↑ Stabile Verteilung

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & 1-2b & 0 \\ 1-a & b & 1-c \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$$

Ein Austauschprozess (Wanderbewegung, Wasseraustausch von Gewässerschichten, usw.) werde durch die stochastische Matrix $\mathcal{M}$ modelliert.
Welche Bedingungen müssen a, b und c erfüllen, damit die stabile Verteilung

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{vorliegt?}$$

Tipp: Die Bedingungen sind der Matrix oder besser noch dem Übergangsgraphen abzulesen.

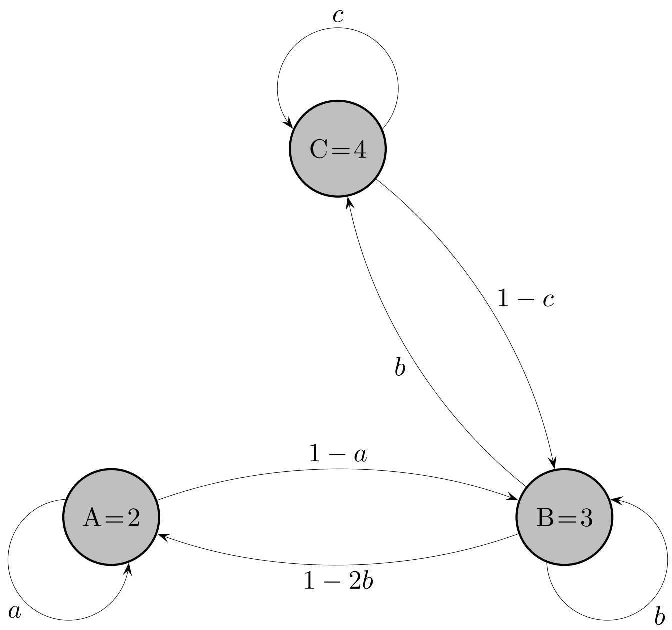
↑ Stabile Verteilung

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & 1-2b & 0 \\ 1-a & b & 1-c \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$$

Ein Austauschprozess (Wanderbewegung, Wasseraustausch von Gewässerschichten, usw.) werde durch die stochastische Matrix $\mathcal{M}$ modelliert.
Welche Bedingungen müssen a, b und c erfüllen, damit die stabile Verteilung

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{vorliegt?}$$

Tipp: Die Bedingungen sind der Matrix oder besser noch dem Übergangsgraphen abzulesen.



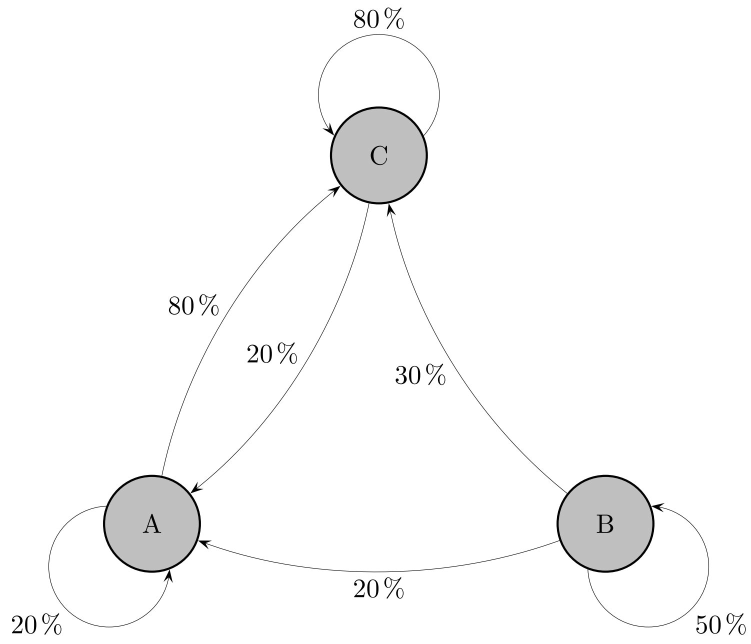
$$0 \le a, c \le 1$$
$$0 \le b \le \frac{1}{2}$$

Die Flüsse zwischen A und B, sowie B und C müssen ausgeglichen sein.

$$2(1-a) = 3(1-2b)$$
$$3b = 4(1-c)$$

Zum selben Ergebnis gelangt man durch Lösen des unterbestimmten Gleichungssystems: $\mathcal{M} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$

↑ Austauschprozess, Aufgabe ohne GTR



a) Ermitteln Sie ohne GTR die Grenzmatrix.

b) Der Startvektor sei $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie ohne Bezug auf die Grenzmatrix die Grenzverteilung.

↑ Wildtierbestand

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population weiblicher Tiere eines Wildtierbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Die Entwicklung dieser weiblichen Tiere lässt sich in drei Lebensphasen einteilen: Nachkommen werden im Frühjahr geboren und im ersten Lebensjahr als Kitze (K) sowie im Alter von einem Jahr als Jungtiere (J) bezeichnet. Tiere ab einem Alter von zwei Jahren gelten als erwachsen (E). Zu Beginn der Beobachtung der Population $(K, J, E)^{\mathrm{T}}$ wird deren Zusammensetzung durch den Vektor

$\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 115 \\ 65 \\ 320 \end{pmatrix}$ dargestellt. Die Übergangsmatrix lautet:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}65 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Bedeutung des Werts 0,65 im Sachzusammenhang an.

b) Ermitteln Sie für die Zeitpunkte sieben, acht und neun Jahre nach Beobachtungsbeginn jeweils die prozentuale Zunahme der Gesamtanzahl der Tiere gegenüber dem Vorjahr. Stellen Sie eine Vermutung dazu auf, wie sich das Wachstum der Population ohne Verwendung von Matrizen näherungsweise beschreiben lässt.

c) Aufgrund einer Krankheit halbiert sich die Überlebensrate der Kitze.
Die Entwicklung der Population von einem Jahr zum nächsten Jahr kann nun im Modell durch die Matrix

$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}65 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Interpretieren Sie den Vektor $\mathcal{R} \cdot \mathcal{M} \cdot \overrightarrow{v_9}$ hinsichtlich der Entwicklung der Population.

d) Um Schäden durch eine zu große Population zu vermeiden, untersucht eine Forschungsgruppe die Möglichkeit, den Tieren der Population ein Hormon zu verabreichen, das bei erwachsenen Tieren zu Unfruchtbarkeit führt. Die Übergangsmatrix lautet:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}25 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}65 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Zum Zeitpunkt der Verabreichung des Hormons wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor $\overrightarrow{w_0} = r \cdot \overrightarrow{u_1} + s \cdot \overrightarrow{u_2}$ dargestellt,

dabei sind $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 650 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten 1 (Fixvektor) und 0,8.

$\overrightarrow{v}$ ist Eigenvektor von $\mathcal{H}$, falls $\mathcal{H} \cdot \overrightarrow{v} = k\,\overrightarrow{v}$ gilt. k ist dann der zugehörige Eigenwert.

Welche Zusammensetzung der Population stellt sich langfristig ein?

↑ Wildtierbestand

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population weiblicher Tiere eines Wildtierbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Die Entwicklung dieser weiblichen Tiere lässt sich in drei Lebensphasen einteilen: Nachkommen werden im Frühjahr geboren und im ersten Lebensjahr als Kitze (K) sowie im Alter von
einem Jahr als Jungtiere (J) bezeichnet. Tiere ab einem Alter von zwei Jahren gelten als erwachsen (E).
Zu Beginn der Beobachtung der Population $(K, J, E)^{\mathrm{T}}$ wird deren Zusammensetzung durch den Vektor

$\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 115 \\ 65 \\ 320 \end{pmatrix}$ dargestellt. Die Übergangsmatrix lautet:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}65 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Bedeutung des Werts 0,65 im Sachzusammenhang an. 65 % der Jungtiere überleben jährlich.

b) Ermitteln Sie für die Zeitpunkte sieben, acht und neun Jahre nach Beobachtungsbeginn jeweils die prozentuale Zunahme der Gesamtanzahl der Tiere gegenüber dem Vorjahr. Stellen Sie eine Vermutung dazu auf, wie sich das Wachstum der Population ohne Verwendung von Matrizen näherungsweise beschreiben lässt.

jeweilige Zunahme 17 %

Vermutung: Die Population wächst exponentiell mit dem Wachstumsfaktor 1,17.

c) Aufgrund einer Krankheit halbiert sich die Überlebensrate der Kitze.
Die Entwicklung der Population von einem Jahr zum nächsten Jahr kann nun im Modell durch die Matrix

$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}65 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Interpretieren Sie den Vektor $\mathcal{R} \cdot \mathcal{M} \cdot \overrightarrow{v_9}$ hinsichtlich der Entwicklung der Population.

Die Krankheit trat offenbar von 11 Jahren nur im 10. Jahr auf, ...

d) Um Schäden durch eine zu große Population zu vermeiden, untersucht eine Forschungsgruppe die Möglichkeit, den Tieren der Population ein Hormon zu verabreichen, das bei erwachsenen Tieren zu Unfruchtbarkeit führt.
Die Übergangsmatrix lautet:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}25 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}65 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Zum Zeitpunkt der Verabreichung des Hormons wird die Zusammensetzung der Population
durch den Vektor $\overrightarrow{w_0} = r \cdot \overrightarrow{u_1} + s \cdot \overrightarrow{u_2}$ dargestellt,

dabei sind $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 650 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten 1 (Fixvektor) und 0,8.

$\overrightarrow{v}$ ist Eigenvektor von $\mathcal{H}$, falls $\mathcal{H} \cdot \overrightarrow{v} = k\,\overrightarrow{v}$ gilt. k ist dann der zugehörige Eigenwert.

Welche Zusammensetzung der Population stellt sich langfristig ein?

$$\overrightarrow{w_n} = r \cdot \overrightarrow{u_1} + s\,0{,}8^n \cdot \overrightarrow{u_2}$$
$$\lim_{n \to \infty} \overrightarrow{w_n} = r \cdot \overrightarrow{u_1}$$