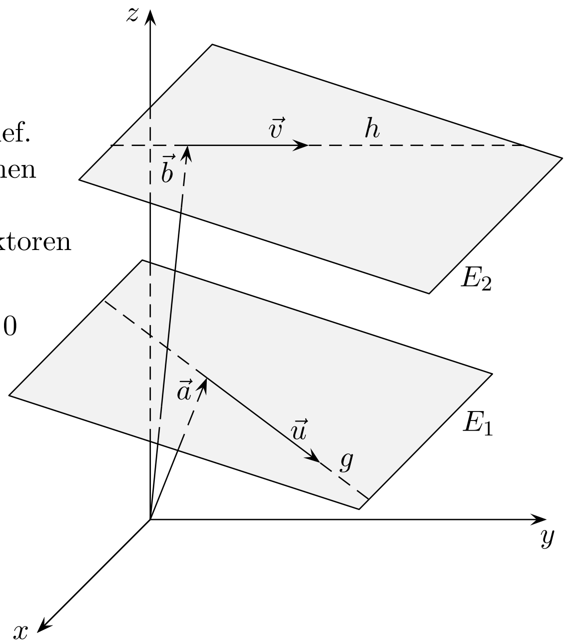
Abstand windschiefer Geraden

↑ Abstand windschiefer Geraden



Zwei Geraden, $\quad g: \quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$

$$h: \quad \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{v}$$

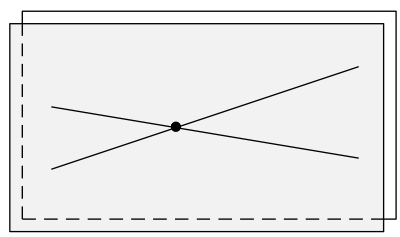
die sich weder schneiden noch parallel verlaufen, sind windschief.
Zu zwei windschiefen Geraden gibt es stets zwei parallele Ebenen E_1 und E_2, in denen sie verlaufen.
Als Richtungsvektoren dieser Ebenen können die Richtungsvektoren der Geraden übernommen werden.

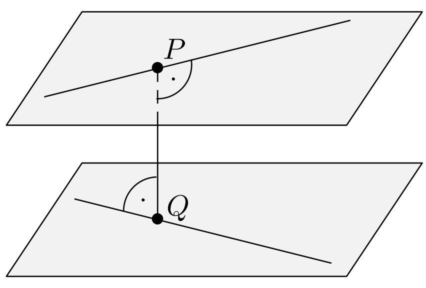
Sei $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, $\quad$ dann lautet die HNF von $E_1: \quad \vec{n}^{\circ}\,(\vec{x} - \vec{a}\,) = 0$

$\Longrightarrow \quad d\,(g,\, h) = |\,\vec{n}^{\circ}\,(\vec{b} - \vec{a}\,)\,|$ $\qquad$ (siehe Abstand Punkt/Ebene)

$d\,(g,\, h)$ ist die kürzeste Entfernung der Punkte auf g zu den Punkten auf h. Hierzu betrachte man die Ebenen mit den enthaltenen Geraden senkrecht von oben, d. h. in Blickrichtung des Normalenvektors.

alternativer Beweis
Direkt einsehbar: (siehe Skalarprodukt Fortsetzung Projektion)
$d\,(g,\, h) = |\,\vec{n}^{\circ}\,| \cdot |\,\vec{b} - \vec{a}\,| \cdot |\cos\alpha\,| = |\,\vec{n}^{\circ}\,(\vec{b} - \vec{a}\,)\,|$





Um die Fußpunkte P und Q zu ermitteln, sind die Lösungen des Gleichungssystems:

$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$
$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

in die Geradengleichungen einzusetzen (der Differenzvektor steht senkrecht auf beiden Richtungsvektoren). Mit den Fußpunkten kann der Abstand berechnet werden.

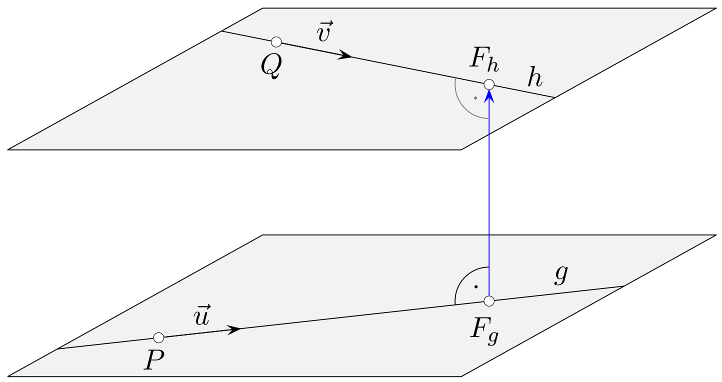
Alternativ kann die Ebene E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{u} \times \vec{v}$ mit der Geraden h: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$ geschnitten werden.

$\uparrow$ Fußpunkte (und Abstand) mit laufenden Punkten

Gegeben sind die windschiefen Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\2\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Gesucht sind die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.



Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{F_gF_h}$ mit den Parametern r und s steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der Geraden.

$$\overrightarrow{F_gF_h} = \begin{pmatrix}s-3\\2s-3\\s+3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-7\\r+2\\2r-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s+4\\2s-r-5\\s-2r+6\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_gF_h}\cdot\vec{u} &= 0\\ 4s-5r &= -7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_gF_h}\cdot\vec{v} &= 0\\ 6s-4r &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 3 \quad \Longrightarrow \quad F_g(-7\,|\,5\,|\,3)\\ s &= 2 \quad \Longrightarrow \quad F_h(-1\,|\,1\,|\,5)\end{aligned}$$

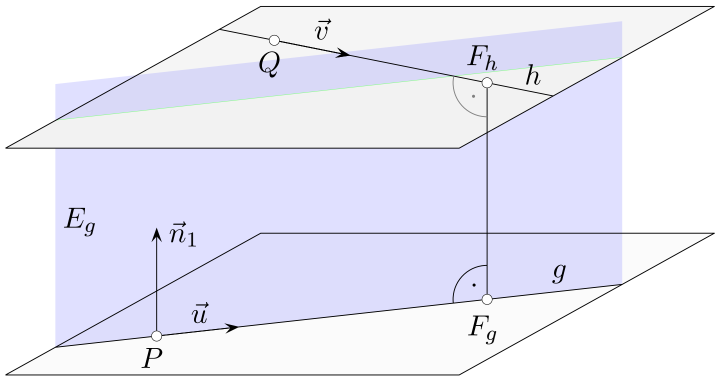
$$d(g,h) = |\overrightarrow{F_gF_h}| = \sqrt{56} \approx 7{,}483$$

↑ Fußpunkte als Schnittpunkte

Gegeben sind die windschiefen Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.



F_h ist der Schnittpunkt der Ebene E_g (Stützvektor $\overrightarrow{OP}$, Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{n}_1 = \vec{u} \times \vec{v}$) und der Geraden h. F_g erhält man auf die gleiche Weise.

Normalenform $\quad E_g\colon\ \vec{n}_2\Big[\vec{x} - \overrightarrow{OP}\Big] = 0, \qquad \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{u}$

$$\vec{n}_1 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E_g\colon\ \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$E_g \cap h \quad \Longrightarrow \quad s = 2,\ \ F_h(-1\,|\,1\,|\,5), \qquad$ entsprechend $\ F_g(-7\,|\,5\,|\,3)$

$d(g,h) = |\overrightarrow{F_gF_h}| = \sqrt{56} \approx 7{,}483$

Alternativ Schnitt mit der Parameterform von E_g:

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$s = 2,\ r = 3,\ t = 2$

↑ Abstände   Zusammenfassung

1. Abstand zweier Punkte A, B

   $d(A,\,B) = |\overrightarrow{AB}|$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

2. Abstand Punkt/Ebene $\qquad$ (im $\mathbb{R}^2$ Abstand Punkt/Gerade)

   $d(P,\,E) = |\,\vec{n}^\circ \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})\,| = |\,\vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OP} - a\,|$ $\qquad$ $\overrightarrow{OP}$ in HNF einsetzen.

   $d(P,\,E) = |\,\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}^\circ\,|$ $\qquad$ $\vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OP} - a > 0 \iff$ Ebene verläuft zwischen P und dem Ursprung.

3. Abstand Punkt/Gerade

   λ mit $(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{u} = 0$ berechnen. $\qquad$ λ in g eingesetzt ergibt den Fußpunkt F.

   $d(P,\,g) = |\overrightarrow{PF}|$

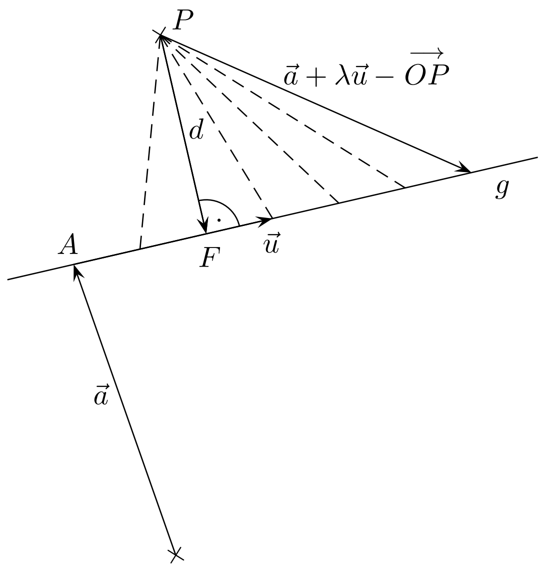
   oder mit GTR das Minimum der Funktion
   $d(\lambda) = |\,\vec{a} + \lambda\vec{u} - \overrightarrow{OP}\,|$ ermitteln.

   oder direkt:

   $d(P,\,g) = |\,(\overrightarrow{OP} - \vec{a}\,) \times \vec{u}^\circ\,|$

   $d(P,\,g) = |\,\overrightarrow{AP} \times \vec{u}^\circ\,|$

   Tipp: Den Normierungsfaktor $\dfrac{1}{|\vec{u}|}$ vor den Betragsstrich ziehen.



4. Abstand paralleler Geraden siehe 3.

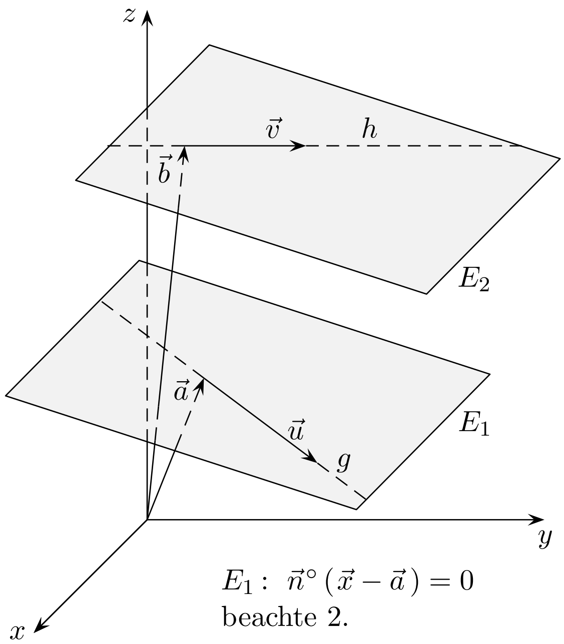
5. Abstand paralleler Ebenen siehe 2.

6. Abstand windschiefer Geraden $g:\ \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$
   $h:\ \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$

   $d(g,\,h) = |\,\vec{n}^\circ\,(\vec{b} - \vec{a}\,)\,|$ $\qquad$ $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

   Fußpunkte und Abstand mit
   $(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$
   $(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$

   oder die Ebene E: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu(\vec{u} \times \vec{v})$
   mit der Geraden h: $\vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$ schneiden.



$E_1:\ \vec{n}^\circ\,(\vec{x} - \vec{a}\,) = 0$
beachte 2.

7. Welcher Punkt P auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   ist von $A(4\,|\,0\,|\,1)$ und $B(0\,|\,2\,|\,1)$ gleichweit entfernt?

   Lösung:
   Für die Punkte Q auf der Geraden g gilt: $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$

   Aus der Bedingung $|\overrightarrow{AQ}\,| = |\overrightarrow{BQ}\,|$ folgt $t = -\frac{1}{2}$ und damit $P(\frac{5}{2}\,|\,2\,|\,-\frac{1}{2})$.

8. Welche Punkte auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   haben von der Ebene $E\colon 2x - y + 2z = 3$ den Abstand 2 LE?

   Lösung:
   Für die Punkte Q auf der Geraden g gilt: $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$

   Aus der Bedingung $|\,\vec{n}^\circ\,\overrightarrow{OQ} - a\,| = 2$ folgt

   $\frac{1}{3}(t-2) = 2, \quad t = 8, \quad Q_1(1\,|\,9\,|\,8)$ und

   $\frac{1}{3}(t-2) = -2, \quad t = -4, \quad Q_2(1\,|\,-3\,|\,-4)$.

9. Welchen Abstand haben die windschiefen Geraden g und h
   und wie lauten die Fußpunkte? (Abitur Ni 2007)

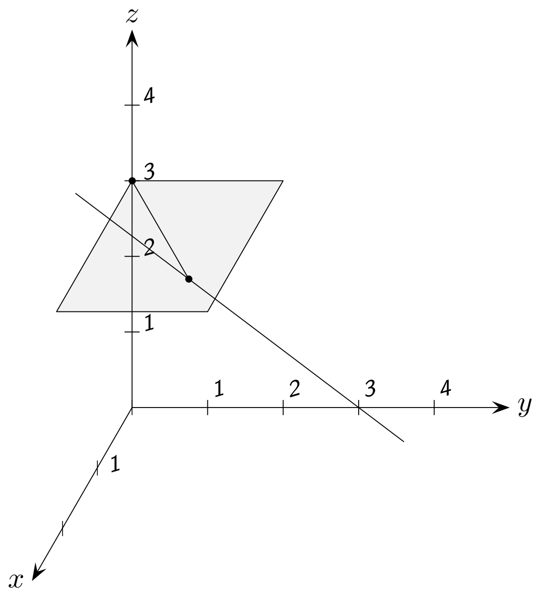
   $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Lösung:
   $s = t = 1,\ \ P(4\,|\,4\,|\,-2),\ \ Q(2\,|\,1\,|\,4),\ \ d = 7$

Welcher Punkt P auf der Geraden

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat von der z-Achse minimalen Abstand?



Welcher Punkt P auf der Geraden

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat von der z-Achse minimalen Abstand?

$$\overrightarrow{d(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 2-\lambda \\ 2+2\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2+2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 2-\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Ansatz garantiert, dass $\overrightarrow{d(\lambda)}$ orthogonal zur z-Achse ist.

$|\overrightarrow{d(\lambda)}| \ \rightarrow$ Minimum

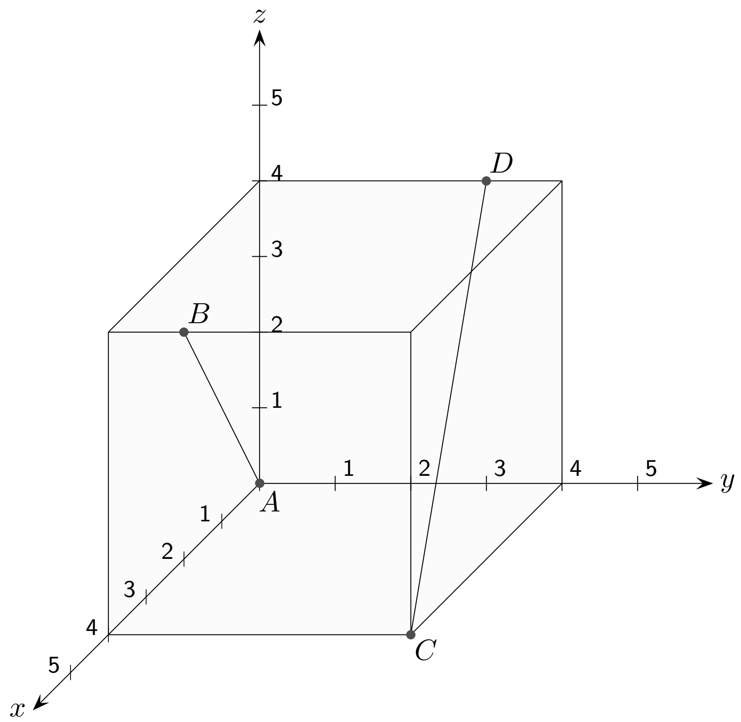
$\lambda = \frac{1}{2}$

$P\left(\frac{3}{2} \,|\, \frac{3}{2} \,|\, 3\right)$

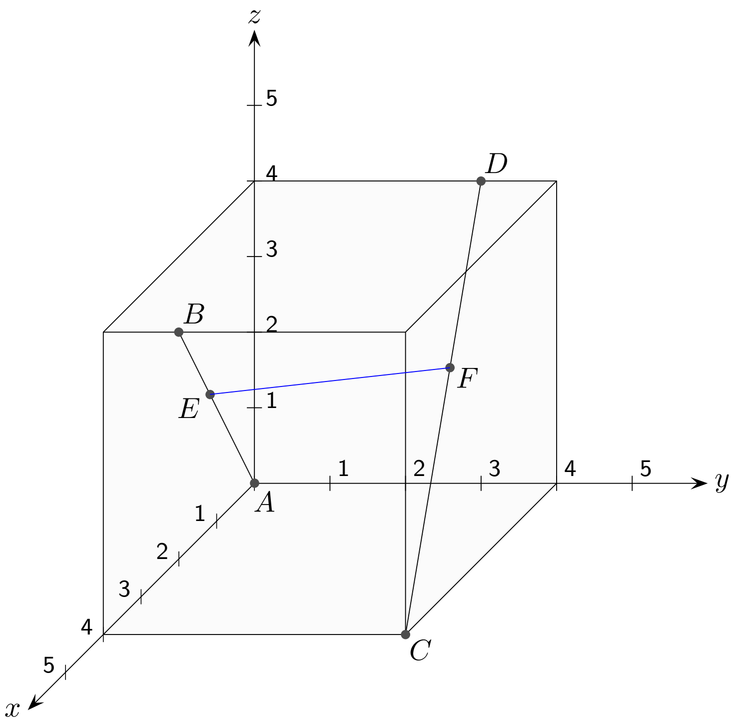
$Q(0 \,|\, 0 \,|\, 3)$

$d = \sqrt{\frac{9}{2}}$

In der Abbildung ist ein Würfel mit der Kantenlänge 4 dargestellt.
Die Punkte B, D sind jeweils $1\,LE$ von der nächstgelegenen Ecke entfernt.



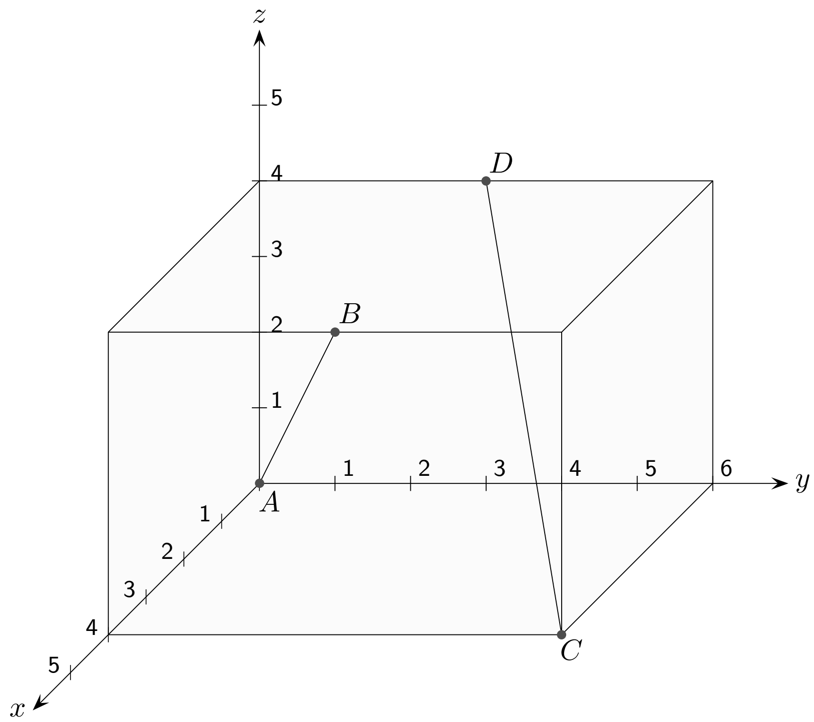
Berechnen Sie die Punkte der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit minimalem Abstand zueinander.
Wie groß ist der minimale Abstand?



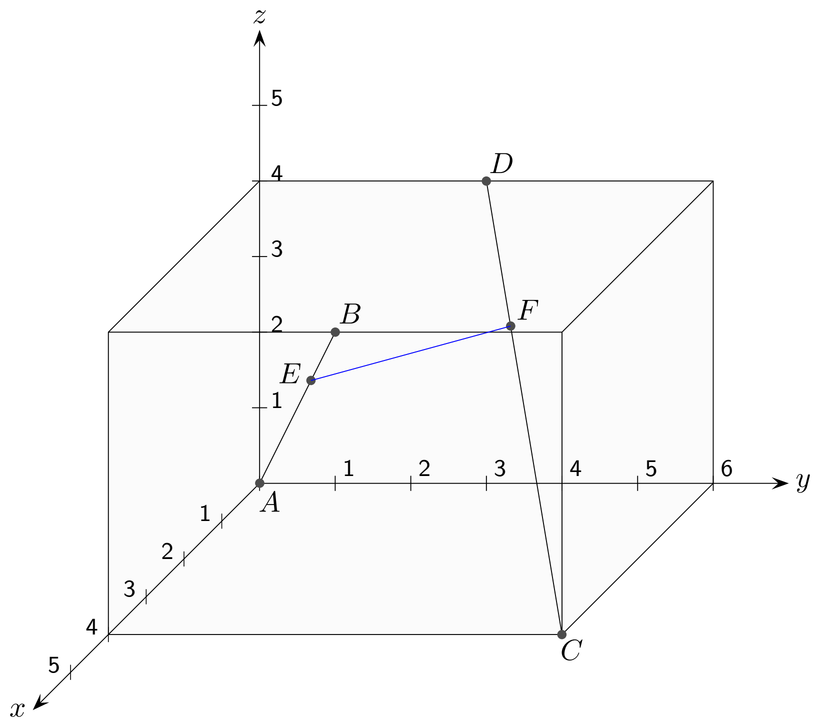
Berechnen Sie die Punkte der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit minimalem Abstand zueinander.
Wie groß ist der minimale Abstand?

$$E\left(\frac{40}{17} \mid \frac{10}{17} \mid \frac{40}{17}\right),\ \ F\left(\frac{28}{17} \mid \frac{58}{17} \mid \frac{40}{17}\right),\ \ d = \frac{12}{\sqrt{17}} \approx 2{,}910$$

In der Abbildung ist ein Quader dargestellt.
Die Punkte B, D liegen mittig auf den Kanten.



Berechnen Sie die Punkte der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit minimalem Abstand zueinander.
Wie groß ist dieser minimale Abstand?



Berechnen Sie die Punkte der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit minimalem Abstand zueinander.
Wie groß ist dieser minimale Abstand?

$$E\left(\frac{68}{25} \mid \frac{51}{25} \mid \frac{68}{25}\right),\;\; F\left(\frac{32}{25} \mid \frac{99}{25} \mid \frac{68}{25}\right),\;\; d = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

Begründen Sie:
Wenn der Quader in z-Achsenrichtung gestreckt wird, ändert sich der minimale Abstand nicht.
Tipp: Betrachten Sie den Vektor $\overrightarrow{EF}$.

Der Vektor $\overrightarrow{EF}$ ist parallel zur xy-Ebene. Seine Länge und die Orthogonalität zu den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ bleiben bei der Streckung erhalten, da die Strecken in Ebenen liegen, die zur z-Achse parallel verlaufen.