

# Abstand windschiefer Geraden

Zwei Geraden,

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$$

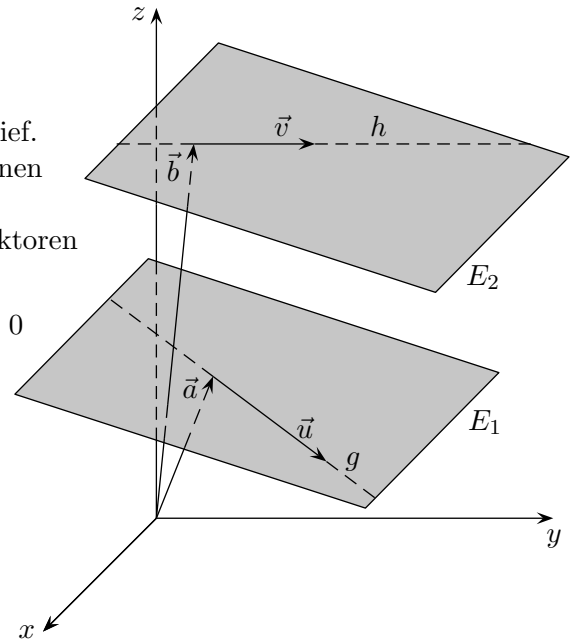
$$h: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{v}$$

die sich weder schneiden noch parallel verlaufen, sind windschief. Zu zwei windschiefen Geraden gibt es stets zwei parallele Ebenen  $E_1$  und  $E_2$ , in denen sie verlaufen.

Als Richtungsvektoren dieser Ebenen können die Richtungsvektoren der Geraden übernommen werden.

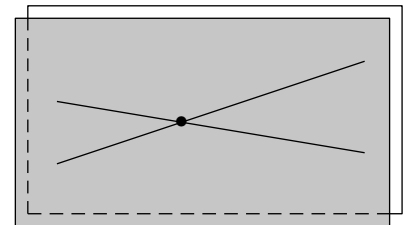
Sei  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ , dann lautet die HNF von  $E_1$ :  $\vec{n}^\circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$   
 $\implies d(g, h) = | \vec{n}^\circ (\vec{b} - \vec{a}) |$

$d(g, h)$  ist die kürzeste Entfernung der Punkte auf  $g$  zu den Punkten auf  $h$ . Hierzu betrachte man die Ebenen mit den enthaltenen Geraden senkrecht von oben, d. h. in Blickrichtung des Normalenvektors.



2. Beweis:

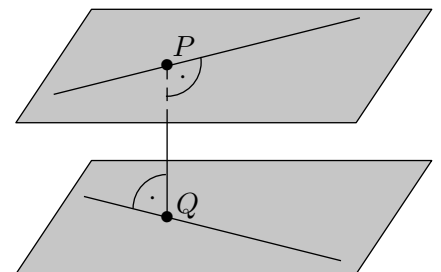
$$\vec{n}^\circ (\vec{b} - \vec{a}) = | \vec{n}^\circ | \cdot | \vec{b} - \vec{a} | \cdot \cos \alpha = | d(g, h) | \quad \text{Erläutere dies.}$$



Um die Fußpunkte  $P$  und  $Q$  zu ermitteln, sind die Lösungen des Gleichungssystems:

$$(\vec{a} + \lambda \vec{u} - \vec{b} - \mu \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$

$$(\vec{a} + \lambda \vec{u} - \vec{b} - \mu \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$



in die Geradengleichungen einzusetzen (der Differenzvektor steht senkrecht auf beiden Richtungsvektoren). Mit den Fußpunkten kann der Abstand berechnet werden.

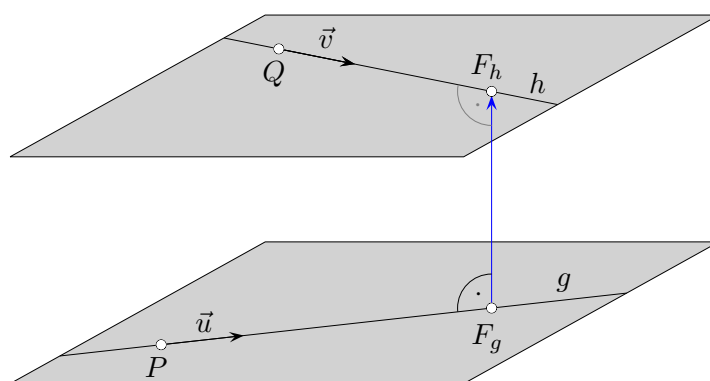
Alternativ kann die Ebene  $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{u} \times \vec{v}$  mit der Geraden  $h: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{v}$  geschnitten werden.

## Fußpunkte (und Abstand) mit laufenden Punkten

Gegeben sind die windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.



Der Verbindungsvektor  $\overrightarrow{F_g F_h}$  mit den Parametern  $r$  und  $s$  steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der Geraden.

$$\overrightarrow{F_g F_h} = \begin{pmatrix} s - 3 \\ 2s - 3 \\ s + 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ r + 2 \\ 2r - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 4 \\ 2s - r - 5 \\ s - 2r + 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_g F_h} \cdot \vec{u} &= 0 \\ 4s - 5r &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_g F_h} \cdot \vec{v} &= 0 \\ 6s - 4r &= 0 \end{aligned}$$

$$r = 3 \quad \Rightarrow \quad F_g(-7 \mid 5 \mid 3)$$

$$s = 2 \quad \Rightarrow \quad F_h(-1 \mid 1 \mid 5)$$

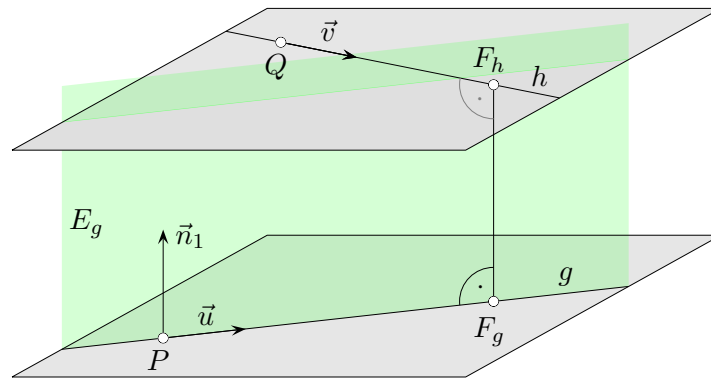
$$d(g, h) = |\overrightarrow{F_g F_h}| = \sqrt{56} \approx 7,483$$

## Fußpunkte als Schnittpunkte

Gegeben sind die windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.



$F_h$  ist der Schnittpunkt der Ebene  $E_g$  (Stützvektor  $\vec{OP}$ , Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{n}_1 = \vec{u} \times \vec{v}$ ) und der Geraden  $h$ .  $F_g$  erhält man auf die gleiche Weise.

Normalenform  $E_g: \vec{n}_2[\vec{x} - \vec{OP}] = 0, \quad \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{u}$

$$\vec{n}_1 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E_g: \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$E_g \cap h \implies s = 2, F_h(-1 \mid 1 \mid 5), \quad \text{entsprechend } F_g(-7 \mid 5 \mid 3)$$

$$d(g, h) = |\vec{F_g F_h}| = \sqrt{56} \approx 7,483$$

Alternativ Schnitt mit der Parameterform von  $E_g$ :

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s = 2, r = 3, t = 2$$

# Abstände Zusammenfassung

1. Abstand zweier Punkte  $A, B$

$$d(A, B) = |\vec{AB}| \qquad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

2. Abstand Punkt/Ebene (im  $\mathbb{R}^2$  Abstand Punkt/Gerade)

$$d(P, E) = |\vec{n}^\circ \cdot (\vec{OP} - \vec{OA})| = |\vec{n}^\circ \vec{OP} - a| \qquad \vec{OP} \text{ in HNF einsetzen.}$$

$$d(P, E) = |\vec{AP} \cdot \vec{n}^\circ| \qquad \vec{n}^\circ \vec{OP} - a > 0 \iff \text{Ebene verl\u00e4uft zwischen } P \text{ und dem Ursprung.}$$

3. Abstand Punkt/Gerade

$\lambda$  mit  $(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{OP}) \cdot \vec{u} = 0$  berechnen.

$\lambda$  in  $g$  eingesetzt ergibt den Fußpunkt  $F$ .

$$d(P, g) = |\vec{PF}|$$

oder mit GTR das Minimum der Funktion

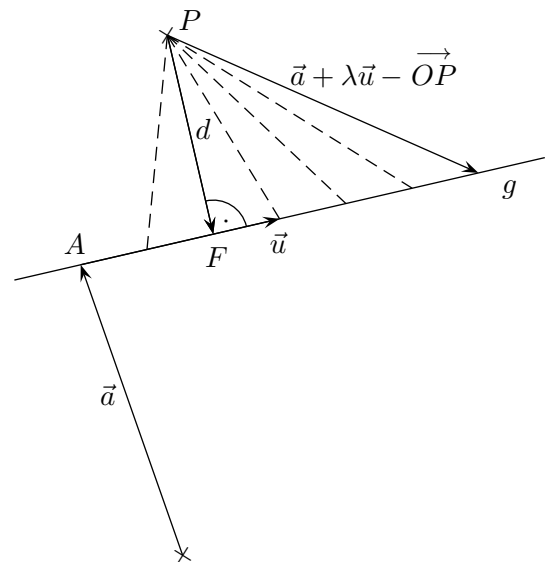
$$d(\lambda) = |\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{OP}| \text{ ermitteln.}$$

oder direkt:

$$d(P, g) = |(\vec{OP} - \vec{a}) \times \vec{u}^\circ|$$

$$d(P, g) = |\vec{AP} \times \vec{u}^\circ|$$

Tipp: Den Normierungsfaktor  $\frac{1}{|\vec{u}|}$  vor den Betragsstrich ziehen.



4. Abstand paralleler Geraden siehe 3.

5. Abstand paralleler Ebenen siehe 2.

6. Abstand windschiefer Geraden  $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$$

$$d(g, h) = |\vec{n}^\circ (\vec{b} - \vec{a})| \qquad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

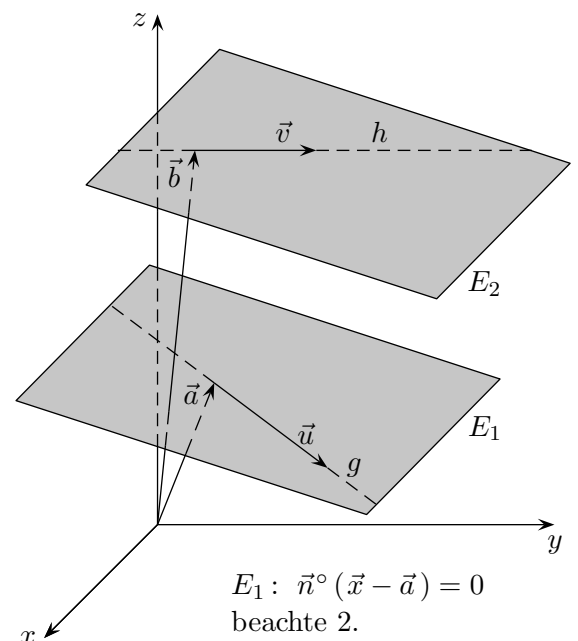
Fußpunkte und Abstand mit

$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$

$$(\vec{a} + \lambda\vec{u} - \vec{b} - \mu\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

oder die Ebene  $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu(\vec{u} \times \vec{v})$

mit der Geraden  $h: \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$  schneiden.



$$E_1: \vec{n}^\circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \text{ beachte 2.}$$

## Abstände Fortsetzung

7. Welcher Punkt  $P$  auf der Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist von  $A(4 | 0 | 1)$  und  $B(0 | 2 | 1)$  gleichweit entfernt?

Lösung:

Für die Punkte  $Q$  auf der Geraden  $g$  gilt:  $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$

Aus der Bedingung  $|\vec{AQ}| = |\vec{BQ}|$  folgt  $t = -\frac{1}{2}$  und damit  $P(\frac{5}{2} | 2 | -\frac{1}{2})$ .

8. Welche Punkte auf der Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  haben von der Ebene  $E: 2x - y + 2z = 3$  den Abstand  $2 LE$ ?

Lösung:

Für die Punkte  $Q$  auf der Geraden  $g$  gilt:  $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}$

Aus der Bedingung  $|\vec{n}^\circ \vec{OQ} - a| = 2$  folgt

$$\frac{1}{3}(t-2) = 2, \quad t = 8, \quad Q_1(1 | 9 | 8) \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{3}(t-2) = -2, \quad t = -4, \quad Q_2(1 | -3 | -4).$$

9. Welchen Abstand haben die windschiefen Geraden  $g$  und  $h$  und wie lauten die Fußpunkte? (Abitur Ni 2007)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$s = t = 1, \quad P(4 | 4 | -2), \quad Q(2 | 1 | 4), \quad d = 7$$

## windschiefe Geraden Einführung

Welcher Punkt  $P$  auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

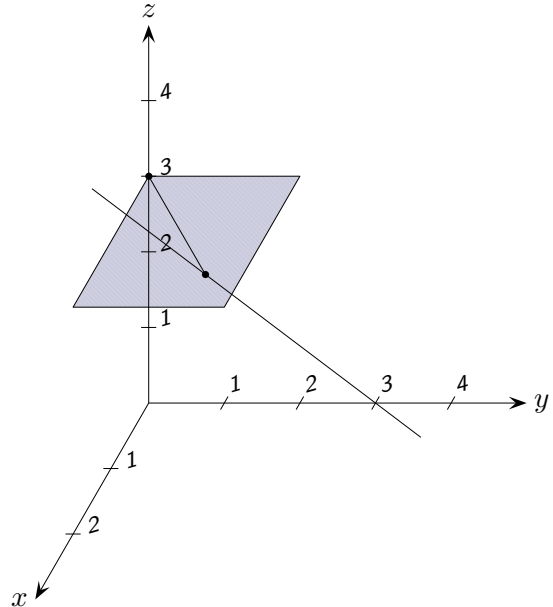
hat von der  $z$ -Achse minimalen Abstand?

## windschiefe Geraden Einführung

Welcher Punkt  $P$  auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hat von der  $z$ -Achse minimalen Abstand?



$$\overrightarrow{d(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 2 - \lambda \\ 2 + 2\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 + 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ 2 - \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Ansatz garantiert, dass  $\overrightarrow{d(\lambda)}$  orthogonal zur  $z$ -Achse ist.

$$|\overrightarrow{d(\lambda)}| \rightarrow \text{Minimum}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{3}{2} \mid \frac{3}{2} \mid 3\right)$$

$$Q(0 \mid 0 \mid 3)$$

$$d = \sqrt{\frac{9}{2}}$$