

## Vektorprodukt Fortsetzung

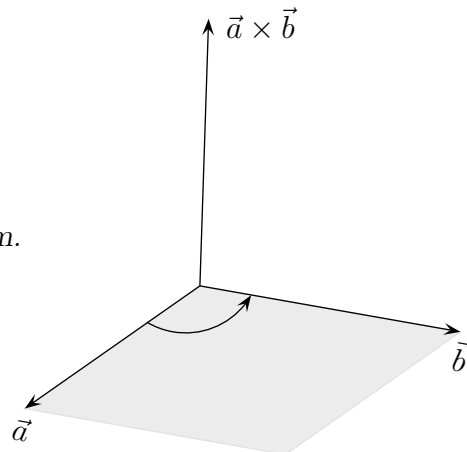
1.  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
2.  $V_{\text{Spat}}, V_{\text{Pyramide}}$
3. Zusammenfassung
4. Berechnung von Vierecken
5. Ebene Figuren
6.  $A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$
7. Herleitung leicht geändert

Für den Anfang geeignet

# ↑ Vektorprodukt Fortsetzung

Rechenregeln:

1. Genau dann ist  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , wenn  $\vec{a}, \vec{b}$  kollinear sind.
2.  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
3.  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
4.  $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$
5.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.



Welche Bedeutung hat  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  ?

Beispiele wie  $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \end{pmatrix}$  legen die Vermutung nahe, dass gilt:  
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  (Rechtecksfläche), falls  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

Mit ein wenig Rechnerei kann die Vermutung bestätigt werden:

$$\left| \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \iff (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

$$\iff -2a_2 b_3 a_3 b_2 - 2a_3 b_1 a_1 b_3 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2$$

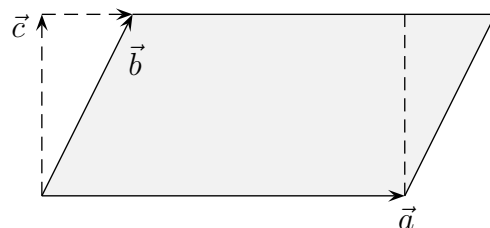
Aus der Voraussetzung  $\vec{a} \perp \vec{b}$  folgt  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ , dann gilt auch:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = 0$$

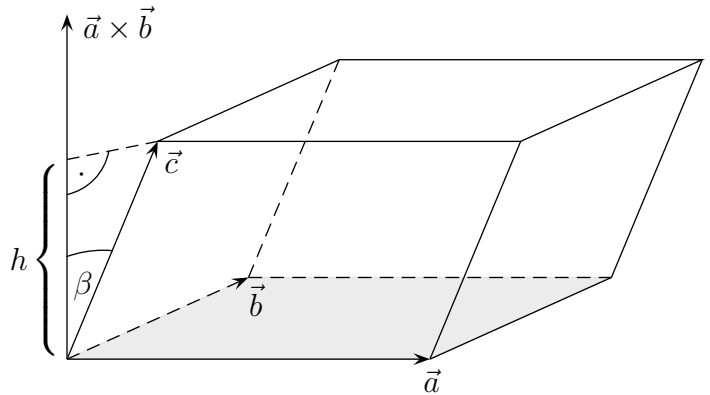
$$\iff a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_2 b_3 a_3 b_2 + 2a_3 b_1 a_1 b_3 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 = 0 \quad \text{Alles klar?}$$

Beweise, ohne auf Koordinaten zurückzugreifen:

1.  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}|$  (Parallelogrammfläche)  
 (Tipp:  $\vec{b} = \vec{c} + \lambda \vec{a}$ )



## ↑ Vektorprodukt

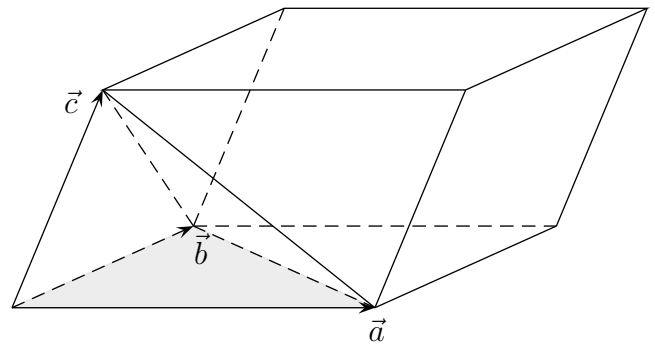


$$2. \quad V_{\text{Spat}} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

(Tipp:  $h = |\vec{c}| \cdot \cos \beta$ )

Ein Spat ist ein gescherter Quader.

Genauer müsste der Betrag genommen werden, da beim Vertauschen der Vektoren das Ergebnis auch negativ werden kann.



$$3. \quad V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Die Pyramide ist durch die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  festgelegt.

$$4. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = A_{\text{Parallelogramm}} \quad (2. \text{ Beweis})$$

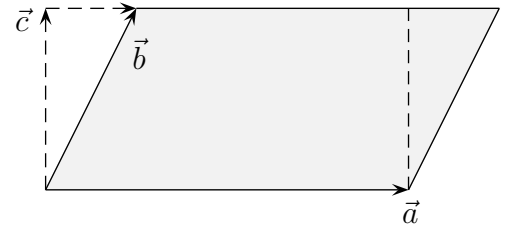
$$\iff |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha, \quad \text{da } A_{\text{Parallelogramm}} = g \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$$

$$\iff (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2, \quad \text{Lagrange (1736 - 1813)}$$

$$\text{beachte: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha, \quad (\cos \alpha)^2 = 1 - (\sin \alpha)^2, \quad |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$$

↑

$$\begin{aligned}
1. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| &= |\vec{a} \times (\vec{c} + \lambda \vec{a})| \\
&= |\vec{a} \times \vec{c} + \lambda \vec{a} \times \vec{a}| \\
&= |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \quad \text{Parallelogrammfläche}
\end{aligned}$$

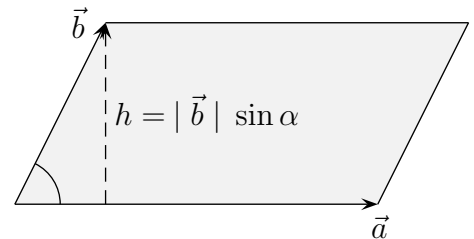


$$4. \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = A_{\text{Parallelogramm}} \quad (2. \text{ Beweis})$$

$$\iff |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha, \quad \text{da } A_{\text{Parallelogramm}} = g \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$$

$$\iff (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \vec{b})^2, \quad \text{Lagrange (1736 - 1813)}$$

$$\text{beachte: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha, \quad (\cos \alpha)^2 = 1 - (\sin \alpha)^2, \quad |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$$



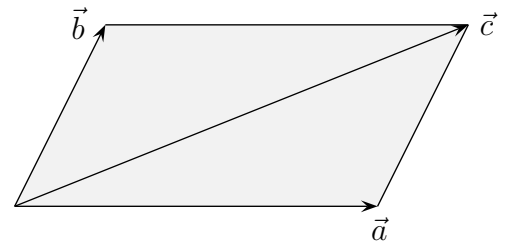
$$\vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1 - (\cos \alpha)^2)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 (\sin \alpha)^2 \quad |\sqrt{\quad}$$

# ↑ Berechnung von Flächen und Volumen Zusammenfassung

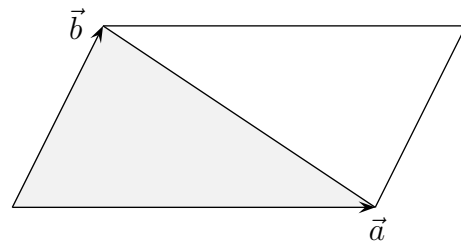
1.  $A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{c}|$



2dimensional:

$$A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

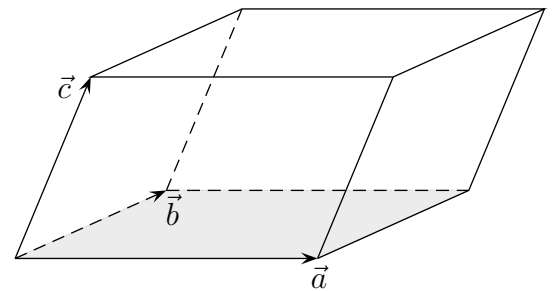
2.  $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$



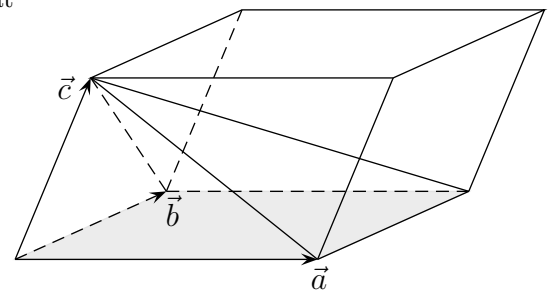
2dimensional:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

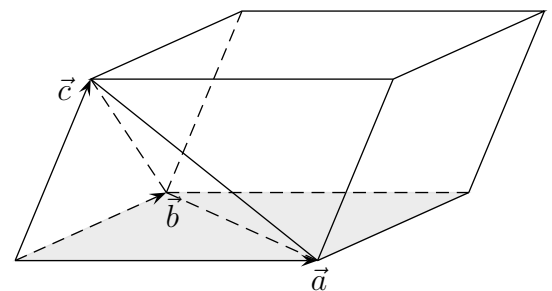
3.  $V_{\text{Spat}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$



4.  $V_{\text{Pyramide (Grundfläche Parallelogramm)}} = \frac{1}{3} V_{\text{Spat}}$

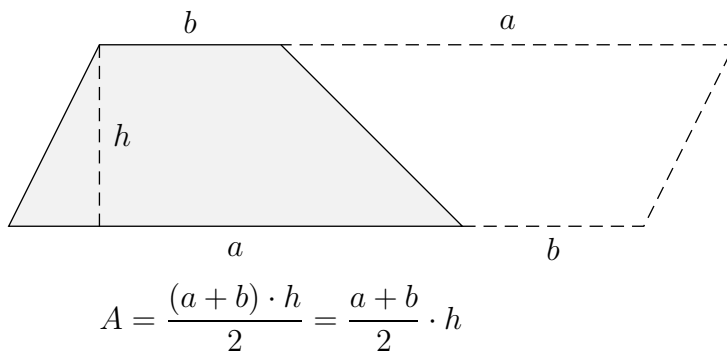
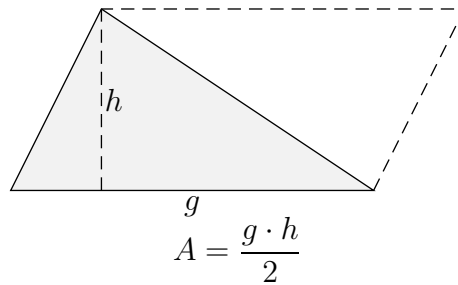
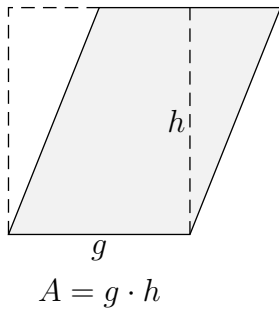


5.  $V_{\text{Pyramide (Grundfläche Dreieck)}} = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}}$



6.  $V_{\text{Pyramide (Kegel)}} = \frac{1}{3} G \cdot h$        $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3$

## ↑ Berechnung von Vierecken

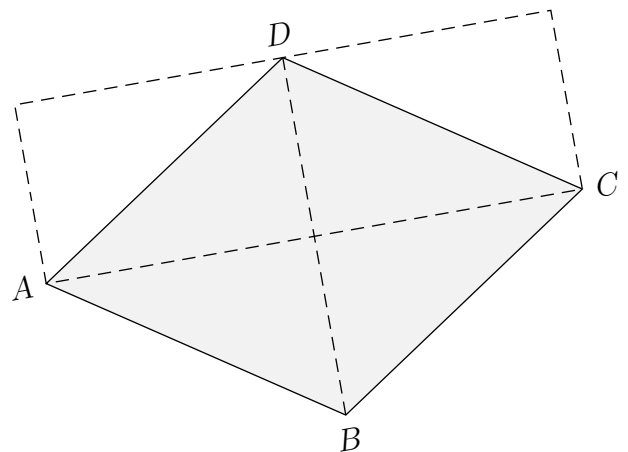


$$A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} |(\vec{AB} + \vec{DC}) \times \vec{AD}|$$

$$A_{\text{Raute}} = \frac{1}{2} |\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}|$$

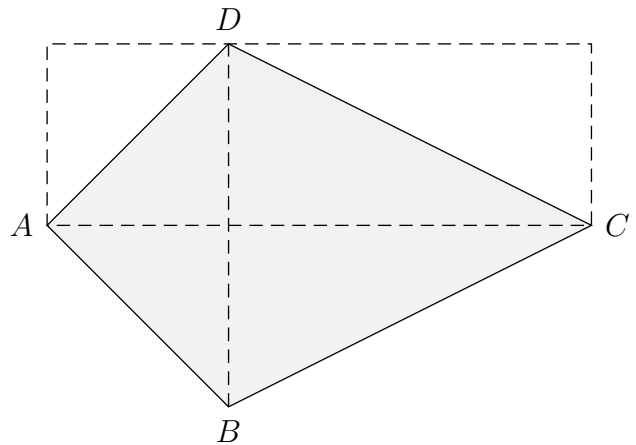


↑

## ↑ Ebene Figuren

gleichschenkliges Dreieck	Mindestens zwei Seiten sind gleich lang.
gleichseitiges Dreieck	Alle drei Seiten sind gleich lang.
Parallelogramm	Gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel.
Trapez	Mindestens zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.
Raute	Alle vier Seiten sind gleich lang.
Drachenviereck	Mindestens eine Diagonale ist Symmetrieachse.

$$A_{\text{Drachenviereck}} = \frac{1}{2} |\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}|$$



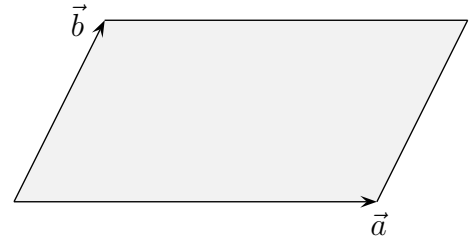
Kreis

Umfang:  $U = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d$

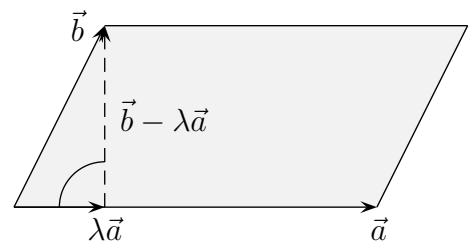
Flächeninhalt:  $A = \pi \cdot r^2$

# ↑ Vektorprodukt und Parallelogrammfläche

Erläutere das Folgende.



$$\begin{aligned} (\vec{b} - \lambda\vec{a}) \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a}^2} \end{aligned}$$



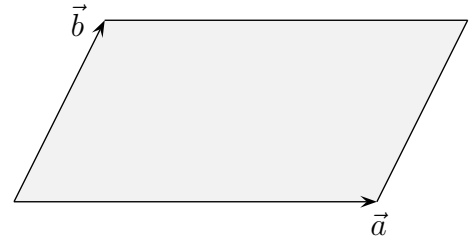
$$\begin{aligned} A_{\text{Parallelogramm}} &= |\vec{b} - \lambda\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \\ A_{\text{Parallelogramm}}^2 &= (\vec{b} - \lambda\vec{a})^2 \cdot \vec{a}^2 \\ &= \dots \quad \text{Klammern auflösen, zusammenfassen} \\ &= \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= \dots \quad \text{Klammern auflösen, umordnen} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (\vec{a} \times \vec{b})^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

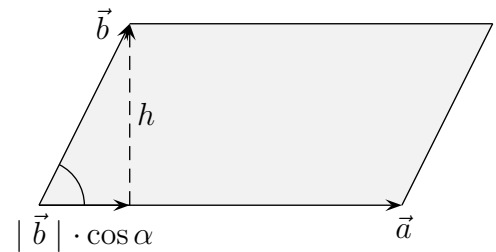


# ↑ Vektorprodukt und Parallelogrammfläche

Erläutere das Folgende.



$$h = \sqrt{|\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2}$$



$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a}| \sqrt{|\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2}$$

$$A_{\text{Parallelogramm}}^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2$$

$$= \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

$$= \dots \quad \text{Klammern auflösen, umordnen}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b})^2$$

$$\implies A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$