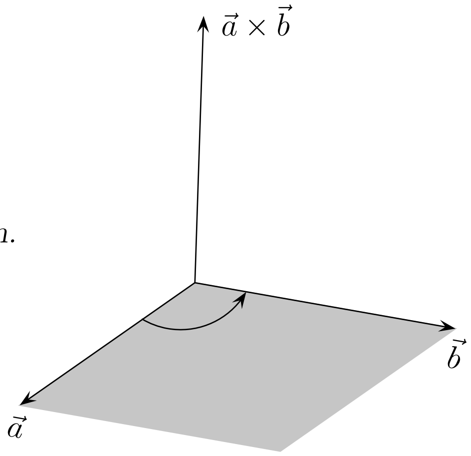
Vektorprodukt Fortsetzung

Rechenregeln:

1. *Genau dann ist* $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, *wenn* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *kollinear sind.*
2. $\vec{a}\times\vec{b} = -\,\vec{b}\times\vec{a}$
3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$
4. $\vec{a}\times(\lambda\,\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a}\times\vec{b})$
5. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ *bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.*



Welche Bedeutung hat $|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|$?

Beispiele wie $\begin{pmatrix} a\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\a\,b\end{pmatrix}$ legen die Vermutung nahe, dass gilt:

$|\,\vec{a}\times\vec{b}\,| = |\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|$ *(Rechtecksfläche)*, falls $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Mit ein wenig Rechnerei kann die Vermutung bestätigt werden:

$$\left|\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\right| = |\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,| \quad\Longleftrightarrow\quad (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

$$\Longleftrightarrow\qquad -2a_2b_3a_3b_2-2a_3b_1a_1b_3-2a_1b_2a_2b_1 \;=\; a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2$$

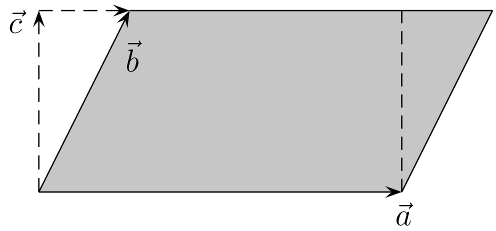
Aus der Voraussetzung $\vec{a}\perp\vec{b}$ folgt $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \;=\; 0$, dann gilt auch:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \;=\; 0$$

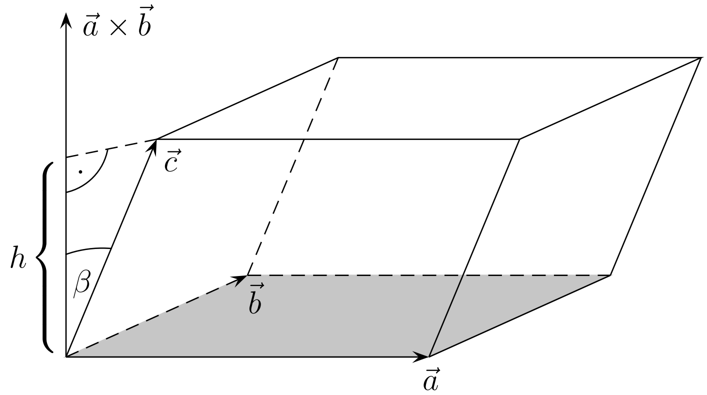
$$\Longleftrightarrow\qquad a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2+2a_2b_3a_3b_2+2a_3b_1a_1b_3+2a_1b_2a_2b_1 \;=\; 0$$ *Alles klar?*

Beweise, ohne auf Koordinaten zurückzugreifen:

1. $|\,\vec{a}\times\vec{b}\,| = |\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{c}\,|$ *(Parallelogrammfläche)*
   (Tipp: $\vec{b} \;=\; \vec{c}+\lambda\,\vec{a}$*)*



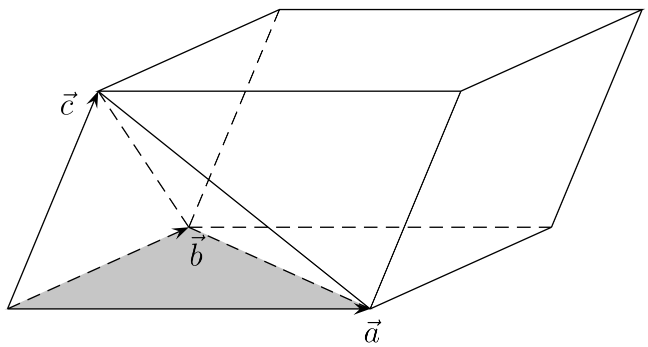
Vektorprodukt



2. $V_{Spat} \;=\; (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

   (Tipp: $h = |\,\vec{c}\,| \cdot \cos\beta$)

   Ein Spat ist ein gescherter Quader.
   Genauer müsste der Betrag genommen werden, da beim Vertauschen der Vektoren das Ergebnis auch negativ werden kann.



3. $V_{Pyramide} \;=\; \dfrac{1}{6}\;|\,(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|$

   Die Pyramide ist durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ festgelegt.

4. $|\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \;=\; A_{Parallelogramm}$ *(2. Beweis)*

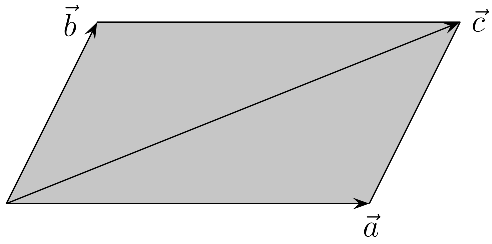
$\iff \quad |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \;= |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|\;\sin\alpha,$ da $A_{Parallelogramm} \;=\; g \cdot h \;= |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|\;\sin\alpha$

$\iff \quad (\vec{a} \times \vec{b}\,)^2 \;=\; \vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2} \;-\; (\vec{a}\,\vec{b}\,)^2,$ *Lagrange (1736 - 1813)*

beachte: $\vec{a} \cdot \vec{b} \;= |\,\vec{a}\,| \cdot\; |\,\vec{b}\,| \cdot\; \cos\alpha, \quad (\cos\alpha)^2 \;=\; 1 - (\sin\alpha)^2, \quad |\,\vec{a}\,|^2 = \;\vec{a}^{\,2}$

Berechnung von Flächen und Volumen   Zusammenfassung

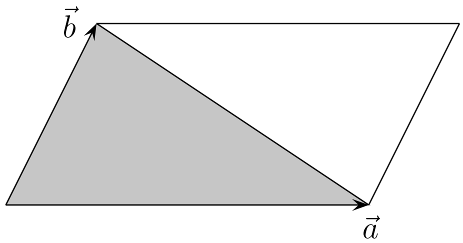
1. $A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = |\, \vec{a} \times \vec{b} \,| = |\, \vec{a} \times \vec{c} \,|$



   2dimensional:

   $$A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = |\, a_1 b_2 - a_2 b_1 \,|$$

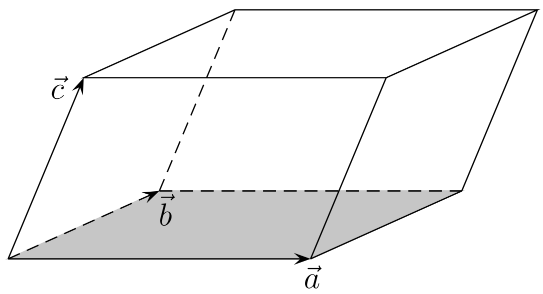
2. $A_{\text{Dreieck}} = \dfrac{1}{2} \,|\, \vec{a} \times \vec{b} \,|$



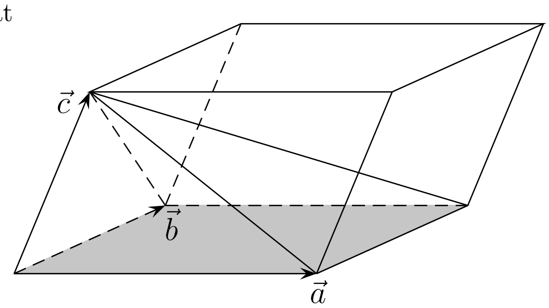
   2dimensional:

   $$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

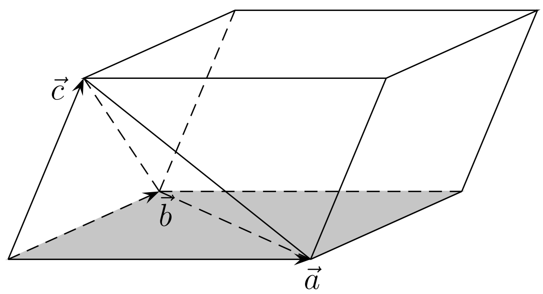
3. $V_{\text{Spat}} = |\, (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \,| = |\, \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \,|$



4. $V_{\text{Pyramide (Grundfläche Parallelogramm)}} = \dfrac{1}{3}\, V_{\text{Spat}}$

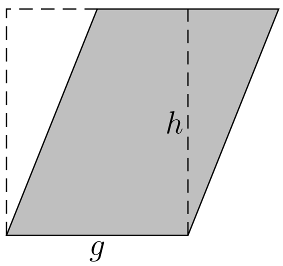


5. $V_{\text{Pyramide (Grundfläche Dreieck)}} = \dfrac{1}{6}\, V_{\text{Spat}}$

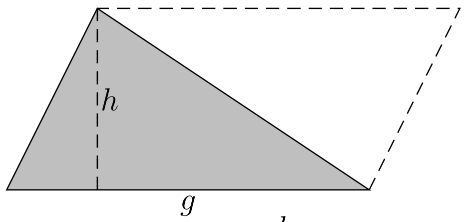


6. $V_{\text{Pyramide (Kegel)}} = \dfrac{1}{3}\, G \cdot h \qquad V_{\text{Kugel}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

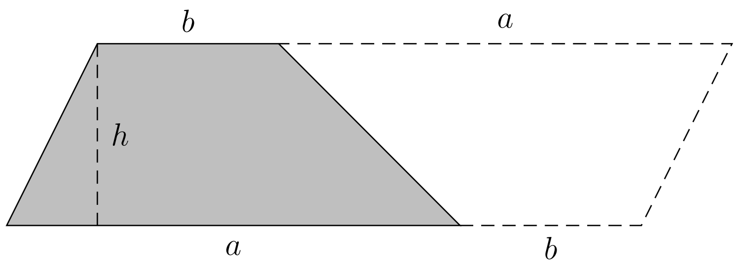
Berechnung von Vierecken



$A = g \cdot h$



$A = \dfrac{g \cdot h}{2}$



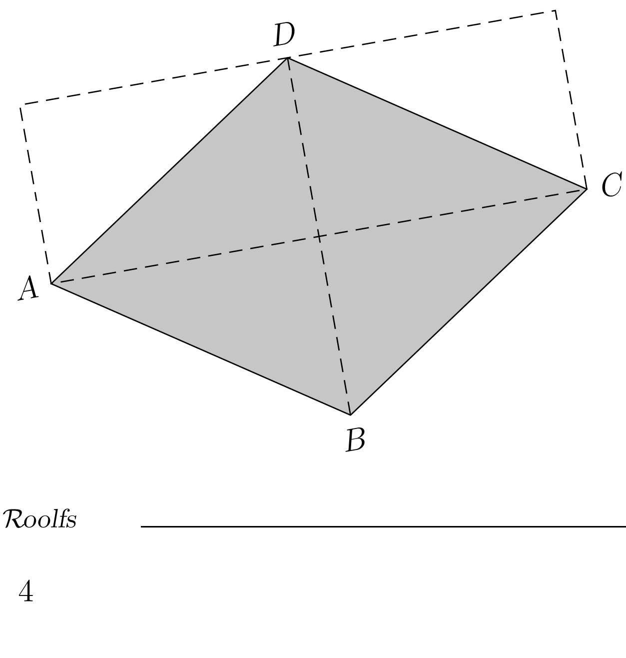
$$A = \frac{(a+b)\cdot h}{2} = \frac{a+b}{2}\cdot h$$

$$A_{\text{Parallelogramm (Raute)}} = |\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\,|$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}\,|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,|$$

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2}\,|\big(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\big) \times \overrightarrow{AD}\,|$$

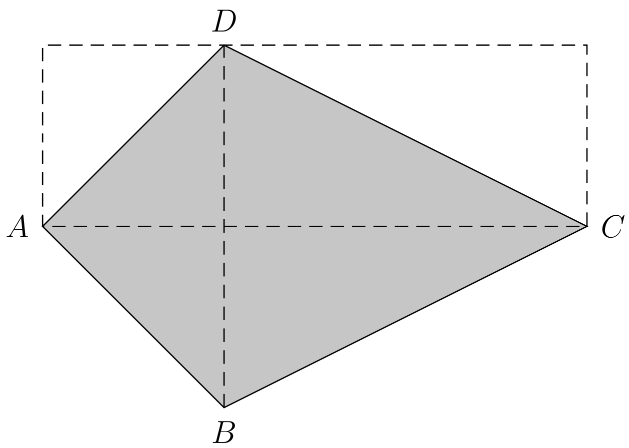
$$A_{\text{Raute}} = \frac{1}{2}\,|\,\overrightarrow{AC}\,| \cdot |\,\overrightarrow{BD}\,|$$



Ebene Figuren

gleichschenkliges Dreieck	Mindestens zwei Seiten sind gleich lang.
gleichseitiges Dreieck	Alle drei Seiten sind gleich lang.
Parallelogramm	Gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel.
Trapez	Mindestens zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.
Raute	Alle vier Seiten sind gleich lang.
Drachenviereck	Mindestens eine Diagonale ist Symmetrieachse.

$$A_{\text{Drachenviereck}} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|$$



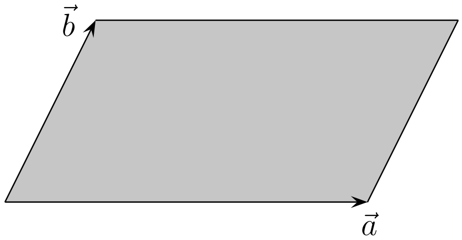
Kreis

Umfang: $U = 2\pi \cdot r = \pi \cdot d$

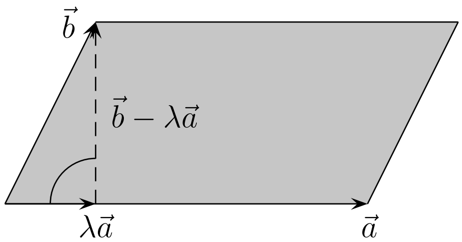
Flächeninhalt: $A = \pi \cdot r^2$

Vektorprodukt und Parallelogrammfläche

Erläutere das Folgende.



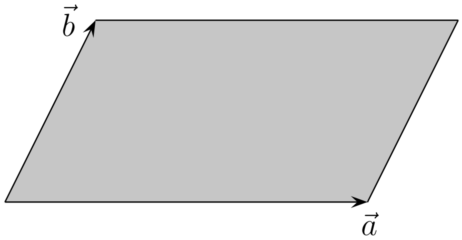
$$\begin{aligned} (\vec{b} - \lambda\vec{a}) \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Longrightarrow \qquad \lambda &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a}^2} \end{aligned}$$



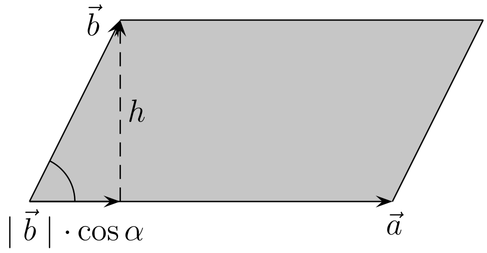
$$\begin{aligned} A_{\text{Parallelogramm}} &= |\,\vec{b} - \lambda\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{a}\,| \\ A^2_{\text{Parallelogramm}} &= \left(\vec{b} - \lambda\vec{a}\right)^2 \cdot \vec{a}^2 \\ &= \ldots \quad \text{Klammern auflösen, zusammenfassen} \\ &= \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= \ldots \quad \text{Klammern auflösen, umordnen} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 \\ \Longrightarrow \qquad A_{\text{Parallelogramm}} &= |\,\vec{a} \times \vec{b}\,| \end{aligned}$$

Vektorprodukt und Parallelogrammfläche

Erläutere das Folgende.



$$h \;=\; \sqrt{|\,\vec{b}\,|^2 - |\,\vec{b}\,|^2 \cdot (\cos\alpha)^2}$$



$$\begin{aligned}
A_{\text{Parallelogramm}} &= |\,\vec{a}\,|\,\sqrt{|\,\vec{b}\,|^2 - |\,\vec{b}\,|^2 \cdot (\cos\alpha)^2} \\
A^2_{\text{Parallelogramm}} &= |\,\vec{a}\,|^2 \cdot |\,\vec{b}\,|^2 - |\,\vec{a}\,|^2 \cdot |\,\vec{b}\,|^2 \cdot (\cos\alpha)^2 \\
&= \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= \ldots \quad \text{Klammern auflösen, umordnen} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= \left(\vec{a}\times\vec{b}\,\right)^2 \\
\Longrightarrow \quad A_{\text{Parallelogramm}} &= |\,\vec{a}\times\vec{b}\,|
\end{aligned}$$