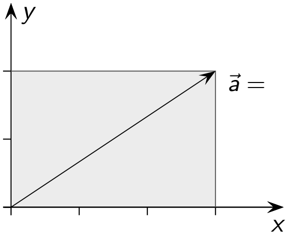
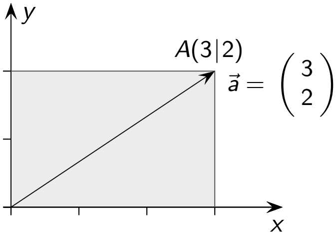
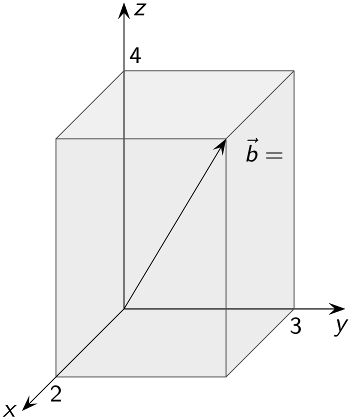
# Vektoren

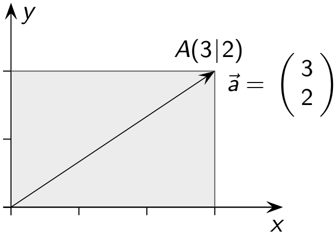
groolfs.de

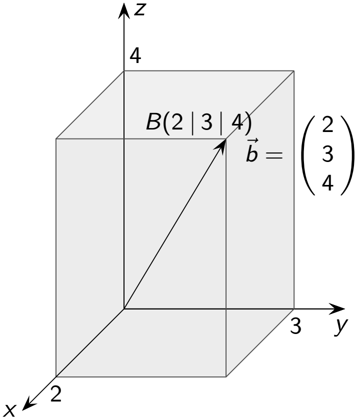



$\vec{a} =$

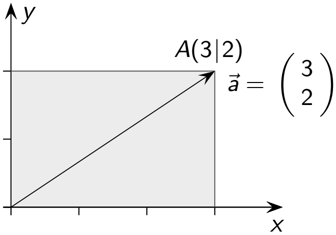

y
A(3|2)
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
x

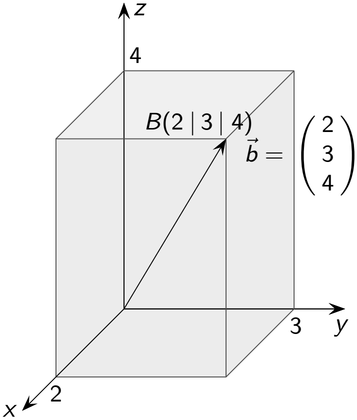

z
4
$\vec{b} =$
3
y
2
x



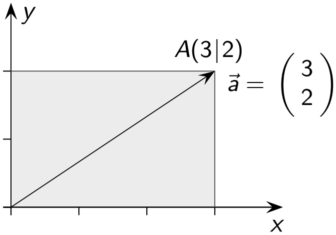



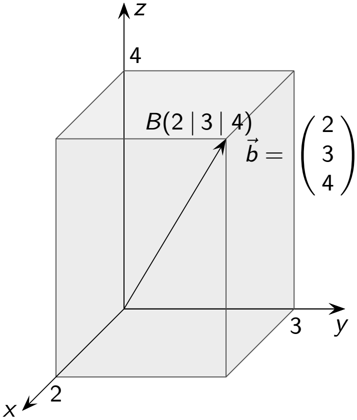

Jeder Vektor legt einen Punkt in der Ebene oder im Raum fest.



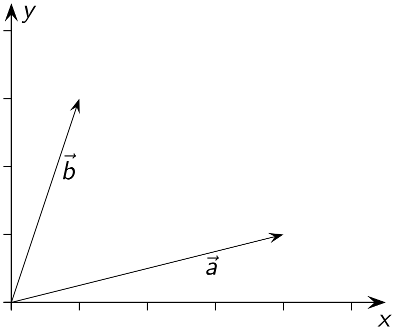




Jeder Vektor legt einen Punkt in der Ebene oder im Raum fest.
Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einem Ortsvektor.

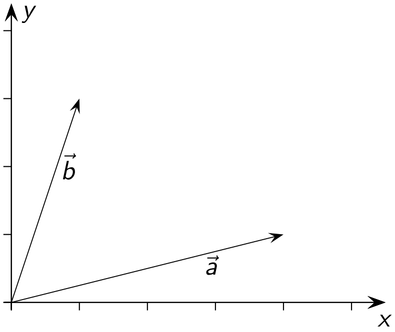


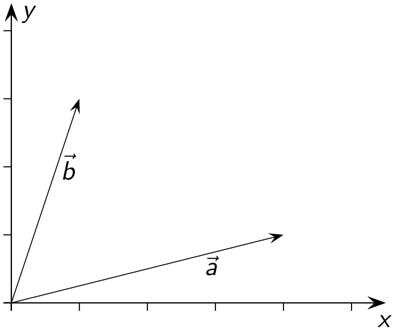

Jeder Vektor legt einen Punkt in der Ebene oder im Raum fest.
Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einem Ortsvektor.
Jeder Vektor beschreibt auch eine Richtung.



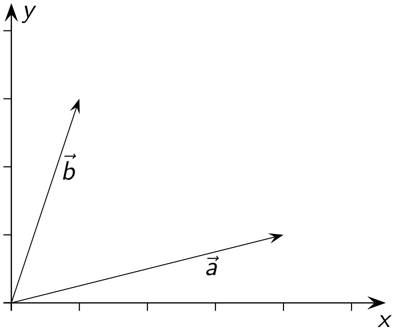

$$\vec{a}+\vec{b}=$$



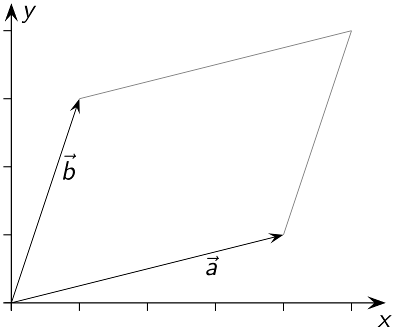

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$



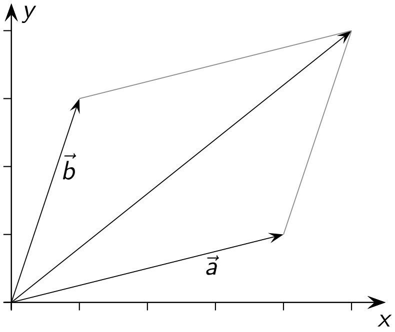

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} =$$



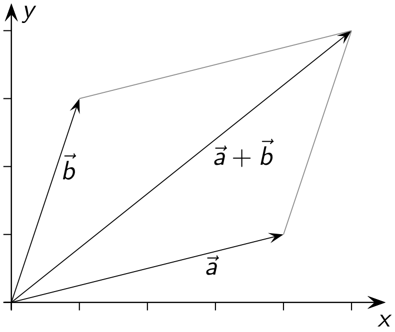

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$



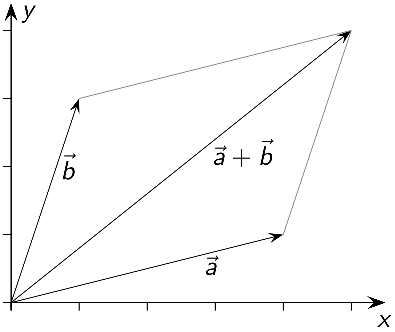

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$




$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

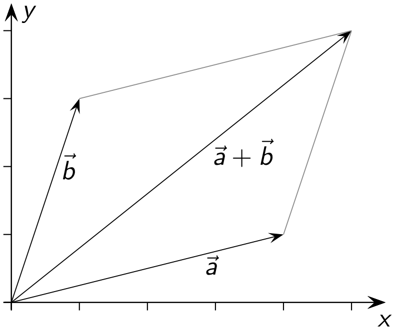



$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$



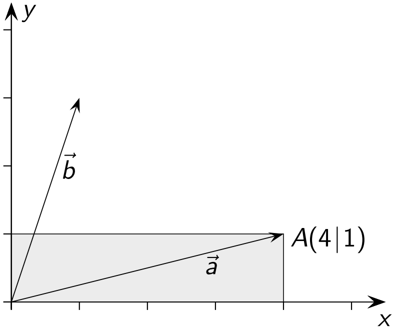

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

Bei der Addition erhalten wir die Eckpunkte eines

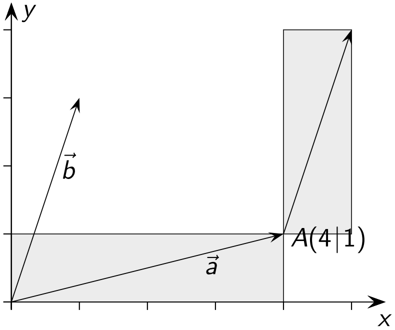



$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

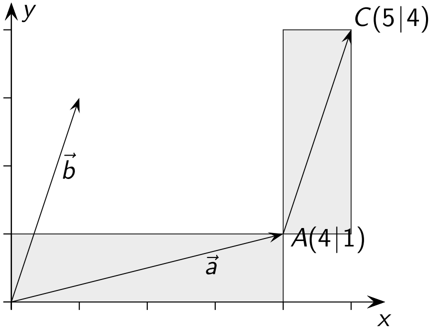
Bei der Addition erhalten wir die Eckpunkte eines Parallelogramms.



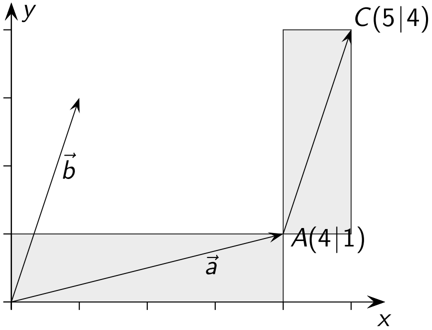

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$




$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

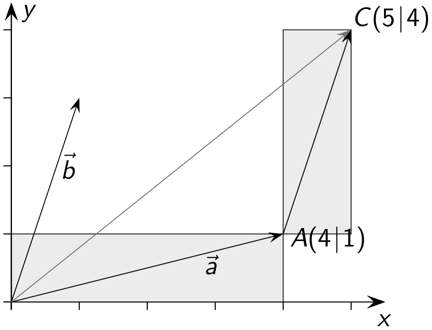



$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$



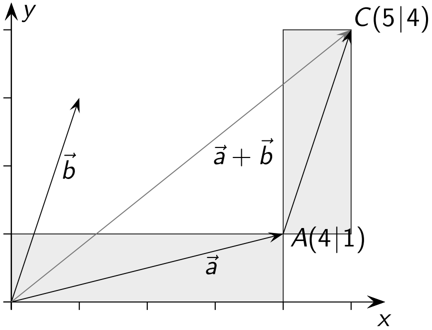

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\color{blue}{1}\\\color{blue}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+\color{blue}{1}\\1+\color{blue}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

Der angehängte Pfeil verdeutlicht,



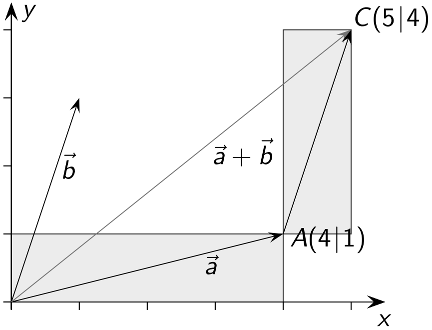

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der angehängte Pfeil verdeutlicht, dass bei der Addition von einem Vektor $\vec{a}$ (Ortsvektor) ausgegangen werden kann



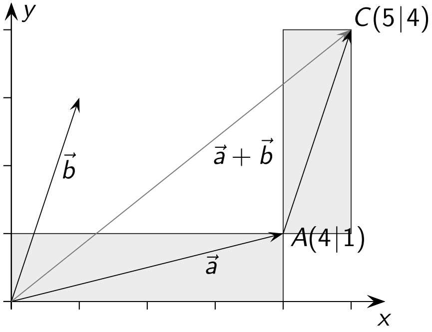

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\color{blue}{1}\\\color{blue}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+\color{blue}{1}\\1+\color{blue}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

Der angehängte Pfeil verdeutlicht, dass bei der Addition von einem Vektor $\vec{a}$ (Ortsvektor) ausgegangen werden kann  und der andere Vektor



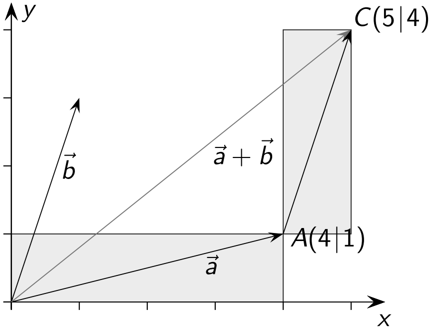

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

Der angehängte Pfeil verdeutlicht, dass bei der Addition von einem Vektor $\vec{a}$ (Ortsvektor) ausgegangen werden kann und der andere Vektor die Koordinatenänderungen angibt,



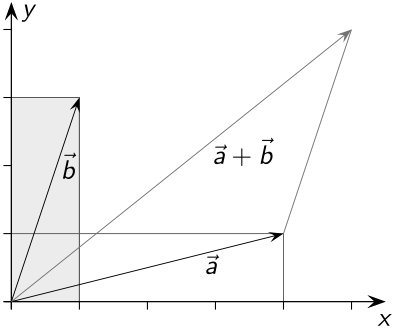

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\color{blue}{1}\\\color{blue}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+\color{blue}{1}\\1+\color{blue}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

Der angehängte Pfeil verdeutlicht, dass bei der Addition von einem Vektor $\vec{a}$ (Ortsvektor) ausgegangen werden kann und der andere Vektor die Koordinatenänderungen angibt, um von $A$ nach $C$ zu gelangen (Verschiebungsvektor $\vec{b}$).

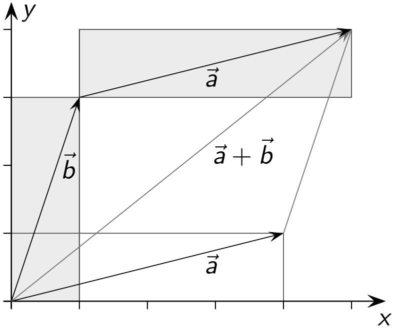



$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1\\1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

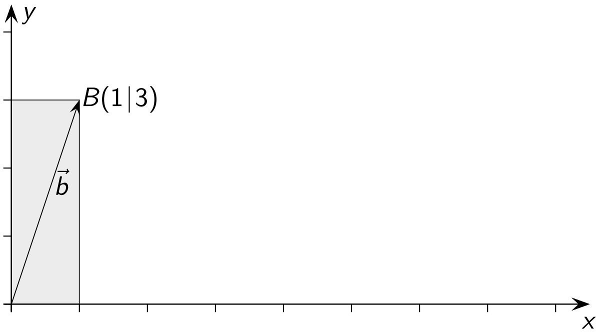
Der angehängte Pfeil verdeutlicht, dass bei der Addition von einem Vektor $\vec{a}$ (Ortsvektor) ausgegangen werden kann und der andere Vektor die Koordinatenänderungen angibt, um von $A$ nach $C$ zu gelangen (Verschiebungsvektor $\vec{b}$). Gleiches Ergebnis: Ortsvektor $\vec{b}$, Verschiebungsvektor $\vec{a}$



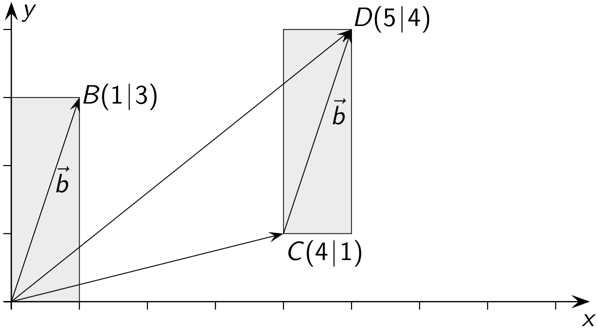

Ortsvektor $\vec{b}$, Verschiebungsvektor $\vec{a}$

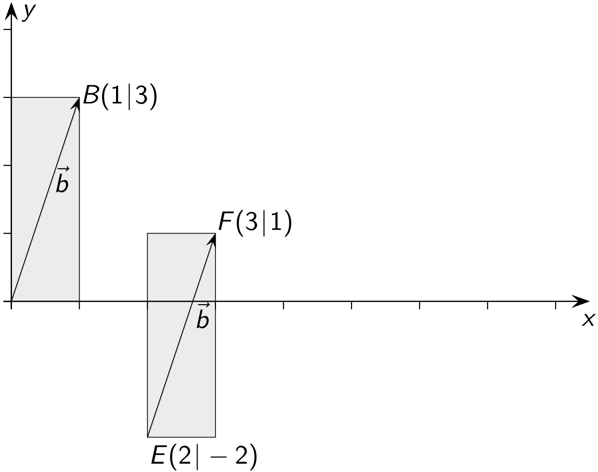



Ortsvektor $\vec{b}$, Verschiebungsvektor $\vec{a}$

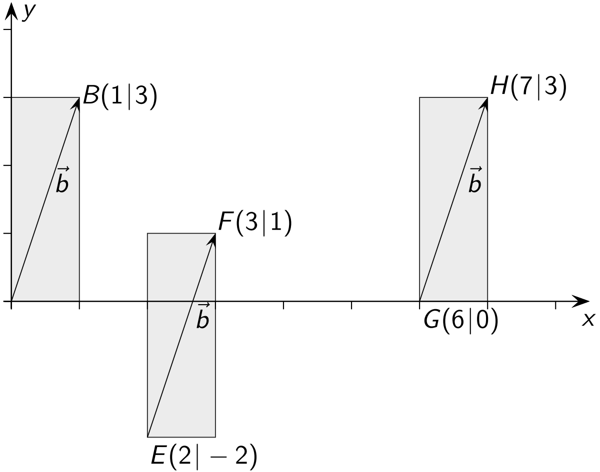


$y$
$B(1|3)$
$\vec{b}$
$x$

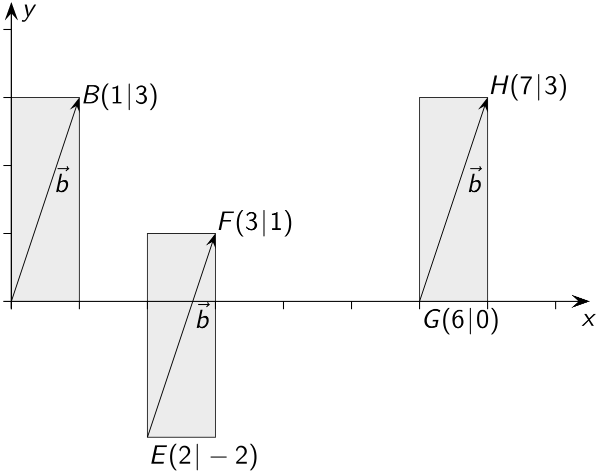

y
D(5|4)
B(1|3)
$\vec{b}$
$\vec{b}$
C(4|1)
x



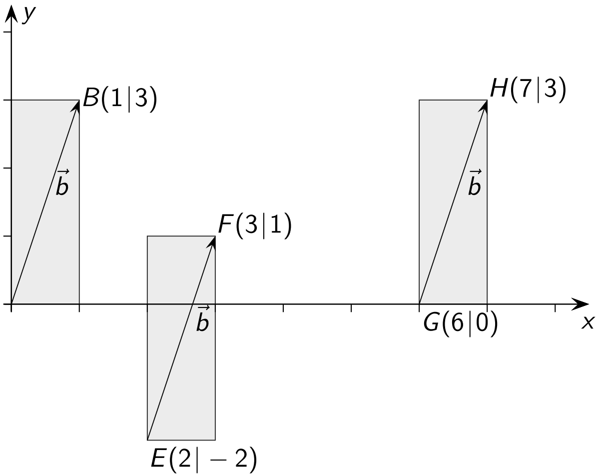
y
B(1|3)
$\vec{b}$
F(3|1)
$\vec{b}$
x
E(2| − 2)



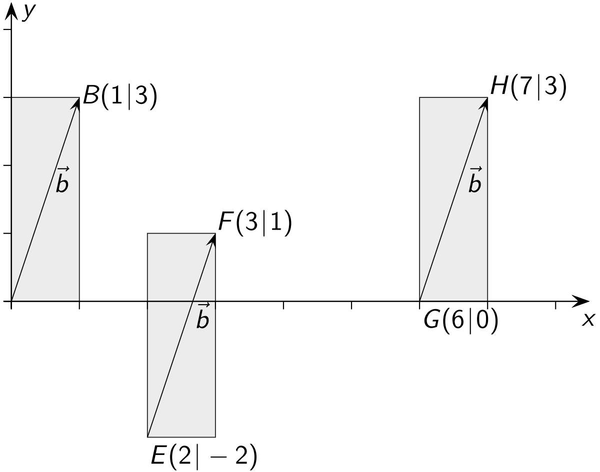
y
x
B(1|3)
F(3|1)
H(7|3)
G(6|0)
E(2| − 2)
b
b
b



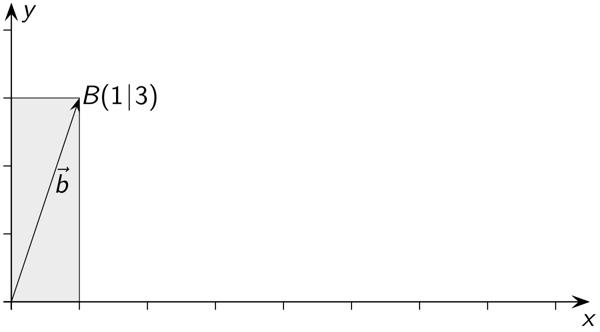

Zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gehört als Ortsvektor der Endpunkt




Zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gehört als Ortsvektor der Endpunkt $B(1|3)$.

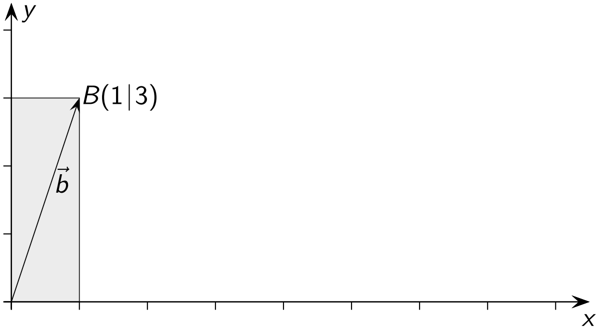



Zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ gehört als Ortsvektor der Endpunkt $B(1|3)$. Gleichzeitig ist mit $\vec{b}$ eine Richtung (Verschiebung) gegeben, die durch jeweils 2 Punkte festgelegt ist.




Welcher Aspekt (Punkt- oder Richtungsangabe) gemeint ist, geht aus der Anwendung hervor.
Der Aspekt kann durch die Schreibweise hervorgehoben werden, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ als Ortsvektor

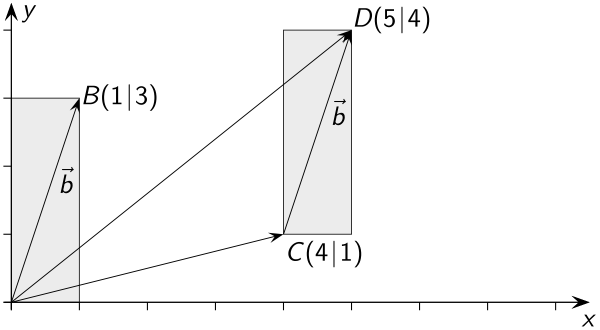
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



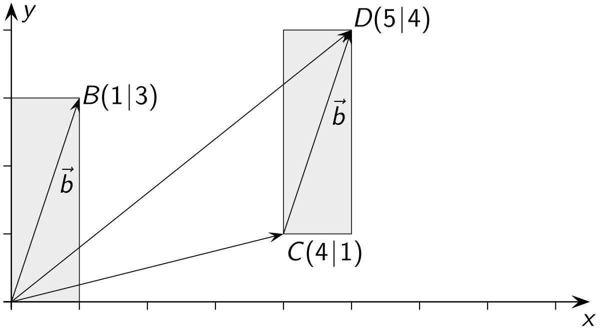

Welcher Aspekt (Punkt- oder Richtungsangabe) gemeint ist, geht aus der Anwendung hervor.
Der Aspekt kann durch die Schreibweise hervorgehoben werden, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ als Ortsvektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

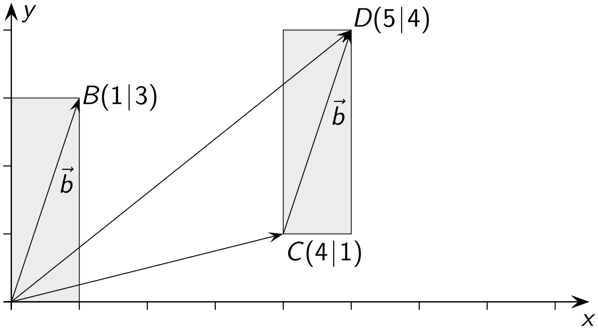
Ursprung $O$, lat. origo, engl. origin




oder als Richtungs- oder Verbindungsvektor: $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} =$

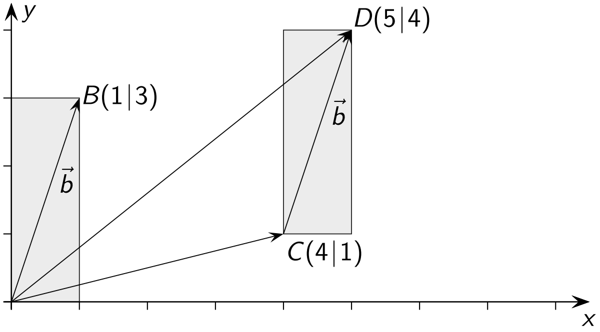



oder als Richtungs- oder Verbindungsvektor: $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ weil



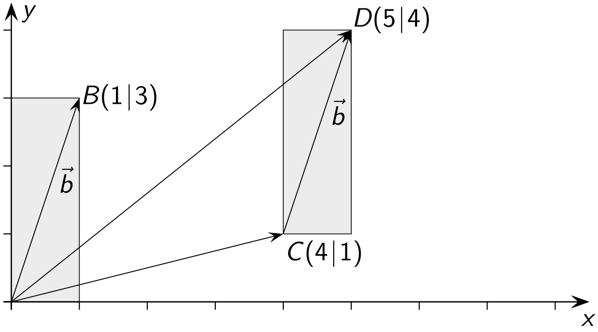

oder als Richtungs- oder Verbindungsvektor: $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ weil $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$

$\vec{b} =$




oder als Richtungs- oder Verbindungsvektor: $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ weil $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$

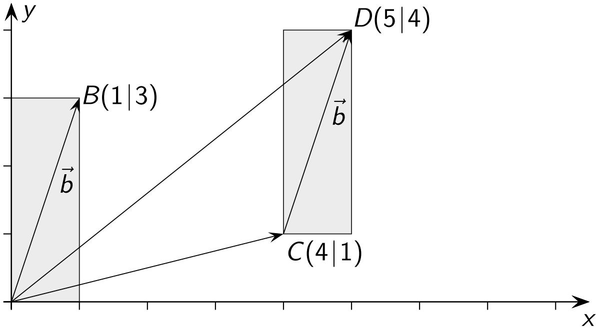
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$




oder als Richtungs- oder Verbindungsvektor: $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ weil $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

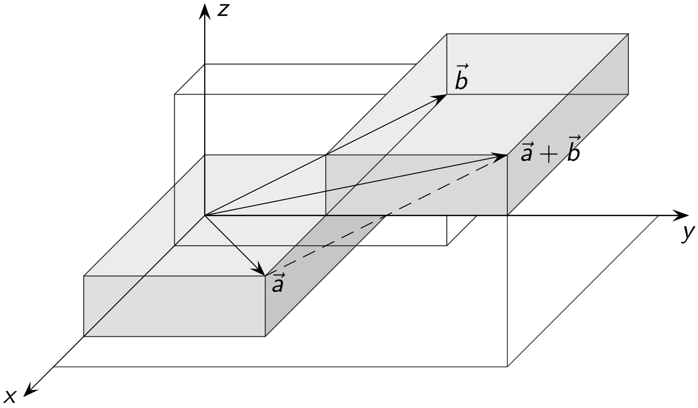
„Spitze minus Fuß“

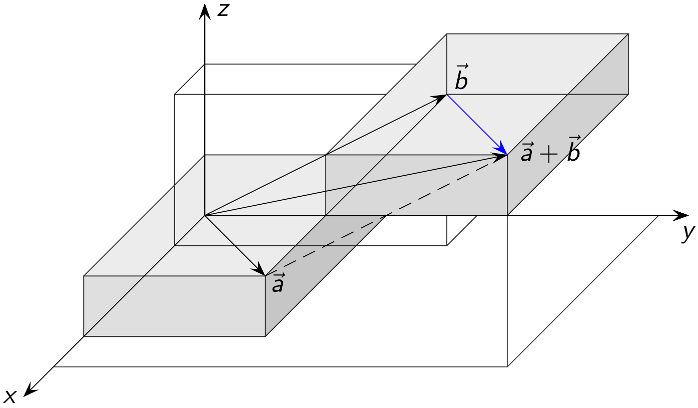



oder als Richtungs- oder Verbindungsvektor: $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ weil $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$

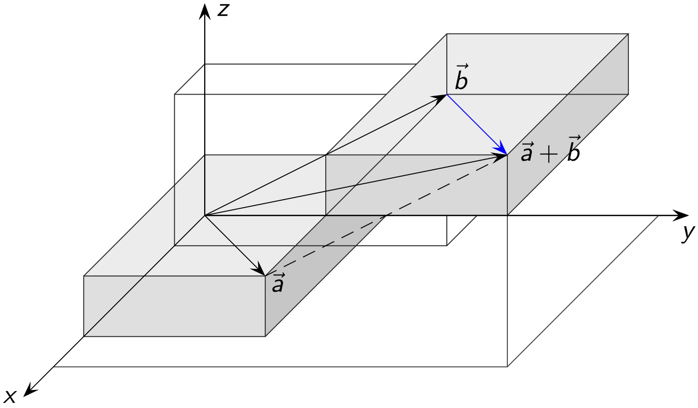
$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ „Spitze minus Fuß“

Salopp formuliert: „Ein Vektor ist die Differenz zweier Punkte.“ (genauer: Koordinatendifferenz)

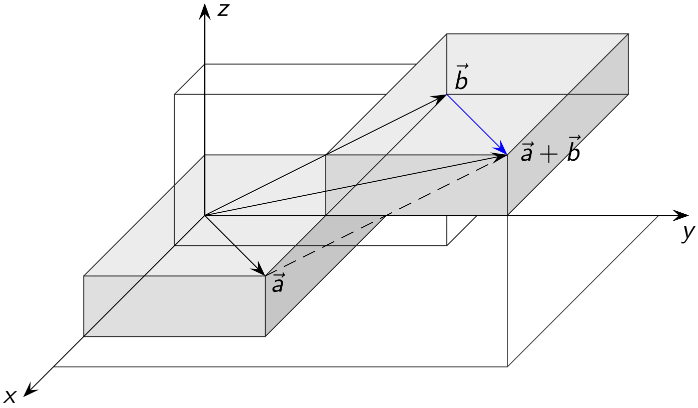

$z$
$\vec{b}$
$\vec{a}+\vec{b}$
$y$
$\vec{a}$
$x$



z
$\vec{b}$
$\vec{a}+\vec{b}$
y
$\vec{a}$
x




Bei der Addition kann ein Vektor als Verschiebungsvektor (Verbindungsvektor) an den anderen drangehängt werden.




Bei der Addition kann ein Vektor als Verschiebungsvektor (Verbindungsvektor) an den anderen drangehängt werden. Somit liegt auch im Raum ein Parallelogramm vor.

Die Gerade $g$ verläuft durch die Punkte $A(-2 \mid 2)$ und $B(2 \mid 4)$.
Wie lautet die vektorielle Geradengleichung?

Die Gerade $g$ verläuft durch die Punkte $A(-2 \mid 2)$ und $B(2 \mid 4)$.
Wie lautet die vektorielle Geradengleichung?

Der Verlauf der Geraden kann durch den

Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, der zum Punkt $A$ führt,

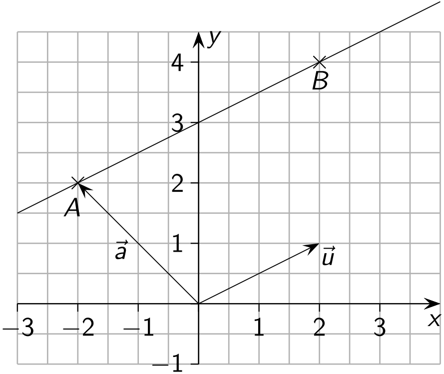
und

Die Gerade $g$ verläuft durch die Punkte $A(-2 \mid 2)$ und $B(2 \mid 4)$.
Wie lautet die vektorielle Geradengleichung?

Der Verlauf der Geraden kann durch den

Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, der zum Punkt $A$ führt,

und den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ festgelegt werden.



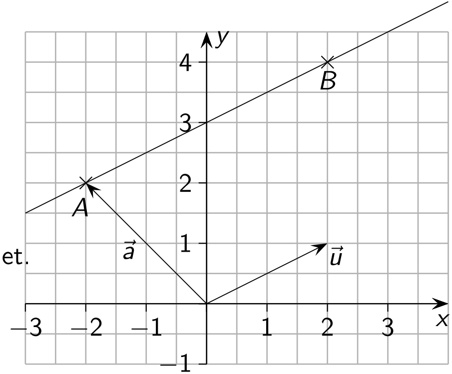
Die Gerade $g$ verläuft durch die Punkte $A(-2\,|\,2)$ und $B(2\,|\,4)$.
Wie lautet die vektorielle Geradengleichung?

Der Verlauf der Geraden kann durch den

Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, der zum Punkt $A$ führt,

und den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ festgelegt werden.

Als Richtungsvektor wäre auch ein Vielfaches von $\vec{u}$ geeignet.
Jeder Vektor, der zu einem Geradenpunkt führt,
kann als Stützvektor dienen.

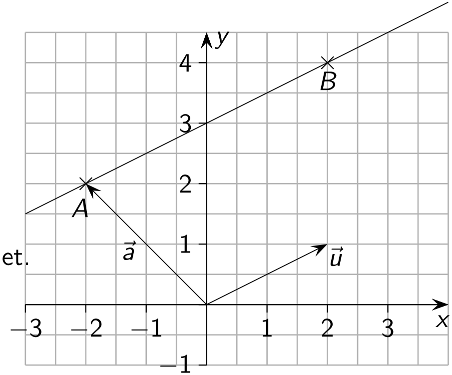


Die Gerade $g$ verläuft durch die Punkte $A(-2\,|\,2)$ und $B(2\,|\,4)$.
Wie lautet die vektorielle Geradengleichung?

Der Verlauf der Geraden kann durch den

Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, der zum Punkt $A$ führt,

und den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ festgelegt werden.

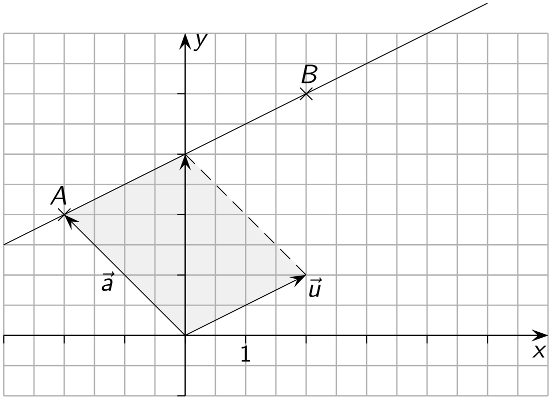



Als Richtungsvektor wäre auch ein Vielfaches von $\vec{u}$ geeignet.
Jeder Vektor, der zu einem Geradenpunkt führt, kann als Stützvektor dienen.

Wie erhalten wir nun mit $\vec{a}$ und $\vec{u}$ die Gesamtheit aller Vektoren, die zu Punkten auf der Geraden führen?

Auf je einen Punkt der Geraden weisen die Vektoren:

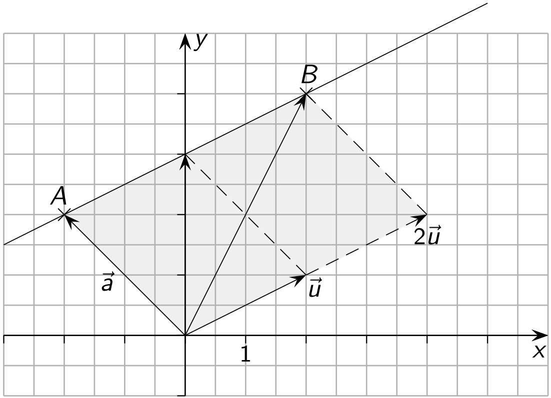
$$\vec{a} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Auf je einen Punkt der Geraden weisen die Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

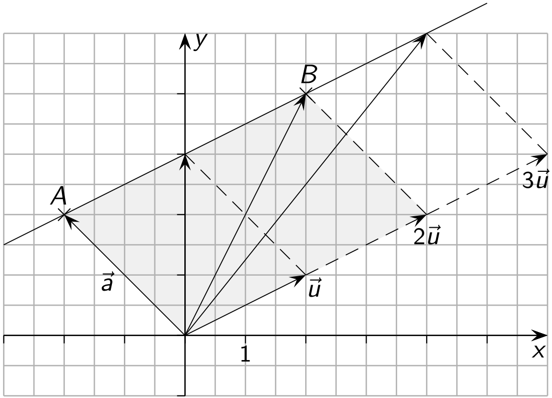


Auf je einen Punkt der Geraden weisen die Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 3\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$



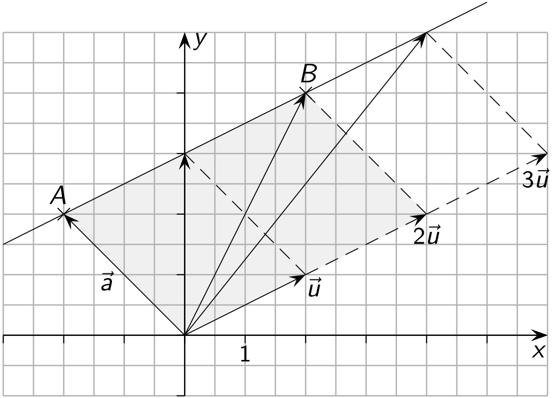
Auf je einen Punkt der Geraden weisen die Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 3\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



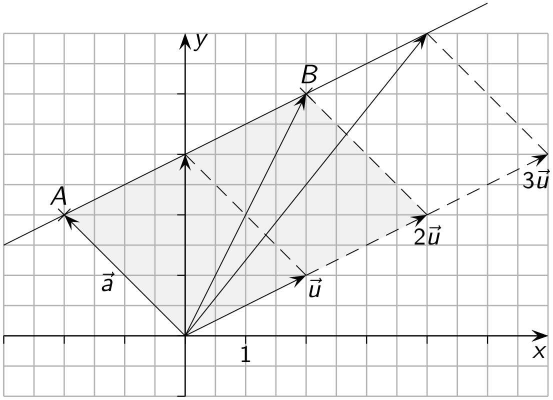
Auf je einen Punkt der Geraden weisen die Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 3\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$




Die *Geradengleichung* lautet daher: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ und für unser Beispiel:

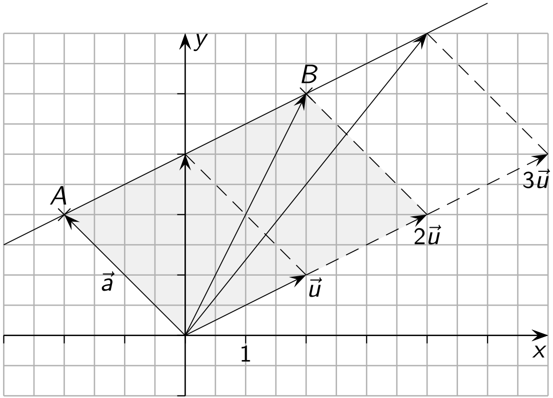
Auf je einen Punkt der Geraden weisen die Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 3\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$




Die *Geradengleichung* lautet daher: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ und für unser Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

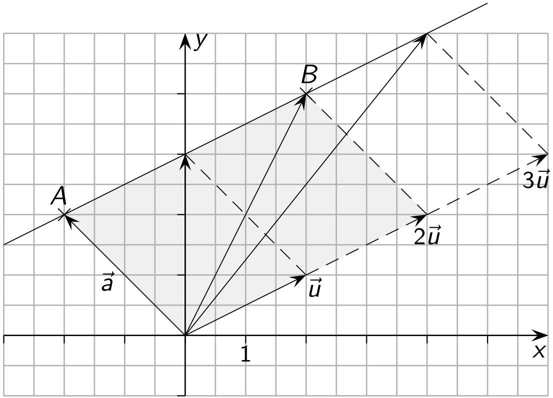
Auf je einen Punkt der Geraden weisen die Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 3\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

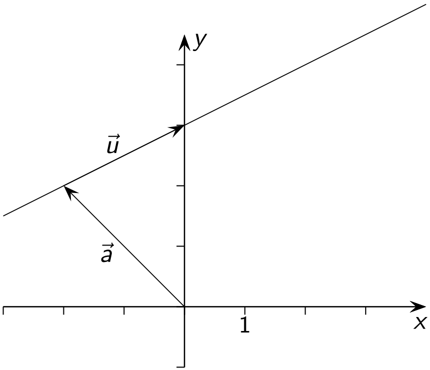



Die *Geradengleichung* lautet daher: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ und für unser Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für jeden $\lambda$-Wert ergibt sich ein Vektor $\vec{x}$, der zu einem Punkt auf der Geraden führt.

Der besseren Anschauung halber verschieben wir den Richtungspfeil parallel, so dass sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt.

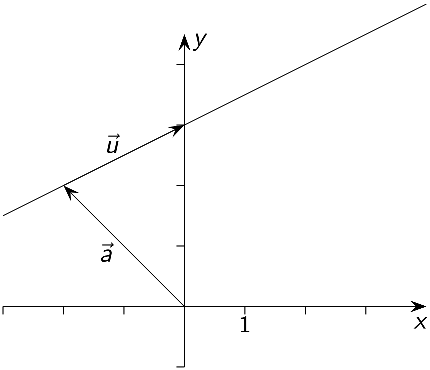
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Der besseren Anschauung halber verschieben wir den Richtungspfeil parallel, so dass sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

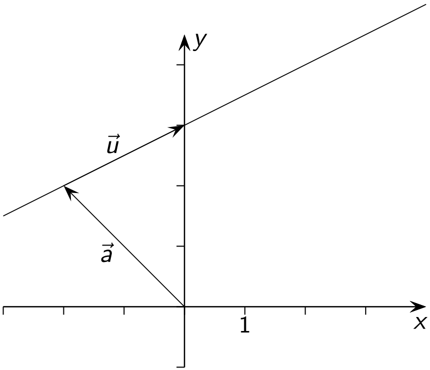
Für jeden $\lambda$-Wert ergibt sich ein Vektor $\vec{x}$, der zu einem Punkt $P$ auf der Geraden führt, $P(-2 + 2\lambda \mid 2 + \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$.



Der besseren Anschauung halber verschieben wir den Richtungspfeil parallel, so dass sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für jeden $\lambda$-Wert ergibt sich ein Vektor $\vec{x}$, der zu einem Punkt $P$ auf der Geraden führt, $P(-2+2\lambda \,|\, 2+\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$.




Der Vektor $\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ enthält die Koordinatenänderungen des Ortsvektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.