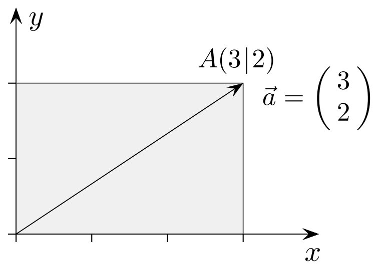
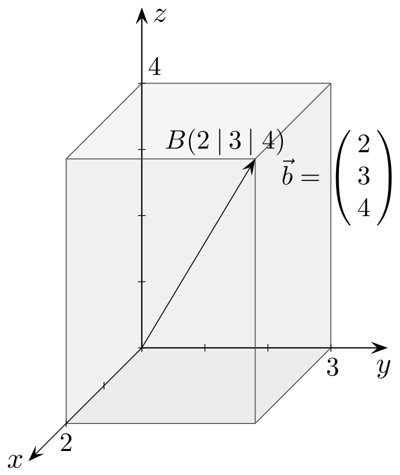
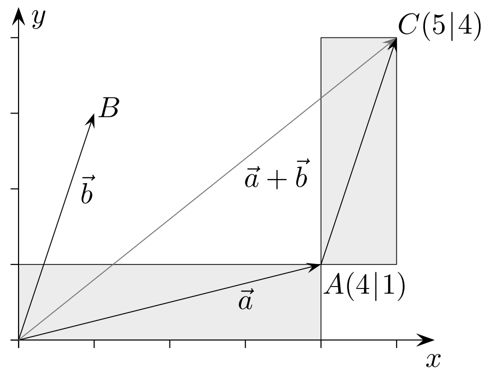
1. Vektorrechnung, kurze Einführung
2. Richtungsvektor
3. Vereinfachte Sprechweise
4. Anschauliches
5. Ortsvektor/Richtungsvektor
6. Geschlossene Vektorkette
7. Geradengleichung
8. Betrag eines Vektors
9. Mittelpunkt einer Strecke
10. Ebenengleichung
11. Skalarprodukt

↑ Vektorrechnung, kurze Einführung





Jeder Vektor legt einen Punkt in der Ebene oder im Raum fest.
Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einem Ortsvektor.
Jeder Vektor beschreibt überdies eine Richtung.



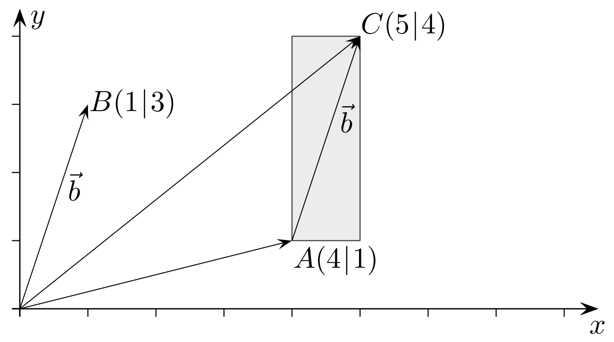
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der an A angehängte Pfeil verdeutlicht, dass bei der Addition von einem Vektor $\vec{a}$ (Ortsvektor) ausgegangen werden kann und der andere Vektor die Komponentenänderungen angibt, um von A nach C zu gelangen (Richtungs- oder Verschiebungsvektor $\vec{b}$).

Welche Eigenschaft (Punkt- oder Richtungsangabe) gemeint ist, geht aus der Anwendung hervor.
Der Aspekt kann durch die Schreibweise hervorgehoben werden, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ als Ortsvektor,
$\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektor.

$\uparrow$ Richtungsvektor

Eine Richtung sei durch die 2 Punkte A und C festgelegt.
Wie lautet der Richtungsvektor $\overrightarrow{AC}$?



In einfachen Fällen kann der Richtungsvektor (Differenzvektor) unmittelbar abgelesen werden, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Andererseits gilt für $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$: $\quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ weil $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ ist.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Merke: „Spitze minus Fuß“

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

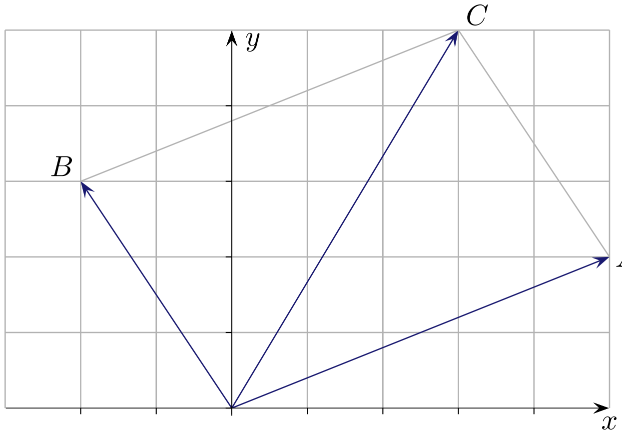
Die Richtung von $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
Ein Schritt in x-Achsenrichtung, drei Schritte in y-Achsenrichtung.

↑ Vereinfachte Sprechweise

Wir unterscheiden Vektoren der Ebene, z. B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und des Raumes, z. B. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ein Pfeil, der vom Ursprung ausgeht und damit einen Punkt festlegt, bezeichnen wir vereinfacht als Ortsvektor und ein Pfeil, der zwei Punkte verbindet und damit eine Richtung festlegt, als Verbindungs- oder Verschiebungsvektor.

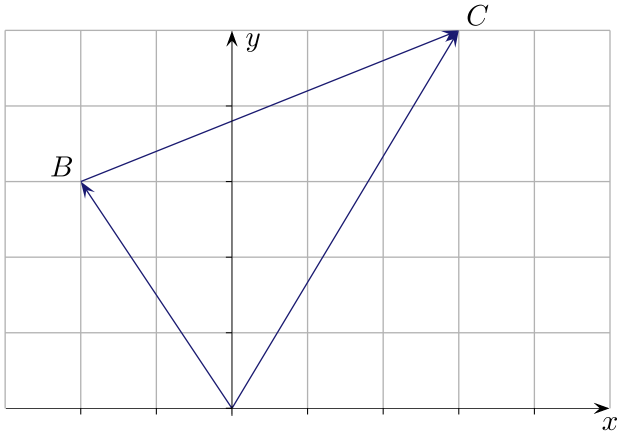
a) Ortsvektoren



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

b) zwei Ortsvektoren und ein Verbindungsvektor (Verschiebungsvektor)



$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\vec{B} + \overrightarrow{BC} = \vec{C}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

„Spitze minus Fuß“

Zur Addition wird bei Pfeilen mit gleichem Anfangspunkt ein Parallelogramm gebildet oder der eine Pfeil wird an den anderen drangehängt.

↑ Anschauliches

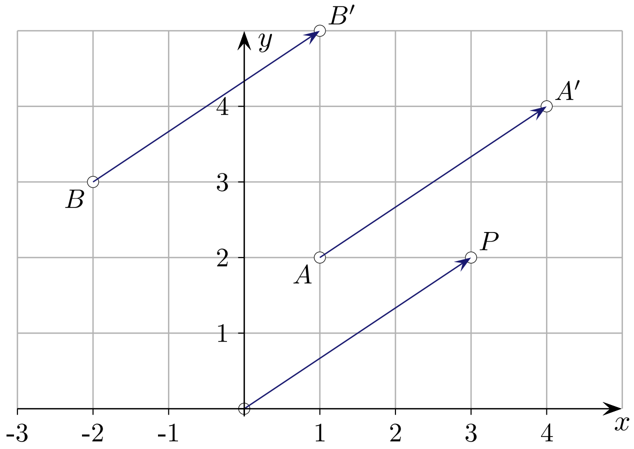
Welche Anschauung verbinden wir mit einem Vektor, z. B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Die Richtung ist gegeben durch:
Drei Schritte in x-Achsenrichtung, zwei Schritte in y-Achsenrichtung.
Die Veranschaulichung wird durch den Anwendungskontext nahegelegt.

1) Ortsvektor
Den Vektor $\vec{a}$ betrachten wir als Ortsvektor, der vom Ursprung ausgeht und damit einen Punkt $P(3 \mid 2)$ festlegt.

2) Richtungs- oder Verschiebungsvektor
Denken wir uns irgendeinen Punkt in der Ebene, z. B. $A(1 \mid 2)$. Durch $\vec{a}$ ist ein Punkt A' festgelegt, dessen Koordinaten wir durch Addition der Vektorkomponenten erhalten, $A'(1+3 \mid 2+2)$, kurz

$$\overrightarrow{OA} + \vec{a} = \overrightarrow{OA'}$$
$$\vec{A} + \vec{a} = \vec{A'}$$



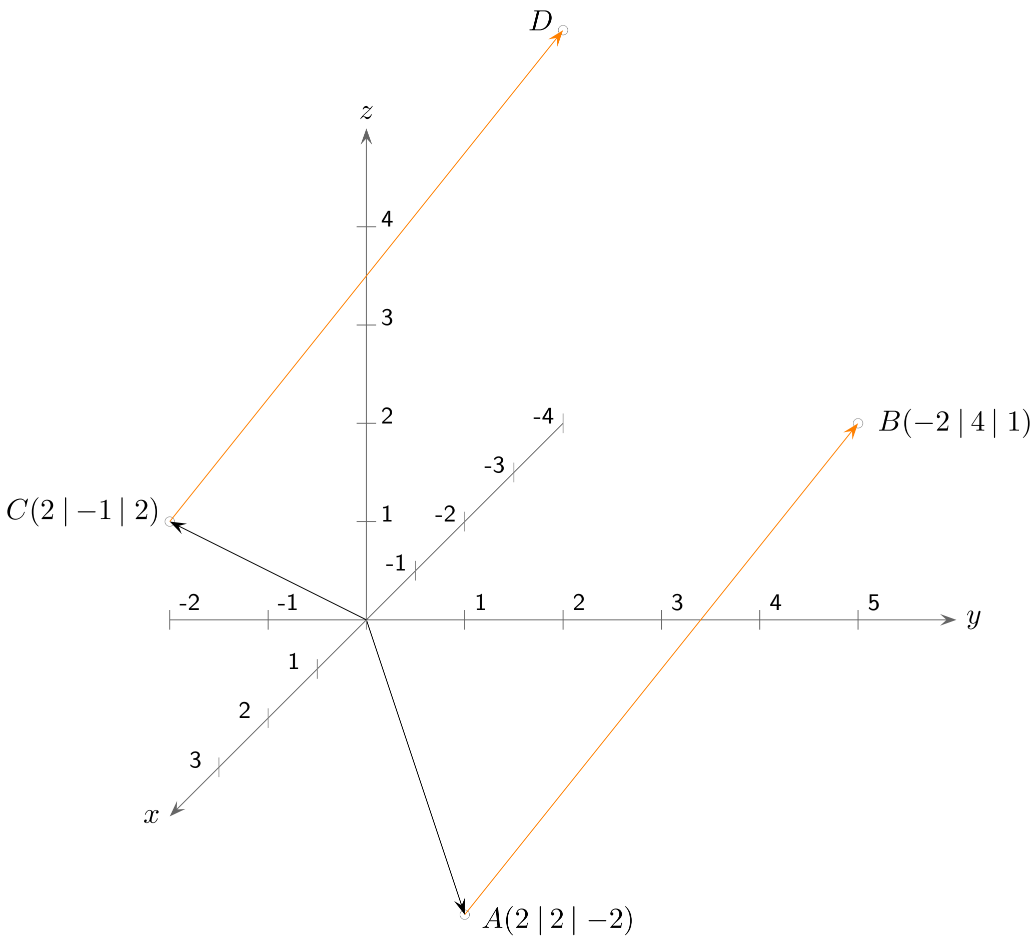
Sei $B(-2 \mid 3)$ gegeben. Durch $\vec{a}$ ist dann der Punkt $B'(-2+3 \mid 3+2)$ festgelegt.

$$\overrightarrow{OB} + \vec{a} = \overrightarrow{OB'}$$
$$\vec{B} + \vec{a} = \vec{B'}$$

Als Probe dient:

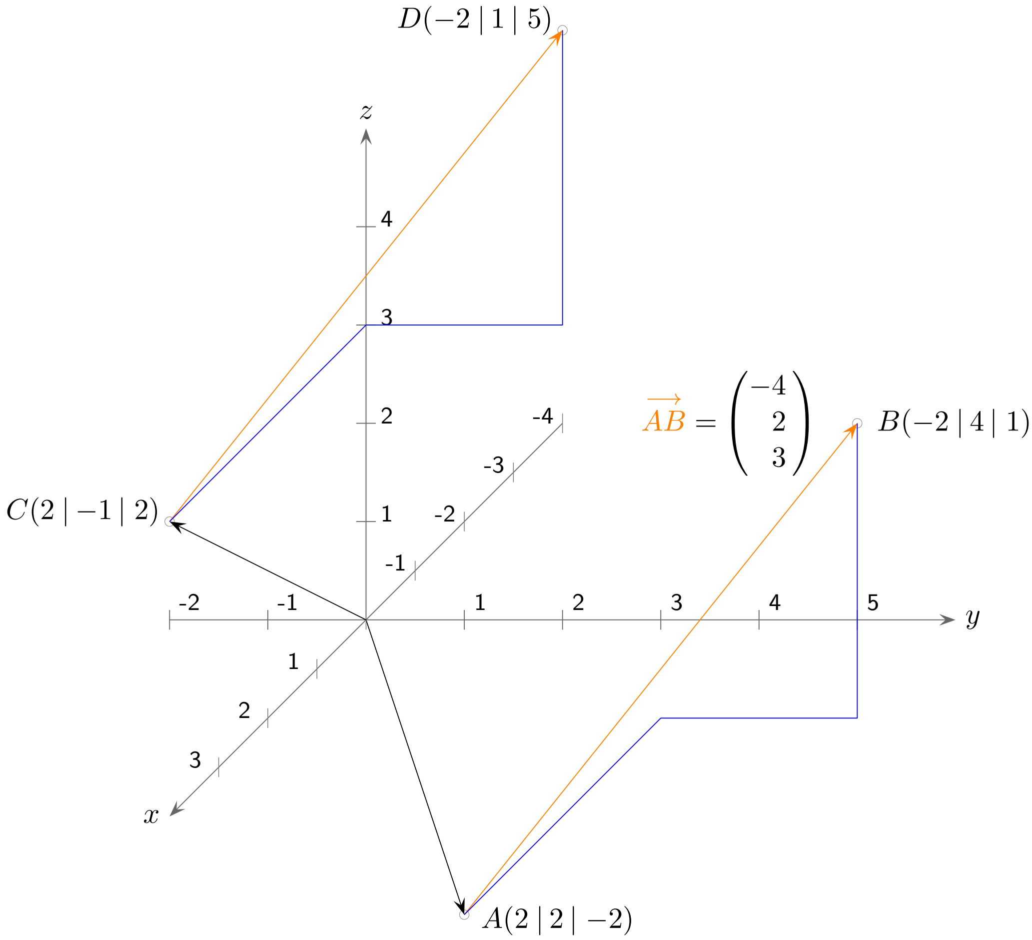
$$\vec{a} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}$$
$$\vec{a} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}$$

↑ Ortsvektor/Richtungsvektor



Die orangen Pfeile haben gleiche Richtung und gleiche Länge.
Wie lauten die Koordinaten von D?

↑ Ortsvektor/Richtungsvektor



Zu jedem geordneten Punktepaar (A, B) (grafisch ein Pfeil),
kann der Differenzvektor (Richtungsvektor) gebildet werden:

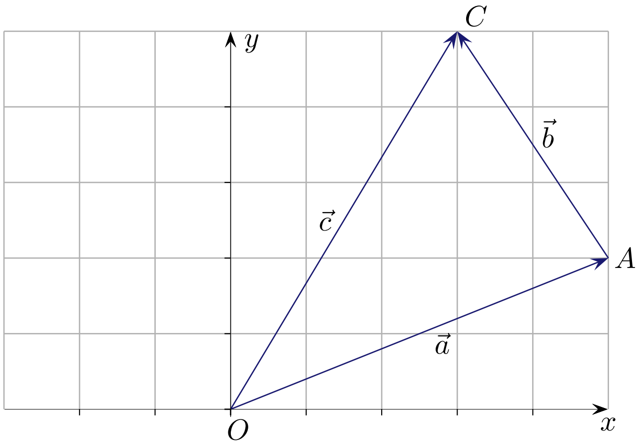
$A(a_1\,|\,a_2\,|\,a_3),\;\; B(b_1\,|\,b_2\,|\,b_3)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Der Vektor enthält die Komponentenänderungen, um von A nach B zu gelangen,
und die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

Der Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ wird hier an den Ortsvektor $\overrightarrow{OC}$
angehängt. Das ergibt den Ortsvektor von Punkt D.

↑ Geschlossene Vektorkette



Es gilt:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{c} \\ \vec{b} &= \vec{c} - \vec{a} \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \qquad \text{Differenzvektor} \end{aligned}$$

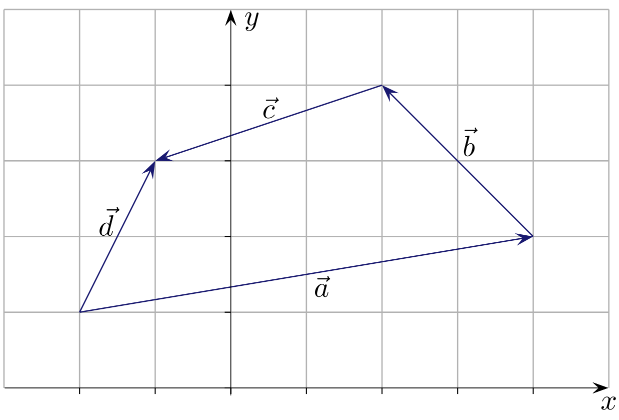
Den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AC}$ zu den Punkten A und C erhält man mit „Spitze minus Fuß“.

Dasselbe Ergebnis erhalten wir mit der folgenden Regel, die verallgemeinert werden kann.

Hier liegt eine geschlossene Vektorkette vor mit $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$,
die Richtung der Vektoren ist dabei unerheblich.

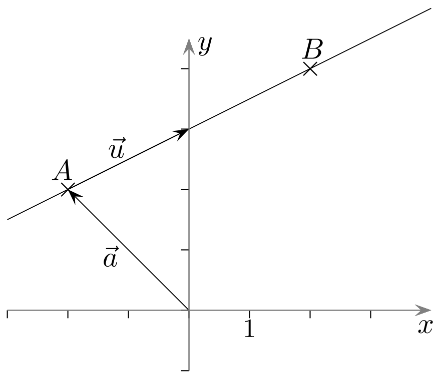
Umwegregel für eine geschlossene Vektorkette:
Der Pfeil zu $\vec{b}$ beginnt in A und endet in C.
Um von A über O nach C zu gelangen, ist der Pfeil zu $\vec{a}$ in umgekehrter Richtung und der Pfeil zu $\vec{c}$ in der angegebenen Richtung zu durchlaufen: $\vec{b} = -\vec{a} + \vec{c} \quad (= \vec{c} - \vec{a})$

Beachte: Die Berechnung des Differenzvektors mit „Spitze minus Fuß“ beginnt mit dem Ortsvektor der Spitze, der Umweg fängt am Fuß des darzustellenden Pfeils an.



$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{d} - \vec{c} - \vec{b} \\ \vec{c} &= -\vec{b} - \vec{a} + \vec{d} \\ \vec{d} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

↑ Geradengleichung



Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A\big(-2\,|\,2\big)$ und $B\big(2\,|\,4\big)$.
Wie lautet die vektorielle Geradengleichung?

Der Verlauf der Geraden kann durch den

Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, der zum Punkt A führt,

und den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (oder ein Vielfaches davon) festgelegt werden.

Auf je einen Punkt der Geraden weisen die Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 3\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die *Geradengleichung* lautet daher: $\vec{x} = \vec{a} + k\vec{u}$ und für unser Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für jeden k-Wert ergibt sich ein Vektor $\vec{x}$, der zu einem Punkt $P\big(-2 + 2k \,|\, 2 + k\big)$
auf der Geraden führt.

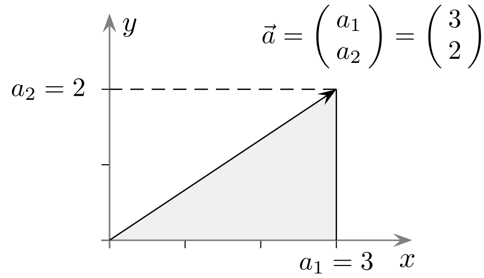
↑ Betrag eines Vektors

Die Länge $|\,\vec{a}\,|$ oder der Betrag eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

(2-dimensional) beträgt: $\quad |\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

und für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ (3-dimensional)

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

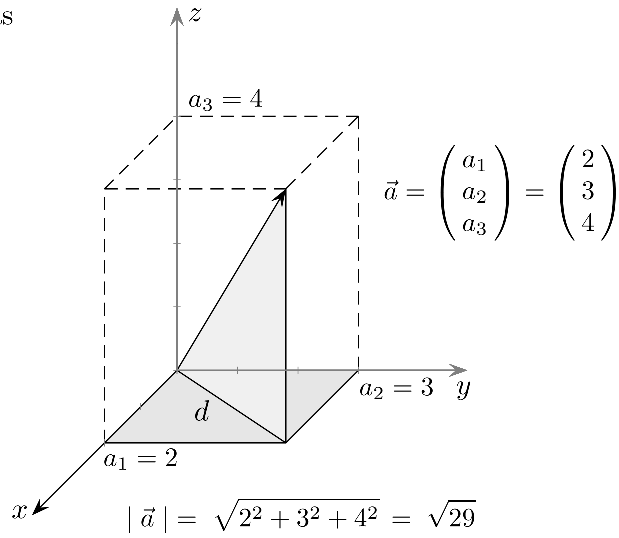


$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Dem liegt die Berechnung der Diagonale eines Rechtecks bzw. der Raumdiagonale eines Quaders zugrunde.

Um die Länge der Raumdiagonale des Quaders zu berechnen, ist als Zwischenschritt die Diagonalenlänge $d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ der Grundfläche zu ermitteln.
Bei einer erneuten Anwendung des Satzes des Pythagoras fällt die Wurzel von d beim Quadrieren fort:

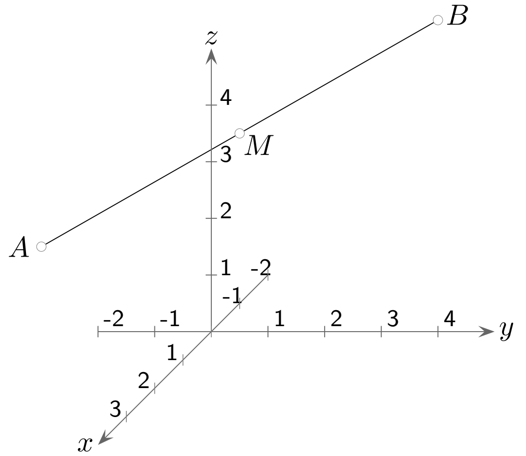
$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{d^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

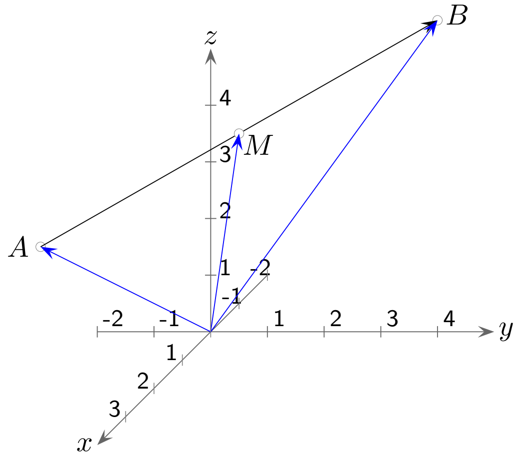


$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$

↑ Mittelpunkt einer Strecke

Bestimme den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$
mit $A(4 \mid -1 \mid 3{,}5)$ und $B(-2 \mid 3 \mid 4{,}5)$.

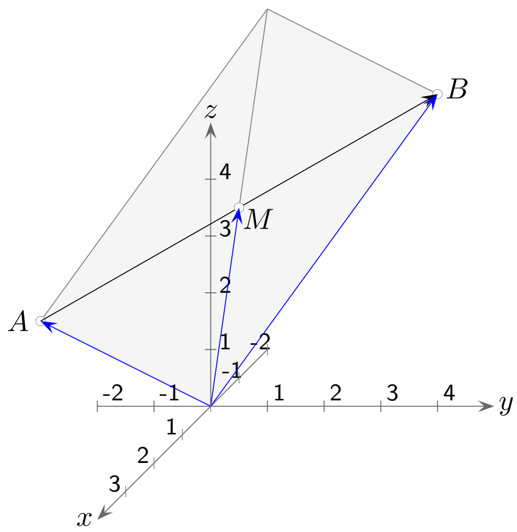




$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}, \quad M(1 \mid 1 \mid 4)$$

$$\vec{M} = \vec{A} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$$

Punktregel
Sollen die Koordinaten eines Punktes ermittelt werden, muss die Vektorsumme mindestens einen Ortsvektor als Summanden enthalten.

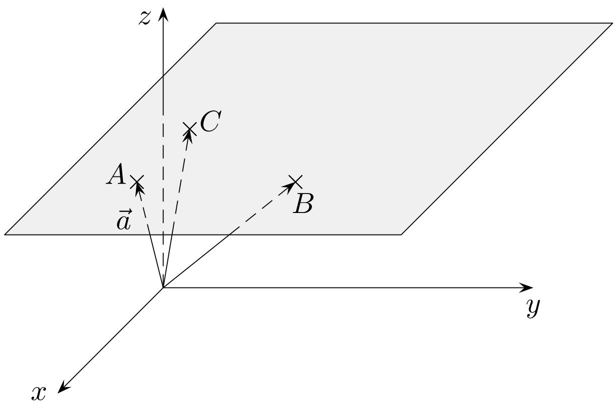


$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

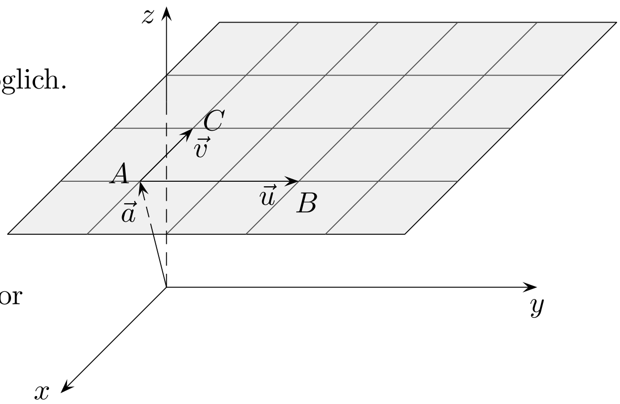
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$

↑ Ebenengleichung

Wie lautet die Gleichung der Ebene, in der die Punkte
$A(2\,|\,1\,|\,-3)$, $B(1\,|\,5\,|\,0)$ und $C(4\,|\,-1\,|\,2)$ liegen?



Die Richtung der Ebene kann durch die beiden Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ erfasst werden.
Zur Lagebestimmung ist dann nur noch ein Stützvektor, z.B. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, notwendig, $\overrightarrow{OB}$ oder $\overrightarrow{OC}$ wären auch möglich.



Damit erhalten wir die *Parameterform* der Ebenengleichung:

$$\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$$

Wenn s und t alle Zahlen durchlaufen, erreicht der Vektor $\vec{x}$ jeden Punkt der Ebene.

Für das Beispiel gilt:

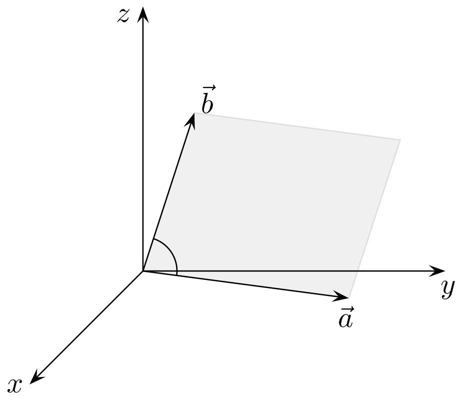
$$\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Ebenengleichung lautet:

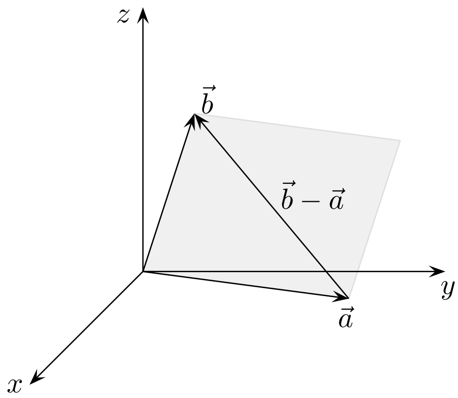
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

↑ Skalarprodukt



Es gibt ein einfaches Kriterium, um nachzuprüfen, ob zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander stehen.

Der unteren Zeichnung entnehmen wir, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn gilt:
$|\,\vec{a}\,|^2 + |\,\vec{b}\,|^2 = |\,\vec{b} - \vec{a}\,|^2$ (Satz des Pythagoras, Umkehrung).
Wenn wir die Längen mit Hilfe der Komponenten ausrechnen, erhalten wir die gesuchte Bedingung.



$$\text{Seien} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{beachte:} \quad |\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \; + \; b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

$\iff$

. *Klammern auflösen, in Gedanken reicht, auf beiden Seiten stehen die gleichen Quadrate*

. *zusammenfassen, vereinfachen*

$$\iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

Definition des Skalarprodukts:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Satz: $\quad \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Vektorrechnung

Vektorrechnung, Einführung

Pfeile und Vektoren

Startseite