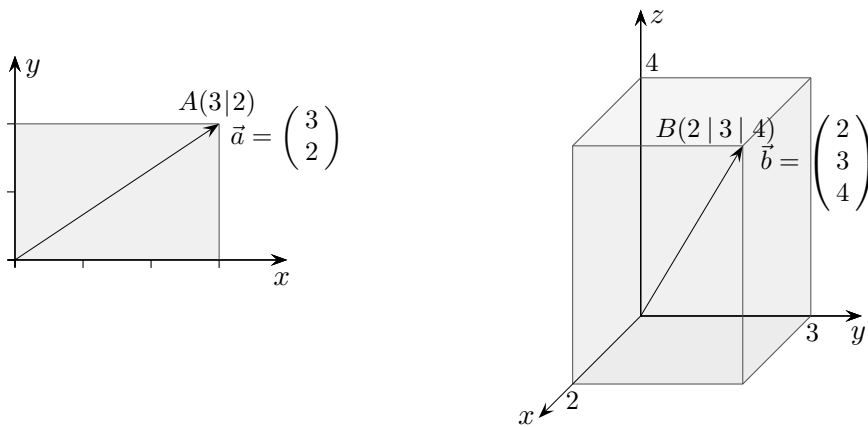
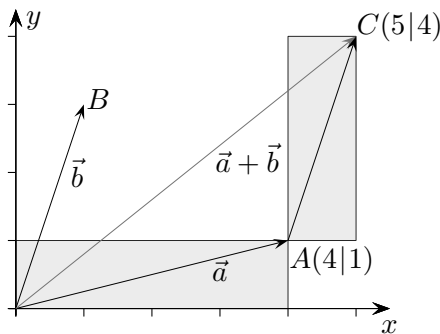


Vektorrechnung, kurze Einführung



Jeder Vektor legt einen Punkt in der Ebene oder im Raum fest.
Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einem Ortsvektor.
Jeder Vektor beschreibt überdies eine Richtung.



$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

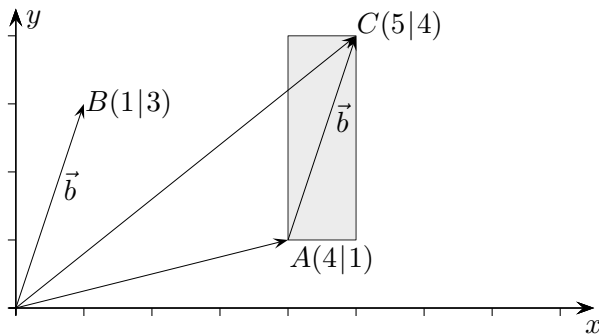
Der an A angehängte Pfeil verdeutlicht, dass bei der Addition von einem Vektor \vec{a} (Ortsvektor) ausgegangen werden kann und der andere Vektor die Koordinatenänderungen angibt, um von A nach C zu gelangen (Richtungs- oder Verschiebungsvektor \vec{b}).

Welche Eigenschaft (Punkt- oder Richtungsangabe) gemeint ist, geht aus der Anwendung hervor.
Der Aspekt kann durch die Schreibweise hervorgehoben werden, $\vec{b} = \vec{OB}$ als Ortsvektor,
 $\vec{b} = \vec{AC}$ als Richtungsvektor.

↑ Richtungsvektor

Eine Richtung sei durch die 2 Punkte A und C festgelegt.

Wie lautet der Richtungsvektor \vec{AC} ?



In einfachen Fällen kann der Richtungsvektor (Differenzvektor) unmittelbar abgelesen werden, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Andererseits gilt für $\vec{b} = \vec{AC}$: $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$ weil $\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$ ist.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Merke: „Spitze minus Fuß“}$$

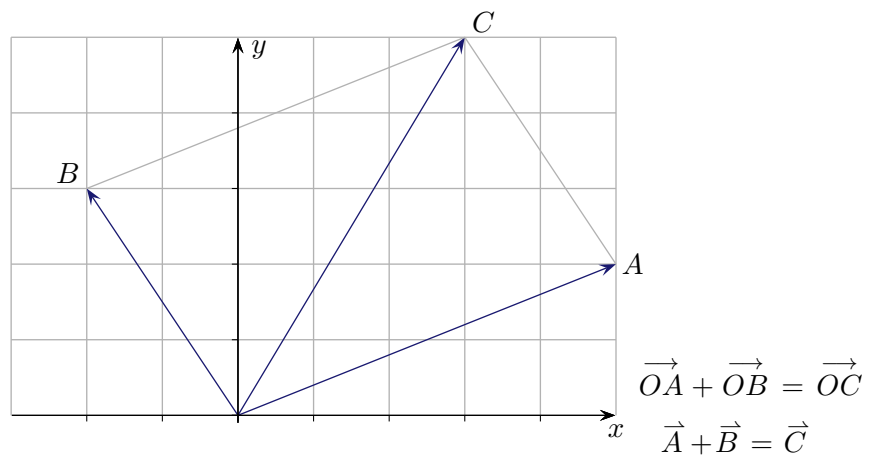
$$\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vereinfachte Sprechweise

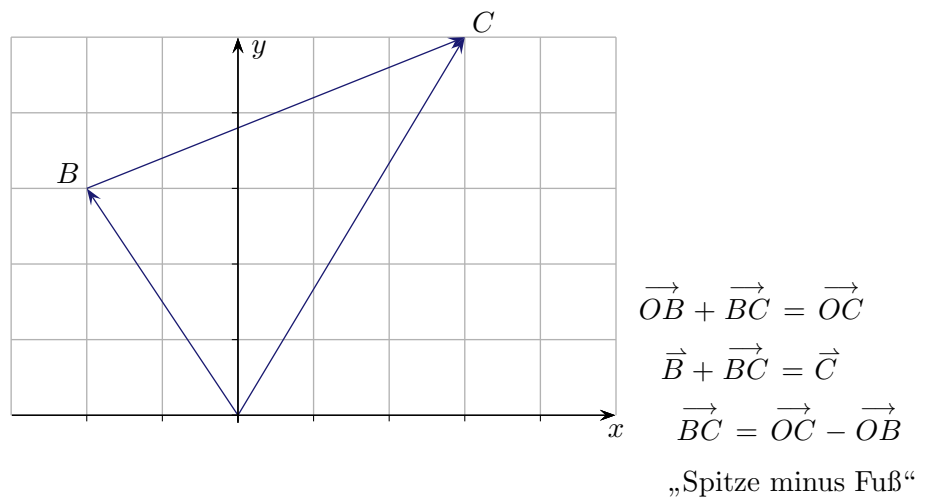
Wir unterscheiden Vektoren der Ebene, z.B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und des Raumes, z.B. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ein Pfeil, der vom Ursprung ausgeht und damit einen Punkt festlegt, bezeichnen wir vereinfacht als Ortsvektor und ein Pfeil, der zwei Punkte verbindet und damit eine Richtung festlegt, als Verbindungs- oder Verschiebungsvektor.

a) Ortsvektoren

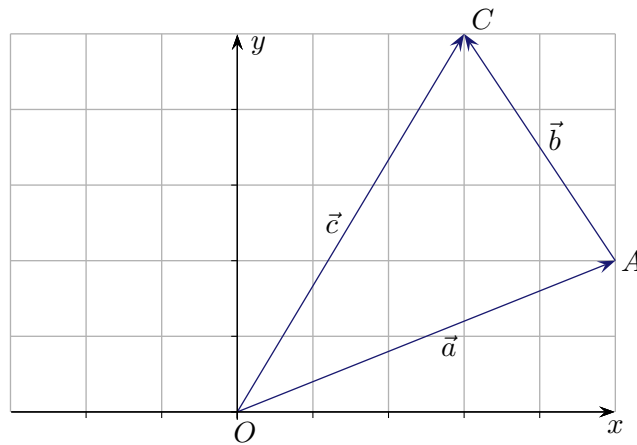


b) zwei Ortsvektoren und ein Verbindungsvektor (Verschiebungsvektor)



Zur Addition wird bei Pfeilen mit gleichem Anfangspunkt ein Parallelogramm gebildet oder der eine Pfeil wird an den anderen drangehängt.

↑ Geschlossene Vektorkette



Es gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
 $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$
 $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$ Differenzvektor

Den Verbindungsvektor \vec{AC} zu den Punkten A und C erhält man mit „Spitze minus Fuß“.
 Dasselbe Ergebnis erhalten wir mit der folgenden Regel, die verallgemeinert werden kann.

Hier liegt eine geschlossene Vektorkette vor mit $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$,
 die Richtung der Vektoren ist dabei unerheblich.

Umwegregel für eine geschlossene Vektorkette:

Der Pfeil zu \vec{b} beginnt in A und endet in C .

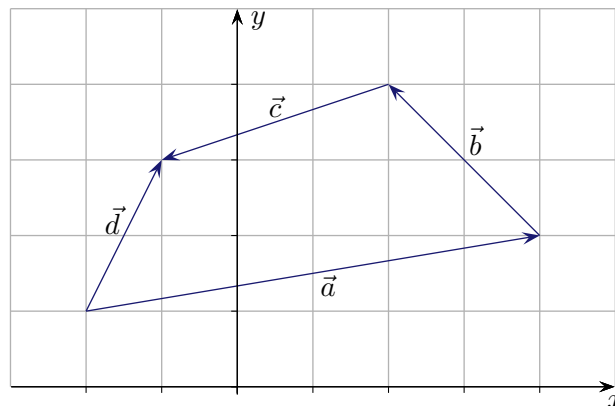
Um von A über O nach C zu gelangen, ist der Pfeil zu \vec{a} in umgekehrter Richtung und der Pfeil zu \vec{c} in der angegebenen Richtung zu durchlaufen:

$$\vec{b} = -\vec{a} + \vec{c} \quad (= \vec{c} - \vec{a})$$

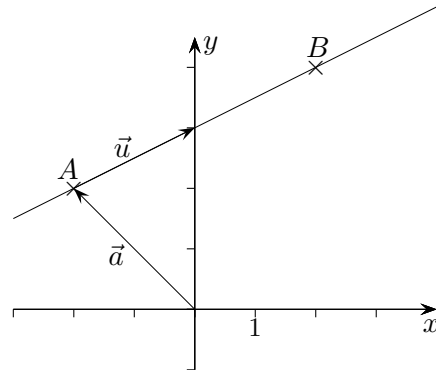
$$\vec{a} = \vec{d} - \vec{c} - \vec{b}$$

$$\vec{c} = -\vec{b} - \vec{a} + \vec{d}$$

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



↑ Geradengleichung



Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(-2 | 2)$ und $B(2 | 4)$.
Wie lautet die vektorielle Geradengleichung?

Der Verlauf der Geraden kann durch den

Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, der zum Punkt A führt,

und den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (oder ein Vielfaches davon) festgelegt werden.

Auf je einen Punkt der Geraden weisen die Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 3\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

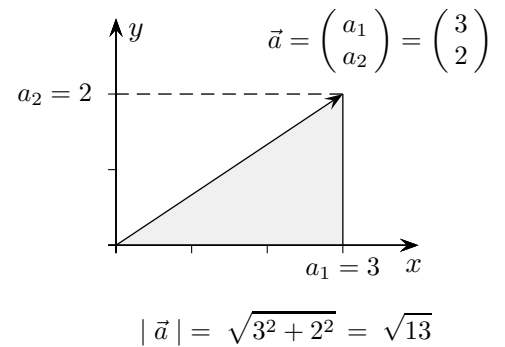
Die *Geradengleichung* lautet daher: $\vec{x} = \vec{a} + k\vec{u}$ und für unser Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für jeden k -Wert ergibt sich ein Vektor \vec{x} , der zu einem Punkt $P(-2 + 2k | 2 + k)$ auf der Geraden führt.

Betrag eines Vektors

Die Länge $|\vec{a}|$ oder der Betrag eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ (2-dimensional) beträgt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

und für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ (3-dimensional) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

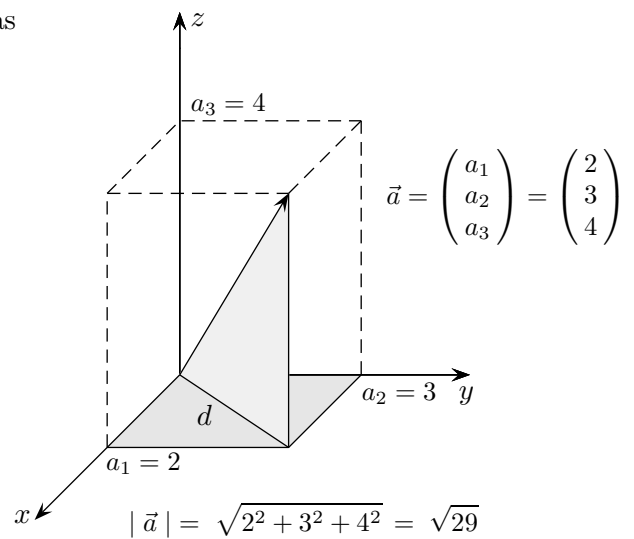


Dem liegt die Berechnung der Diagonale eines Rechtecks bzw. der Raumdiagonale eines Quaders zugrunde.

Um die Länge der Raumdiagonale des Quaders zu berechnen, ist als Zwischenschritt die Diagonalenlänge $d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ der Grundfläche zu ermitteln.

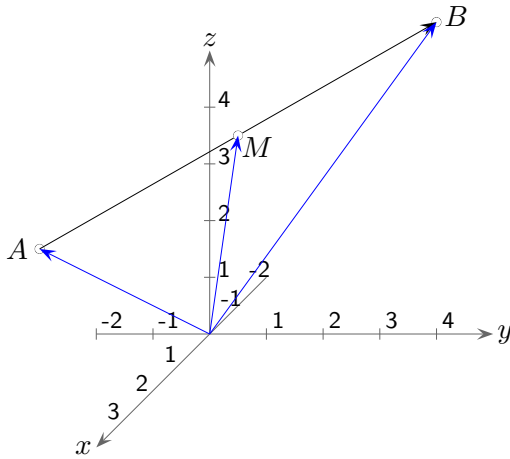
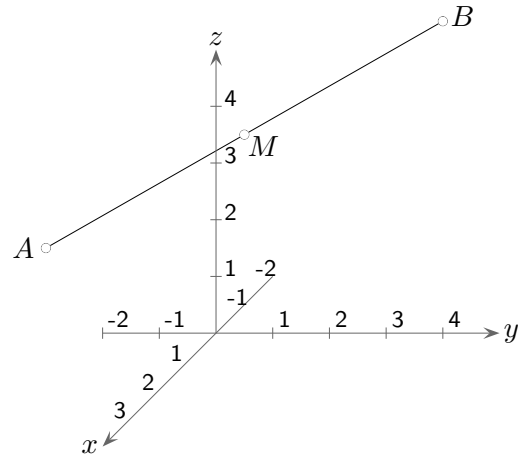
Bei einer erneuten Anwendung des Satzes des Pythagoras fällt die Wurzel von d beim Quadrieren fort:

$$|\vec{a}| = \sqrt{d^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



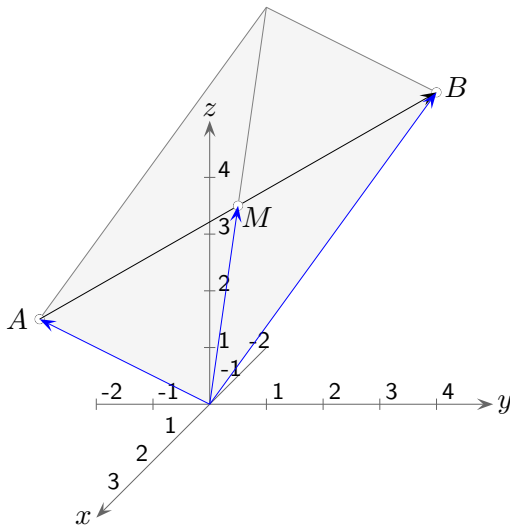
Mittelpunkt einer Strecke

Bestimme den Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} mit $A(4 | -1 | 3,5)$ und $B(-2 | 3 | 4,5)$.



$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB}, \quad M(1 | 1 | 4)$$

$$\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2} \vec{AB}$$

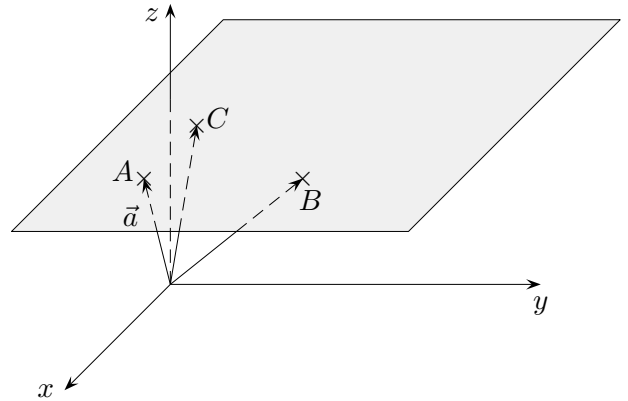


$$\vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

Ebenengleichung

Wie lautet die Gleichung der Ebene, in der die Punkte $A(2 | 1 | -3)$, $B(1 | 5 | 0)$ und $C(4 | -1 | 2)$ liegen?



Die Richtung der Ebene kann durch die beiden Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ erfasst werden.

Zur Lagebestimmung ist dann nur noch ein Stützvektor, z. B. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, notwendig, \overrightarrow{OB} oder \overrightarrow{OC} wären auch möglich.

Damit erhalten wir die *Parameterform* der Ebenengleichung:

$$\vec{x} = \vec{a} + s \vec{u} + t \vec{v}$$

Wenn s und t alle Zahlen durchlaufen, erreicht der Vektor \vec{x} jeden Punkt der Ebene.

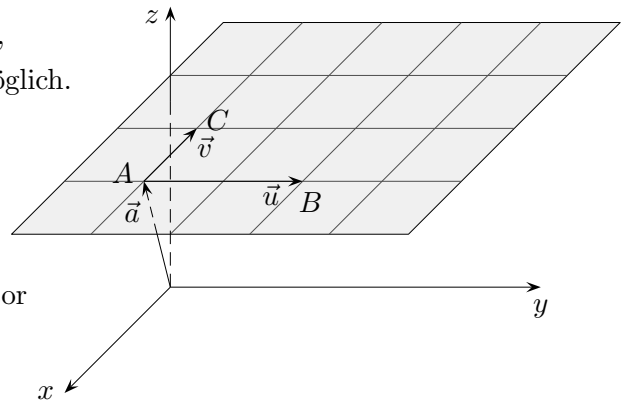
Für das Beispiel gilt:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Ebenengleichung lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$



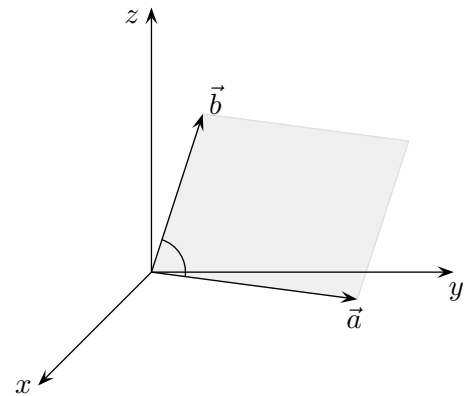
Skalarprodukt

Es gibt ein einfaches Kriterium, um nachzuprüfen, ob zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} senkrecht zueinander stehen.

Der unteren Zeichnung entnehmen wir, dass \vec{a} und \vec{b} genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn gilt:

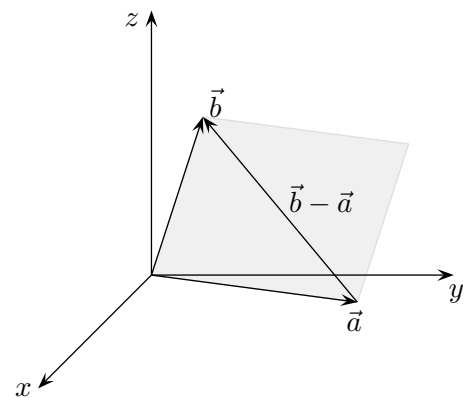
$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 \text{ (Satz des Pythagoras, Umkehrung).}$$

Wenn wir die Längen mit Hilfe der Komponenten ausrechnen, erhalten wir die gesuchte Bedingung.



Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

beachte: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$



$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\iff a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\ &= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 \end{aligned}$$

\iff

- Klammern auflösen, in Gedanken reicht, auf beiden Seiten stehen die gleichen Quadrate
- zusammenfassen, vereinfachen

$$\iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

Definition des Skalarprodukts:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Satz: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Vektorrechnung

Vektorrechnung, Einführung

Pfeile und Vektoren

Startseite