

Spiegeln

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt $P(-3 | 0 | 2)$.

- a) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.
- b) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E , so erhält man den Punkt P' .
Ermitteln Sie die Koordinaten von P' .

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt $P(-3 | 0 | 2)$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.

$$2(-3) + 0 - 2 - 4 = 0 \iff -12 = 0, \quad P \notin E$$

b) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E , so erhält man den Punkt P' .
Ermitteln Sie die Koordinaten von P' .

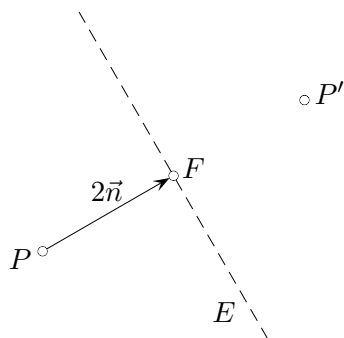
$$\text{Normalenvektor von } E: \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \vec{OP} + \lambda \vec{n}, \quad g \cap E, \quad \lambda = 2$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P'(5 | 4 | -2)$$

Es ist nicht erforderlich, den Fußpunkt $F(1 | 2 | 0)$ zu ermitteln.



Spiegeln

1. Spiegel den Punkt $P(-4 | 5 | 3)$ am Punkt
 - a) $Q(1 | 2 | -2)$
 - b) $R(-2 | 3 | -2)$

2. Spiegel den Punkt $P(-4 | -9 | -1)$ an der Ebene
 - a) $E: -2x + y + 2z = 6$
 - b) $E: -x + y + 2z = 2$

3. Spiegel den Punkt $P(6 | 3 | -3)$ an der Geraden
 - a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. Spiegel die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
an der Ebene $E: 2x - y + z = 7$.

5. Spiegel die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
an der Ebene $E: -4x + 8y + z = 3$.

Spiegeln

1. Spiegel den Punkt $P(-4 | 5 | 3)$ am Punkt

a) $Q(1 | 2 | -2)$ $P'(6 | -1 | -7)$

b) $R(-2 | 3 | -2)$ $P'(0 | 1 | -7)$

2. Spiegel den Punkt $P(-4 | -9 | -1)$ an der Ebene

a) $E: -2x + y + 2z = 6$ Fußpunkt $F(-6 | -8 | 1)$, $P'(-8 | -7 | 3)$

b) $E: -x + y + 2z = 2$ $F(-11/2 | -15/2 | 2)$, $P'(-7 | -6 | 5)$

3. Spiegel den Punkt $P(6 | 3 | -3)$ an der Geraden

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Fußpunkt $F(4 | 2 | 0)$, $P'(2 | 1 | 3)$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $F(-1 | 7/2 | -5/2)$, $P'(-8 | 4 | -2)$

4. Spiegel die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

an der Ebene $E: 2x - y + z = 7$. Schnittpunkt $S(6 | -11 | -16)$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ Stützvektor von } g, \text{ Richtungsvektor } \vec{n}$$

Für $\lambda = 1$ schneiden sich h und E .

Mit $\lambda = 2$ erhalten wir den Punkt $P'(4 | -1 | 4)$ der Spiegelgeraden s .

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad s = \overrightarrow{OP'} + \lambda \frac{1}{2} \overrightarrow{SP'}$$

5. Spiegel die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

an der Ebene $E: -4x + 8y + z = 3$. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, d.h. $g \parallel E$

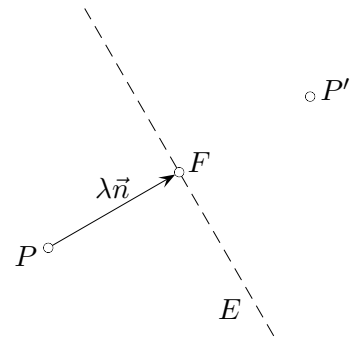
$A(0 | -20 | 1)$ spiegeln und den Richtungsvektor beibehalten

Fußpunkt $F(-8 | -4 | 3)$, $A'(-16 | 12 | 5)$

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an einer Ebene, die durch den Ursprung verläuft

$$\begin{aligned}
 E: \vec{n}\vec{x} &= 0 & |\vec{n}| &= 1 \\
 g: \vec{x} &= \vec{OP} + \lambda\vec{n} \\
 \vec{n}(\vec{OP} + \lambda\vec{n}) &= 0 & \text{Schnitt} \\
 \lambda &= -\vec{n}\vec{OP} \\
 \vec{OF} &= \vec{OP} - (\vec{n}\vec{OP})\vec{n} \\
 \vec{PF} &= -(\vec{n}\vec{OP})\vec{n} \\
 \vec{OP}' &= \vec{OP} - 2(\vec{n}\vec{OP})\vec{n}
 \end{aligned}$$



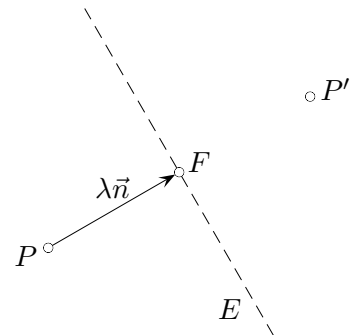
Für P' muss F nicht ermittelt werden.

Spiegel den Punkt

- $P(1 \mid 4 \mid 1)$ an der Ebene $E: x - 2y - 2z = 0$
- $P(-2 \mid 3 \mid -1)$ an der Ebene $E: -x + y + 2z = 0$
- $P(-2 \mid 4 \mid 1)$ an der Ebene $E: x - 2z = 0$.

Spiegelung an einer Ebene, die durch den Ursprung verläuft

$$\begin{aligned}
 E: \vec{n}\vec{x} &= 0 & |\vec{n}| &= 1 \\
 g: \vec{x} &= \vec{OP} + \lambda\vec{n} \\
 \vec{n}(\vec{OP} + \lambda\vec{n}) &= 0 & \text{Schnitt} \\
 \lambda &= -\vec{n}\vec{OP} \\
 \vec{OF} &= \vec{OP} - (\vec{n}\vec{OP})\vec{n} \\
 \vec{PF} &= -(\vec{n}\vec{OP})\vec{n} \\
 \vec{OP}' &= \vec{OP} - 2(\vec{n}\vec{OP})\vec{n}
 \end{aligned}$$



Für P' muss F nicht ermittelt werden.

Spiegel den Punkt

a) $P(1 \mid 4 \mid 1)$ an der Ebene $E: x - 2y - 2z = 0$

$$P'(3 \mid 0 \mid -3)$$

b) $P(-2 \mid 3 \mid -1)$ an der Ebene $E: -x + y + 2z = 0$

$$P'(-1 \mid 2 \mid -3)$$

c) $P(-2 \mid 4 \mid 1)$ an der Ebene $E: x - 2z = 0$.

$$P'(2 \mid -4 \mid 1)$$

Startseite