Spiegeln

Gegeben sind die Ebene E: $2x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt $P(-3 \,|\, 0 \,|\, 2)$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.

b) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Punkt P'.
Ermitteln Sie die Koordinaten von P'.

Gegeben sind die Ebene E: $2x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt $P(-3\,|\,0\,|\,2)$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt.
$2(-3) + 0 - 2 - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -12 = 0, \quad P \notin E$

b) Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Punkt P'.
Ermitteln Sie die Koordinaten von P'.

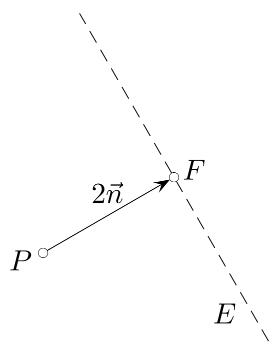
Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{n}, \quad g \cap E, \quad \lambda = 2$

$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$P'(5\,|\,4\,|\,-2)$

Es ist nicht erforderlich, den Fußpunkt $F(1\,|\,2\,|\,0)$ zu ermitteln.



Spiegeln

1. Spiegel den Punkt $P(-4\,|\,5\,|\,3)$ am Punkt

   a) $Q(1\,|\,2\,|\,-2)$

   b) $R(-2\,|\,3\,|\,-2)$

2. Spiegel den Punkt $P(-4\,|\,-9\,|\,-1)$ an der Ebene

   a) $E\colon -2x + y + 2z = 6$

   b) $E\colon -x + y + 2z = 2$

3. Spiegel den Punkt $P(6\,|\,3\,|\,-3)$ an der Geraden

   a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. Spiegel die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   an der Ebene $E\colon 2x - y + z = 7$.

5. Spiegel die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

   an der Ebene $E\colon -4x + 8y + z = 3$.

Spiegeln

1. Spiegel den Punkt $P(-4\,|\,5\,|\,3)$ am Punkt

   a) $Q(1\,|\,2\,|\,-2)$ $\qquad P'(6\,|\,-1\,|\,-7)$

   b) $R(-2\,|\,3\,|\,-2)$ $\qquad P'(0\,|\,1\,|\,-7)$

2. Spiegel den Punkt $P(-4\,|\,-9\,|\,-1)$ an der Ebene

   a) $E\colon\ -2x + y + 2z = 6$ $\qquad$ Fußpunkt $F(-6\,|\,-8\,|\,1)$, $\;P'(-8\,|\,-7\,|\,3)$

   b) $E\colon\ -x + y + 2z = 2$ $\qquad F(-11/2\,|\,-15/2\,|\,2)$, $\;P'(-7\,|\,-6\,|\,5)$

3. Spiegel den Punkt $P(6\,|\,3\,|\,-3)$ an der Geraden

   a) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Fußpunkt $F(4\,|\,2\,|\,0)$, $\;P'(2\,|\,1\,|\,3)$

   b) $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad F(-1\,|\,7/2\,|\,-5/2)$, $\;P'(-8\,|\,4\,|\,-2)$

4. Spiegel die Gerade $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   an der Ebene $E\colon\ 2x - y + z = 7$. $\qquad$ Schnittpunkt $S(6\,|\,-11\,|\,-16)$

   $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Stützvektor von g, Richtungsvektor $\vec{n}$

   Für $\lambda = 1$ schneiden sich h und E.

   Mit $\lambda = 2$ erhalten wir den Punkt $P'(4\,|\,-1\,|\,4)$ der Spiegelgeraden s.

   $$s\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad s = \overrightarrow{OP'} + \lambda \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{SP'}$$

5. Spiegel die Gerade $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

   an der Ebene $E\colon\ -4x + 8y + z = 3$. $\qquad \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, d.h. $g \parallel E$

   $A(0\,|\,-20\,|\,1)$ spiegeln und den Richtungvektor beibehalten

   Fußpunkt $F(-8\,|\,-4\,|\,3)$, $\;A'(-16\,|\,12\,|\,5)$

   $$s\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$