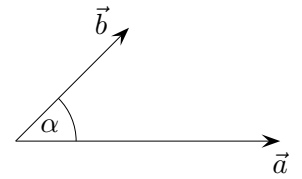
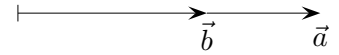


Skalarprodukt Fortsetzung

Mit dem Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kann der Winkel berechnet werden, den zwei Vektoren miteinander einschließen.

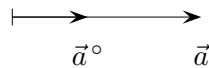


Zunächst untersuchen wir das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier kollinear Vektoren.



$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot \vec{a}^\circ \cdot |\vec{b}| \cdot \vec{b}^\circ \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underbrace{\vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ}_1 \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$

\vec{a}° ist der zu \vec{a} gehörige Einheitsvektor. Das ist ein Vektor, der mit \vec{a} in der Richtung übereinstimmt, jedoch die Länge 1 hat.

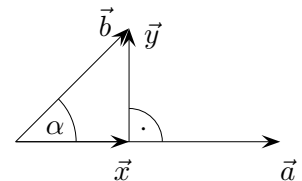


$$\vec{a}^\circ = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \quad \text{oder} \quad \vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}^\circ$$

Es gilt: $\vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ = 1$ Beweis?

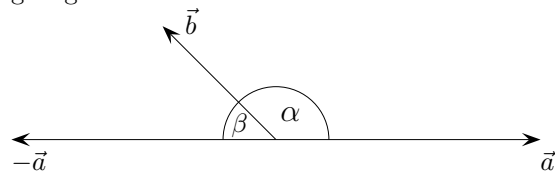
In diesem Fall ist das Skalarprodukt also lediglich das Produkt der Längen der Vektoren. Für die Behandlung des allgemeinen Falls stellen wir \vec{b} als Summe zweier Vektoren \vec{x} und \vec{y} dar:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{x} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{y}}_0 \quad (\vec{a} \perp \vec{y}) \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{x}| \quad (\vec{a} \text{ und } \vec{x} \text{ kollinear, siehe oben}) \end{aligned}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \quad \left(\cos \alpha = \frac{|\vec{x}|}{|\vec{b}|} \quad \text{oder} \quad |\vec{x}| = |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \right)$$

Die Formel $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ ist auch für $\alpha > 90^\circ$ gültig.



$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= -(-\vec{a}) \cdot \vec{b} \\ &= -|-\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \beta \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \quad \left(-\cos(\underbrace{180^\circ - \alpha}_\beta) = \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren \vec{a} und \vec{b} ?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösungen:

2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2|4|3)$, $B(6|0|-4)$ und $C(5|-4|2)$.

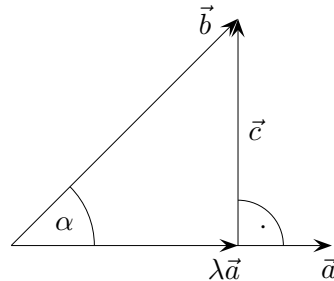
1. a) $71,2^\circ$ b) $167,8^\circ$

2. $48,9^\circ$; $62,7^\circ$; $68,4^\circ$

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

3. $38,9^\circ$; $63,3^\circ$; $116,4^\circ$

Zusammenhang zwischen Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel



Erläutere:

$$\cos \alpha = \frac{\lambda |\vec{a}|}{|\vec{b}|} \quad \text{für positives } \lambda$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot (\lambda \vec{a} + \vec{c}) \\ &= \lambda \vec{a}^2 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \quad \text{beachte: } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} \quad \implies \quad \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren \vec{a} und \vec{b} ?

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2|4|3)$, $B(6|0|-4)$ und $C(5|-4|2)$.

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

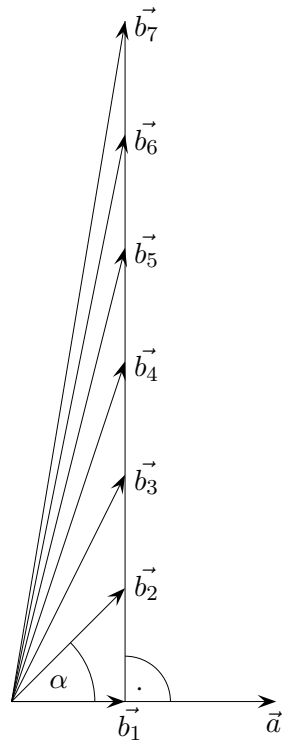
Lösungen:

1. a) $83,8^\circ$ b) $168,2^\circ$

2. $48,9^\circ$; $62,7^\circ$; $68,4^\circ$

3. $49,7^\circ$; $57,4^\circ$; $122,6^\circ$

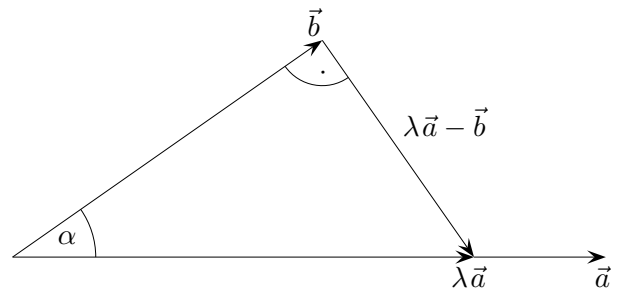
Zum Skalarprodukt



$$\vec{b}_1 \cdot \vec{a} = |\vec{b}_1| \cdot |\vec{a}| \quad (\text{gilt stets f\u00fcr kollineare Vektoren})$$

$$= \vec{b}_2 \cdot \vec{a} = \vec{b}_3 \cdot \vec{a} = \vec{b}_4 \cdot \vec{a} = \dots$$

Zusammenhang zwischen Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel



Erläutere:

$$\vec{b} \perp \lambda\vec{a} - \vec{b}$$

...

$$\lambda = \frac{\vec{b}^2}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\lambda\vec{a}|} = \frac{|\vec{b}|}{\lambda|\vec{a}|} \quad \text{für positives } \lambda$$

...

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad \text{beachte: } |\vec{b}| = \sqrt{\vec{b}^2} \implies \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren \vec{a} und \vec{b} ?

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2|4|3)$, $B(6|0|-4)$ und $C(5|-4|2)$.

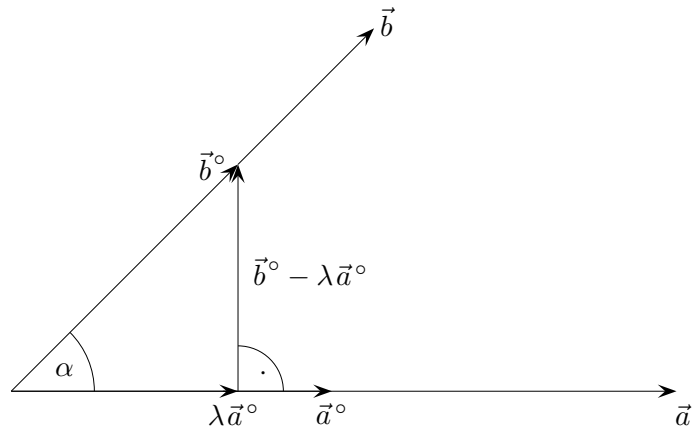
1. a) $83,8^\circ$ b) $168,2^\circ$

2. $48,9^\circ$; $62,7^\circ$; $68,4^\circ$

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

3. $49,7^\circ$; $57,4^\circ$; $122,6^\circ$

Zusammenhang zwischen Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel



Erläutere:

$$\cos \alpha = \frac{|\lambda \vec{a}^{\circ}|}{|\vec{b}^{\circ}|} = \lambda$$

$$\vec{b}^{\circ} - \lambda \vec{a}^{\circ} \perp \vec{a}^{\circ}$$

...

$$\lambda = \vec{a}^{\circ} \cdot \vec{b}^{\circ} \quad \text{beachte: } \vec{a}^{\circ} \cdot \vec{a}^{\circ} = 1$$

$$\cos \alpha = \vec{a}^{\circ} \cdot \vec{b}^{\circ} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren \vec{a} und \vec{b} ?

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösungen:

2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2|4|3)$, $B(6|0|-4)$ und $C(5|-4|2)$.

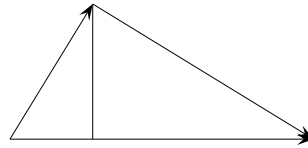
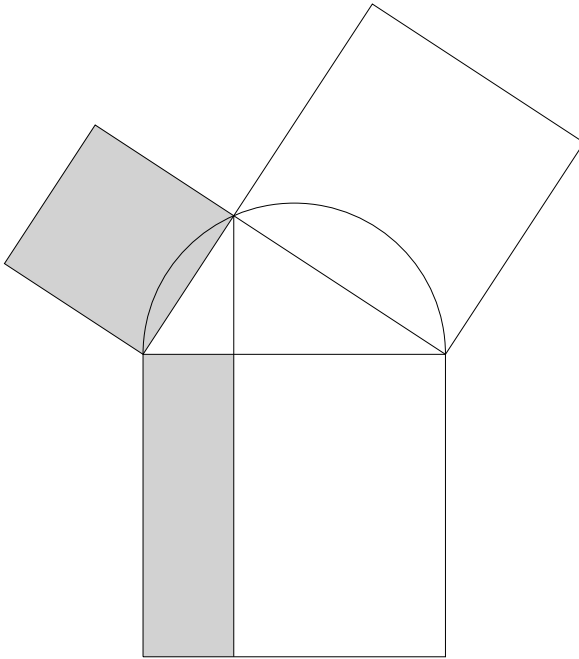
1. a) $83,8^{\circ}$ b) $168,2^{\circ}$

2. $48,9^{\circ}$; $62,7^{\circ}$; $68,4^{\circ}$

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

3. $49,7^{\circ}$; $57,4^{\circ}$; $122,6^{\circ}$

Skalarprodukt



Sei $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

- Quadriere und interpretiere das Ergebnis.
- Multipliziere beide Seiten mit \vec{b} und interpretiere das Ergebnis.