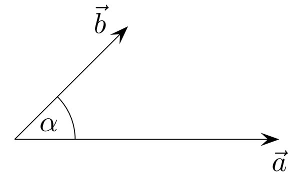
Skalarprodukt Fortsetzung

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha$ ○
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha$ alternativ ○
3. Eine Eigenschaft des Skalarprodukts
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha$ alternativ
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha$ alternativ mit (Einheitsvektoren)
6. Skalarprodukt Satz des Pythagoras Kathetensatz
7. Projektion
8. Zusammenhang zwischen Cosinussatz und Skalarprodukt
9. Alternative Herleitung $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos(\alpha)$

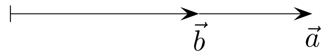
Für den Anfang geeignet ○

# $\uparrow$ Skalarprodukt Fortsetzung



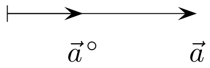
Mit dem Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kann der Winkel berechnet werden, den zwei Vektoren miteinander einschließen.

Zunächst untersuchen wir das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier kollinearer Vektoren.



$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\,\vec{a}\,| \cdot \vec{a}^\circ \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \vec{b}^\circ \\ &= |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \underbrace{\vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ}_{1} \\ &= |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|\end{aligned}$$

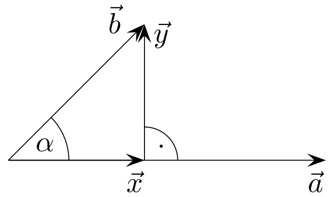
$\vec{a}^\circ$ ist der zu $\vec{a}$ gehörige Einheitsvektor. Das ist ein Vektor, der mit $\vec{a}$ in der Richtung übereinstimmt, jedoch die Länge 1 hat.



$$\vec{a}^\circ = \frac{1}{|\,\vec{a}\,|}\,\vec{a} \qquad \text{oder} \qquad \vec{a} = |\,\vec{a}\,|\,\vec{a}^\circ$$

Es gilt: $\vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ = 1$ Beweis?

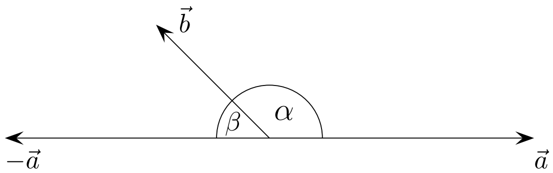
In diesem Fall ist das Skalarprodukt also lediglich das Produkt der Längen der Vektoren. Für die Behandlung des allgemeinen Falls stellen wir $\vec{b}$ als Summe zweier Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ dar:



$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{x} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{y}}_{0} \qquad (\vec{a} \perp \vec{y}) \\ &= |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{x}\,| \qquad (\vec{a}\ \textit{und}\ \vec{x}\ \textit{kollinear},\ \textit{siehe oben})\end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha \qquad \left(\cos\alpha = \frac{|\,\vec{x}\,|}{|\,\vec{b}\,|} \quad \textit{oder} \quad |\,\vec{x}\,| = |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha\right)$$

Die Formel $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha$ ist auch für $\alpha > 90^\circ$ gültig.



$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= -\ (-\,\vec{a}) \cdot \vec{b} \\ &= -\ |-\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\beta \\ &= |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha \qquad (-\cos(\underbrace{180^\circ - \alpha}_{\beta}) = \cos\alpha)\end{aligned}$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ?

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}$

2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2\,|\,4\,|\,3)$, $B(6\,|\,0\,|\,-4)$ und $C(5\,|\,-4\,|\,2)$.

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix}7\\4\\-4\end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ?

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2\,|\,4\,|\,3)$, $B(6\,|\,0\,|\,-4)$ und $C(5\,|\,-4\,|\,2)$.

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

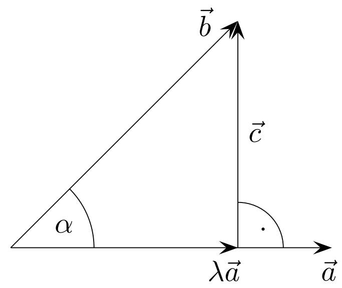
*Lösungen:*

*1.* *a)* 71,2° *b)* 167,8°

*2.* 48,9°; 62,7°; 68,4°

*3.* 38,9°; 63,3°; 116,4°

# $\uparrow$ Zusammenhang zwischen Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel




Erläutere:

$$\cos\alpha = \frac{\lambda\,|\,\vec{a}\,|}{|\,\vec{b}\,|} \qquad \text{für positives } \lambda$$

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{a}\cdot(\lambda\vec{a}+\vec{c}) \\ &= \lambda\vec{a}^{\,2} \\ \lambda &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,|^2} \qquad \text{beachte: } |\,\vec{a}\,| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} \implies \vec{a}^{\,2} = |\,\vec{a}\,|^2 \\ \cos\alpha &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|} \end{aligned}$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ?

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2\,|\,4\,|\,3)$, $B(6\,|\,0\,|\,-4)$ und $C(5\,|\,-4\,|\,2)$.

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ?

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2\,|\,4\,|\,3)$, $B(6\,|\,0\,|\,-4)$ und $C(5\,|\,-4\,|\,2)$.

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

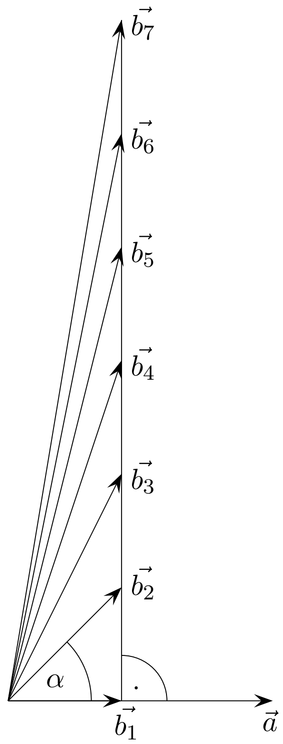
Lösungen:

1. a) 83,8° b) 168,2°

2. 48,9°; 62,7°; 68,4°

3. 49,7°; 57,4°; 122,6°

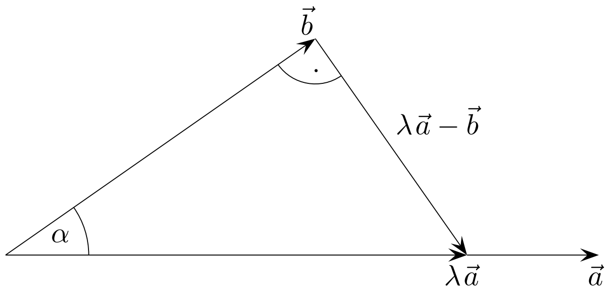
## ↑ Zum Skalarprodukt




$\vec{b_1} \cdot \vec{a} = |\, \vec{b_1}\, | \cdot |\, \vec{a}\, |$ (gilt stets für kollineare Vektoren)

$= \vec{b_2} \cdot \vec{a} \;=\; \vec{b_3} \cdot \vec{a} \;=\; \vec{b_4} \cdot \vec{a} \;=\; \ldots$

# ↑ Zusammenhang zwischen Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel




Erläutere:

$$\vec{b} \perp \lambda\vec{a} - \vec{b}$$

$$\ldots$$

$$\lambda = \frac{\vec{b}^2}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

$$\cos\alpha = \frac{|\,\vec{b}\,|}{|\,\lambda\vec{a}\,|} = \frac{|\,\vec{b}\,|}{\lambda\,|\,\vec{a}\,|} \qquad \text{für positives } \lambda$$

$$\ldots$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,|} \qquad \text{beachte: } |\,\vec{b}\,| = \sqrt{\vec{b}^2} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b}^2 = |\,\vec{b}\,|^2$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ?

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

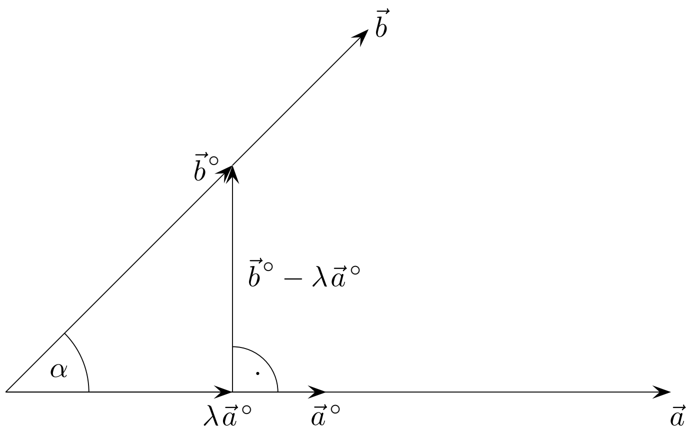
2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2\,|\,4\,|\,3)$, $B(6\,|\,0\,|\,-4)$ und $C(5\,|\,-4\,|\,2)$.

3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

Lösungen:

1. a) 83,8° b) 168,2°
2. 48,9°; 62,7°; 68,4°
3. 49,7°; 57,4°; 122,6°

# ↑ Zusammenhang zwischen Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel




Erläutere:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{|\,\lambda\vec{a}^\circ\,|}{|\,\vec{b}^\circ\,|} = \lambda \\
\vec{b}^\circ - \lambda\vec{a}^\circ &\perp \vec{a}^\circ \\
&\dots \\
\lambda &= \vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ \qquad\qquad \text{beachte: } \vec{a}^\circ \cdot \vec{a}^\circ = 1 \\
\cos\alpha &= \vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\,\vec{b}\,|} \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha
\end{aligned}$$

1. Welchen Winkel bilden die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ?

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

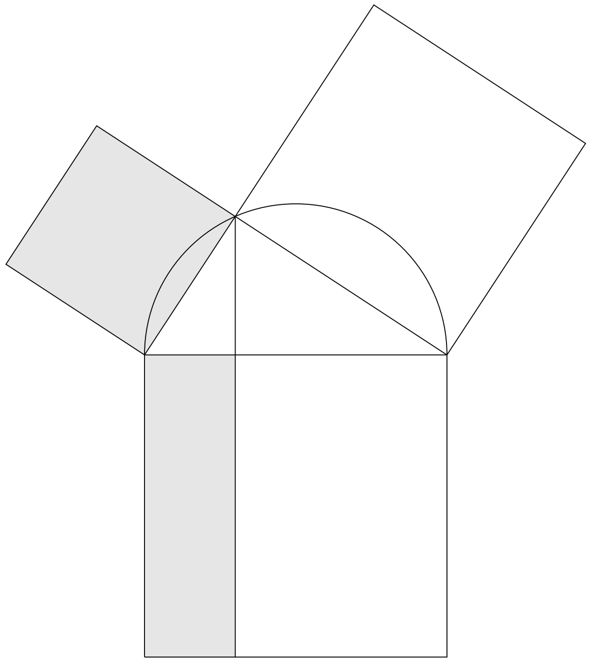
2. Berechne die Innenwinkel des Dreiecks $A(2\,|\,4\,|\,3)$, $B(6\,|\,0\,|\,-4)$ und $C(5\,|\,-4\,|\,2)$.

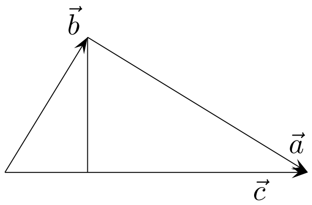
3. Welche Winkel bildet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenachsen?

Lösungen:

1. a) 83,8° b) 168,2°
2. 48,9°; 62,7°; 68,4°
3. 49,7°; 57,4°; 122,6°

## ↑ Skalarprodukt



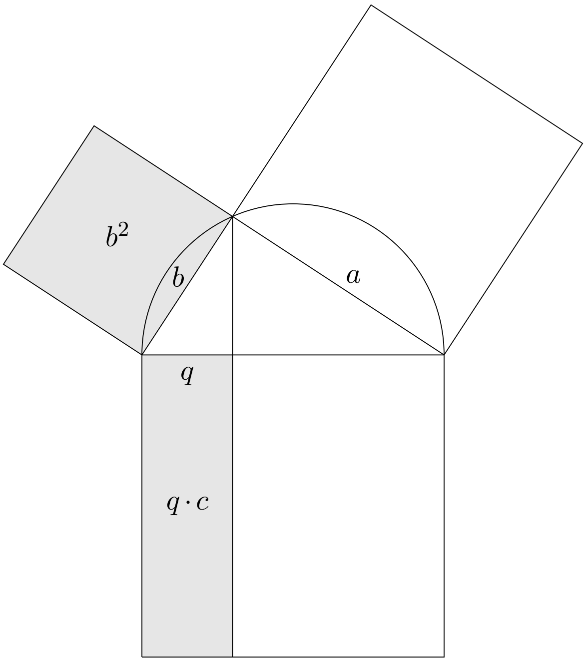


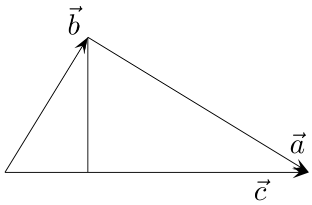

Sei $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

a) Quadriere und interpretiere das Ergebnis.

b) Multipliziere beide Seiten mit $\vec{b}$ und interpretiere das Ergebnis.

# ↑ Skalarprodukt




Sei $\vec{a} \perp \vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

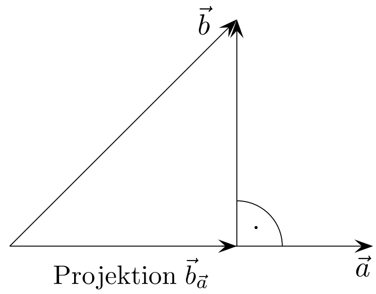
a) Quadriere und interpretiere das Ergebnis.

b) Multipliziere beide Seiten mit $\vec{b}$ und interpretiere das Ergebnis.

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{c} \qquad \mid (\ )^2 \\ (\vec{a} + \vec{b})^2 &= \vec{c}^{\,2} \\ \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2} &= \vec{c}^{\,2} \\ |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 &= |\vec{c}|^2 \qquad \text{Pythagoras} \end{aligned}$$

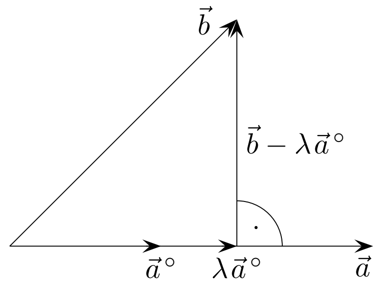
$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{c} \qquad \mid \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^{\,2} &= \vec{b} \cdot \vec{c} \\ |\vec{b}|^2 &= |\vec{c}| \underbrace{|\vec{b}| \cos\alpha}_{q} \qquad \text{Kathetensatz} \end{aligned}$$

# ↑ Projektion




$\vec{a}$, $\vec{b}$ gegeben, $\vec{b}_{\vec{a}}$ gesucht.

# ↑ Projektion

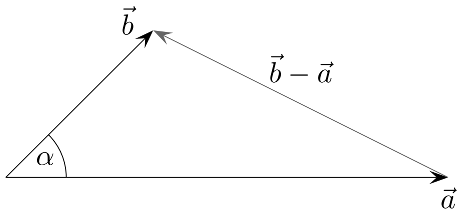



Projektion $\vec{b}_{\vec{a}}$

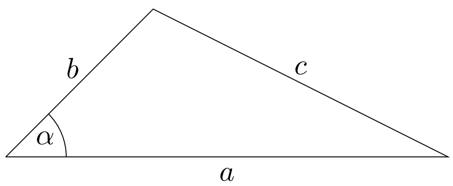
$\vec{a}$, $\vec{b}$ gegeben, $\vec{b}_{\vec{a}}$ gesucht.

$$\begin{aligned}
\vec{a}^\circ &\perp (\vec{b} - \lambda\vec{a}^\circ) \\
0 &= \vec{a}^\circ \cdot (\vec{b} - \lambda\vec{a}^\circ) \\
&= \vec{a}^\circ \cdot \vec{b} - \lambda \qquad\qquad \vec{a}^\circ \cdot \vec{a}^\circ = 1 \\
\lambda &= \vec{a}^\circ \cdot \vec{b} \\
\vec{b}_{\vec{a}} &= (\vec{a}^\circ \cdot \vec{b})\, \vec{a}^\circ
\end{aligned}$$

# ↑ Zusammenhang zwischen Cosinussatz und Skalarprodukt




Der Cosinussatz stellt den Zusammenhang von $\alpha$ und den Längen der Vektoren her.



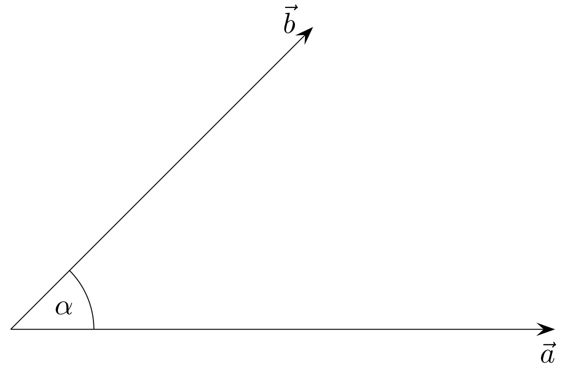

Zur Erinnerung:
Der Cosinussatz enthält den Satz des Pythagoras als Spezialfall mit $\cos 90° = 0$.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha \\ |\,\vec{b} - \vec{a}\,|^2 &= |\,\vec{a}\,|^2 + |\,\vec{b}\,|^2 - 2\,|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\cos\alpha & \Longrightarrow\ & \text{(Übergang zu den Koordinaten und ausrechnen)} \\ |\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\cos\alpha &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & & \text{beachte: } |\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \end{aligned}$$

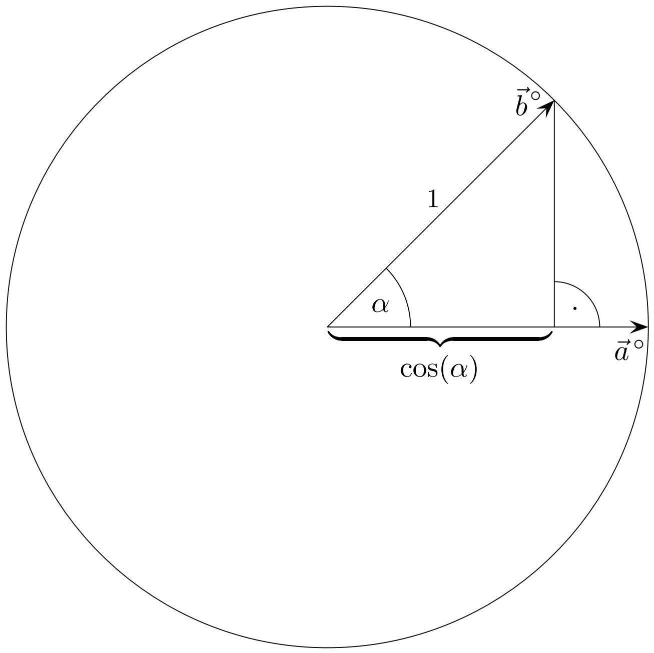
Die rechte oder linke Seite wird als Definition des Skalarprodukts $\vec{a} \cdot \vec{b}$ genommen.
Es gilt dann $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Diese Einführung des Skalarprodukts ist nur geeignet,
wenn der Cosinussatz zum Grundwissen gehört.

## $\uparrow$ Alternative Herleitung




Die Verwendung der Einheitsvektoren stellt die Beziehung zu $\alpha$ her.




Erläutere:

$$\vec{a}^\circ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}^\circ = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ \;=\; \cos(\alpha)$$

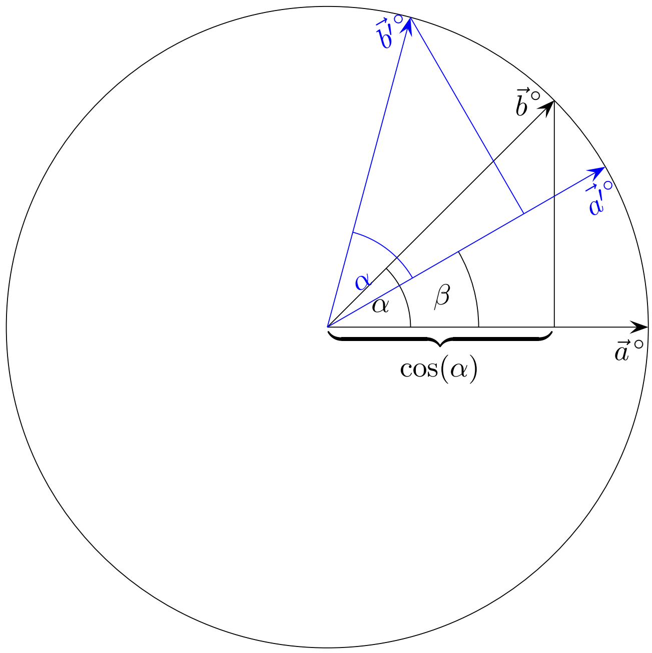
$$\cos\alpha \;=\; \vec{a}^\circ \cdot \vec{b}^\circ \;=\; \frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\,\vec{b}\,|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha$$

# ↑ Alternative Herleitung  Fortsetzung

Für das Produkt von Einheitsvektoren hatten wir hergeleitet: $\vec{a}^{\,\circ} \cdot \vec{b}^{\,\circ} = \cos(\alpha)$, jedoch war $\vec{a}^{\,\circ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Um uns von dieser Voraussetzung zu lösen, drehen wir die Einheitsvektoren um den Winkel $\beta$.




Erläutere:

$$\vec{a'}^{\circ} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b'}^{\circ} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$\vec{a'}^{\circ} \cdot \vec{b'}^{\circ} \; = \; \ldots \; = \cos(\alpha)$ Additionstheoreme und $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$

Wenn es nur um plausibles Erfassen geht, kann diese Fortsetzung unbeachtet bleiben.