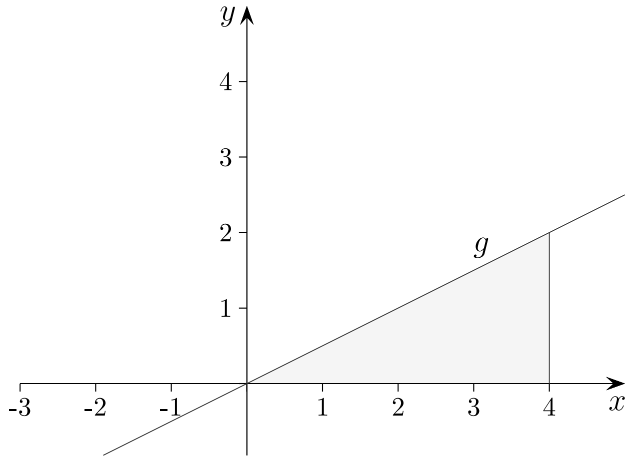
Skalarprodukt Einführung

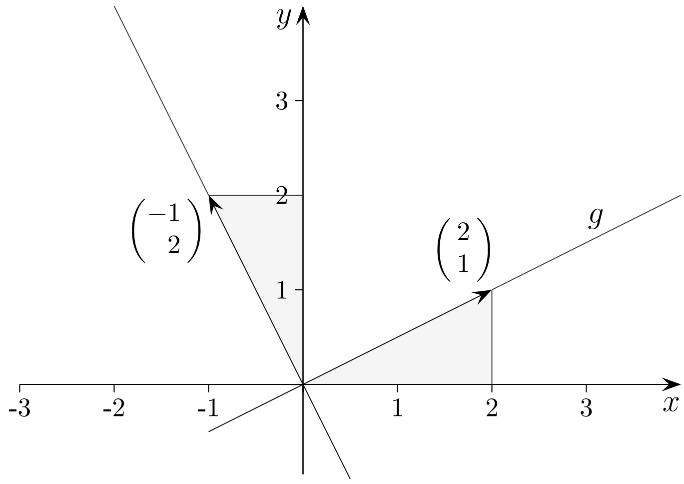


Wie lautet die vektorielle Darstellung der Geraden g: $y = \frac{1}{2}x$?

Die Gleichung einer Ursprungsgeraden kann auf die Form $ax + by = 0$ gebracht werden.

Welche Bedeutung hat dann der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

Skalarprodukt



g: $\quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y = \dfrac{1}{2}x \qquad \Longleftrightarrow \qquad -x + 2y = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax + by = 0$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Das eine Dreieck geht durch Drehung um 90° um den Ursprung aus dem anderen hervor.

$\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ allgemeiner

$\begin{pmatrix} -ra \\ rb \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$

Mit der Definition des Skalarprodukts

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$$

erkennen wir:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

g kann durch

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ (Normalenform) beschrieben werden. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ heißt Normalenvektor.

Welches geometrische Objekt wird wohl durch $x + 2y + z = 0$ erfasst und welche Bedeutung hat der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Ebene (z. B.) $\quad x + 2y + z = 0$

Um zu erkennen, dass die Lösungen der Gleichung $x + 2y + z = 0$ die Punkte einer Ebene durch den Ursprung sind, stellen wir die Gleichung nach z um: $z = -x - 2y$
Für $x = y = 0$ erhalten wir $z = 0$. Wenn der x-Wert um 1 vergrößert wird, verringert sich der z-Wert um 1, für $x = 2$ verringert sich der z-Wert um 2, usw.
Die Steigung in x-Achsenrichtung beträgt daher -1, und zwar unabhängig vom y-Wert.
In y-Achsenrichtung beträgt die Steigung -2.