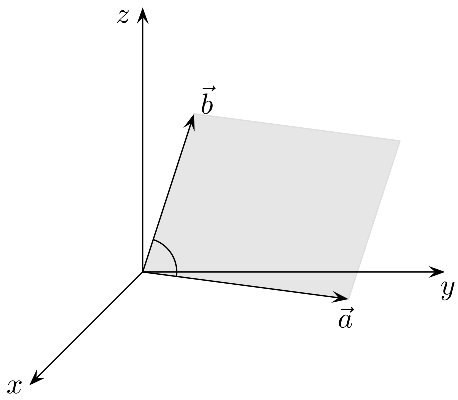
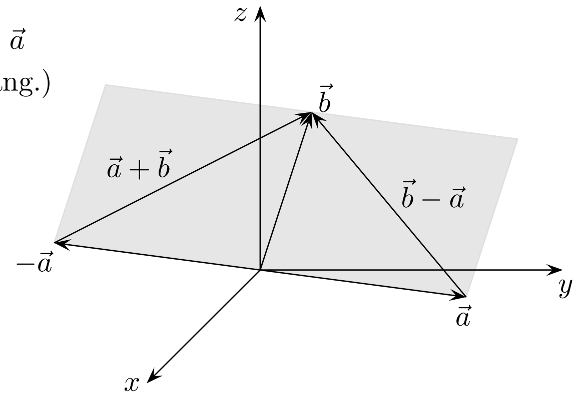
Skalarprodukt

Gibt es ein einfaches Kriterium, um nachzuprüfen, ob zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander stehen?



Der nebenstehenden Zeichnung entnehmen wir, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn die Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{b}-\vec{a}$ gleiche Länge besitzen. Wenn wir die Längen mit Hilfe der Komponenten ausrechnen, erhalten wir die gesuchte Bedingung:

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff |\,\vec{a}+\vec{b}\,| = |\,\vec{b}-\vec{a}\,|$ (Die Diagonalen des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms sind gleich lang.)



Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

beachte: $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + (a_3+b_3)^2} = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$$

$\iff$

. *Klammern auflösen, in Gedanken reicht, auf beiden Seiten stehen die gleichen Quadrate*

. *zusammenfassen, vereinfachen:*

$$\iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

Wie wir später sehen werden, hat der Ausdruck $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ für die Winkelberechnung auch dann eine Bedeutung, wenn er nicht null ist. Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition des Skalarprodukts:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Satz: $\quad \vec{a} \perp \vec{b} \quad \iff \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Rechenregeln:

1.) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2.) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

3.) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$

4.) $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\,\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$

wobei gilt: $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a}$

1. Gib zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vier Vektoren an, die auf $\vec{a}$ senkrecht stehen. Überprüfe die Lösung mit einer Zeichnung.

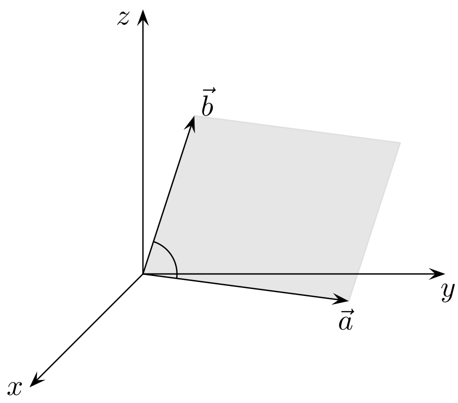
2. Gib vier Vektoren an, die zu der Geraden, die durch $A(2\,|\,1\,|\,-3)$ und $B(-4\,|\,3\,|\,5)$ verläuft, senkrecht stehen.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 0 + (-3)\cdot 4 + 2\cdot 6 = 0$$

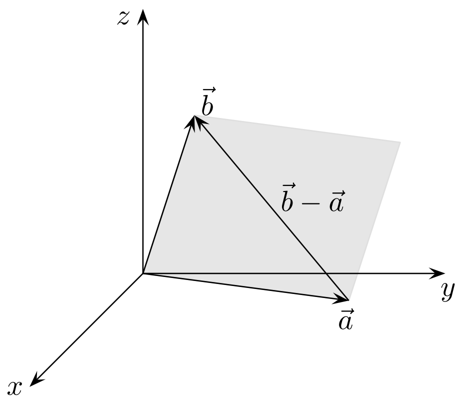
Die beiden Vektoren stehen daher senkrecht aufeinander.

Skalarprodukt



Gibt es ein einfaches Kriterium, um nachzuprüfen, ob zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander stehen?

Der nebenstehenden Zeichnung entnehmen wir, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn gilt:
$\mid \vec{a} \mid^2 + \mid \vec{b} \mid^2 = \mid \vec{b} - \vec{a} \mid^2$ (Satz des Pythagoras, Umkehrung).
Wenn wir die Längen mit Hilfe der Komponenten ausrechnen, erhalten wir die gesuchte Bedingung.



Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

beachte: $\mid \vec{a} \mid = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

$\iff$

. *Klammern auflösen, in Gedanken reicht, auf beiden Seiten stehen die gleichen Quadrate*

. *zusammenfassen, vereinfachen*

$$\iff a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

Wie wir später sehen werden, hat der Ausdruck $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ für die Winkelberechnung auch dann eine Bedeutung, wenn er nicht null ist.
Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition des Skalarprodukts:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

1. Gib zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vier Vektoren an, die auf $\vec{a}$ senkrecht stehen. Überprüfe die Lösung mit einer Zeichnung.

2. Gib vier Vektoren an, die zu der Geraden, die durch $A(2 \mid 1 \mid -3)$ und $B(-4 \mid 3 \mid 5)$ verläuft, senkrecht stehen.

Satz: $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Rechenregeln:

1.) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2.) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3.) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \, (\vec{a} \cdot \vec{b})$

4.) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\,\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$

wobei gilt: $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a}$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 0$$

Die beiden Vektoren stehen daher senkrecht aufeinander.

3. Die Eckpunkte eines Dreiecks sind $A(1 \mid 2 \mid 1)$, $B(-1 \mid 4 \mid 2)$ und $C(2 \mid 3 \mid 1)$.

   a) Zeige, dass das Dreieck rechtwinklig ist und bestimme die Ecke des rechten Winkels.

   b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

4. Gegeben sind die Punkte $A(5 \mid 0 \mid a)$ und $B(2 \mid 4 \mid 5)$. Der Koordinatenursprung wird mit O bezeichnet.

   a) Bestimme denjenigen Wert von a, für den A und B den Abstand 5 haben.

   b) Ermittle denjenigen Wert von a, für den das Dreieck OAB im Punkt B rechtwinklig ist.

5. Welcher Punkt Q auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat vom Punkt $P(-4 \mid 6 \mid 7)$ die kleinste Entfernung?

   Bestimme mit Q den Abstand Punkt/Gerade.

6. Die Punkte $A(7 \mid 3 \mid 0)$, $B(5 \mid 3 \mid 4)$ und $C_t(5 + 2t \mid 3 \mid 4 + t)$, $t \neq 0$, bilden ein Dreieck.

   a) Zeige, dass jedes dieser Dreiecke bei B einen rechten Winkel hat.

   b) Bestimme alle Werte von t, für die im jeweiligen Dreieck ABC_t zwei Innenwinkel gleich groß sind.

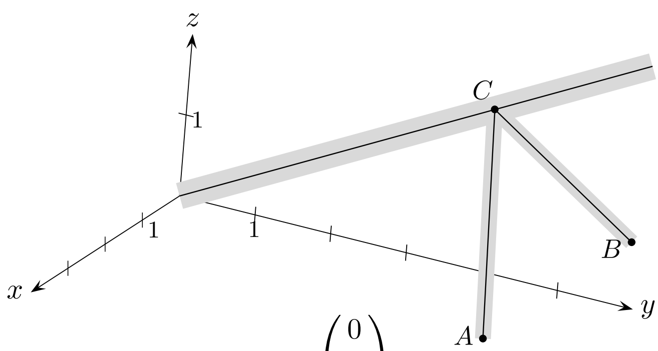
7. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sind die Geraden g_a und h_a gegeben durch

   $$g_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Die Geraden g_a und h_a haben den gemeinsamen Punkt $P(1 \mid 1 \mid 1)$.

   a) Untersuchen Sie, ob es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, für das g_a und h_a sogar identisch sind.

   b) Zeigen Sie, dass es genau ein $a \in \mathbb{R}$ derart gibt, so dass g_a und h_a orthogonal zueinander sind.

8. 

   Eine Rohrleitung verläuft modellmäßig vom Ursprung in Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Sie wird durch zwei gleichlange, symmetrisch zur Rohrleitung angeordnete Streben abgestützt. Die linke Strebe verläuft vom Punkt $A(2 \mid 5 \mid 0)$ zum Punkt $C(0 \mid 4 \mid 2)$.

   a) Weisen Sie nach, dass die linke Strebe senkrecht auf der Rohrleitung steht.

   b) Geben Sie die Koordinaten des in der xy-Ebene liegenden Punktes B an.

3. Die Eckpunkte eines Dreiecks sind $A(1\,|\,2\,|\,1)$, $B(-1\,|\,4\,|\,2)$ und $C(2\,|\,3\,|\,1)$.

a) Zeige, dass das Dreieck rechtwinklig ist und bestimme die Ecke des rechten Winkels.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$ Der rechte Winkel ist bei Punkt A.

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

$$F = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\,| \cdot |\overrightarrow{AC}\,| = \frac{1}{2}\sqrt{9}\sqrt{2} \approx 2{,}121$$

4. Gegeben sind die Punkte $A(5\,|\,0\,|\,a)$ und $B(2\,|\,4\,|\,5)$. Der Koordinatenursprung wird mit O bezeichnet.

a) Bestimme denjenigen Wert von a, für den A und B den Abstand 5 haben.

$$|\overrightarrow{AB}\,| = |\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5-a \end{pmatrix}| = \sqrt{25 + (5-a)^2} = 5, \quad a = 5$$

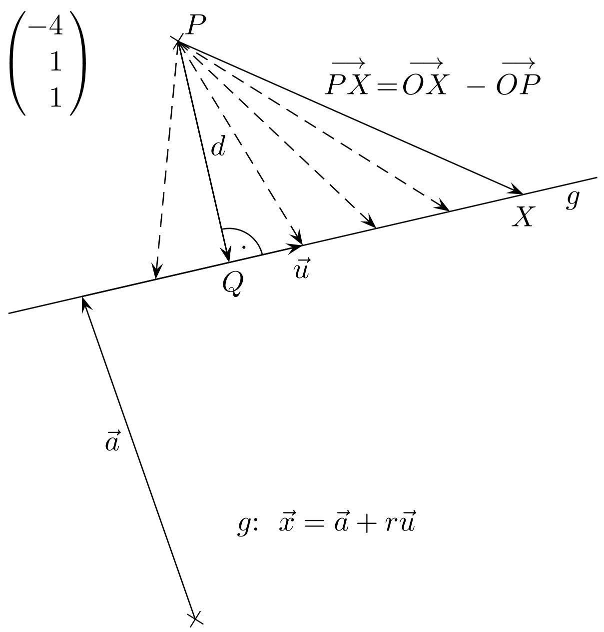
b) Ermittle denjenigen Wert von a, für den das Dreieck OAB im Punkt B rechtwinklig ist.

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5-a \end{pmatrix} = 35 - 5a = 0, \quad a = 7$$

5. Welcher Punkt Q auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat vom Punkt $P(-4\,|\,6\,|\,7)$ die kleinste Entfernung?

Bestimme mit Q den Abstand Punkt/Gerade. Bed. $\overrightarrow{PX} \perp \vec{u}$

$$\Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OX}} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}\Bigg] = \Bigg[\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg] \perp \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$(-24 - 6 - 6) + r(16 + 1 + 1) = 0, \quad r = 2$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$d = |\overrightarrow{PQ}\,| = |\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

6. Die Punkte $A(7\,|\,3\,|\,0)$, $B(5\,|\,3\,|\,4)$ und $C_t(5+2t\,|\,3\,|\,4+t)$, $t \neq 0$, bilden ein Dreieck.

a) Zeige, dass jedes dieser Dreiecke bei B einen rechten Winkel hat.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC_t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = 4t - 4t = 0$$

b) Bestimme alle Werte von t, für die im jeweiligen Dreieck ABC_t zwei Innenwinkel gleich groß sind.

$$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC_t}| \iff \sqrt{20} = \sqrt{5t^2} \iff t_{1/2} = \pm t$$

7. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sind die Geraden g_a und h_a gegeben durch

$$g_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Geraden g_a und h_a haben den gemeinsamen Punkt $P(1\,|\,1\,|\,1)$.

a) Untersuchen Sie, ob es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, für das g_a und h_a sogar identisch sind.

Die Geraden g_a und h_a sind identisch, wenn es ein k gibt, so dass $k\begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

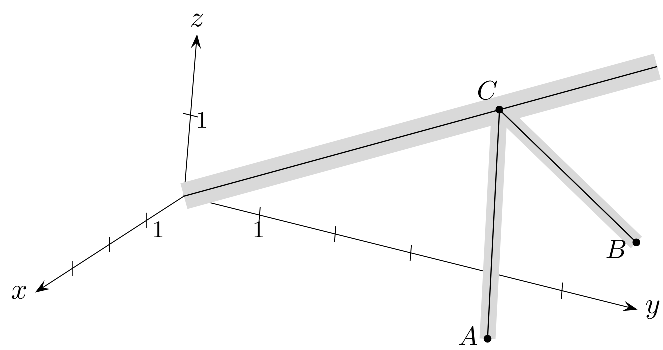
Für $a = 8$ und $k = 2$ ist dies wegen $2\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass es genau ein $a \in \mathbb{R}$ derart gibt, so dass g_a und h_a orthogonal zueinander sind.

Wegen $\begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \iff 2a^2 + 4a + 2 = 0 \iff 2(a+1)^2 = 0 \iff a = -1$

sind die Geraden g_a und h_a nur für $a = -1$ orthogonal zueinander.

8.



Eine Rohrleitung verläuft modellmäßig vom Ursprung in Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

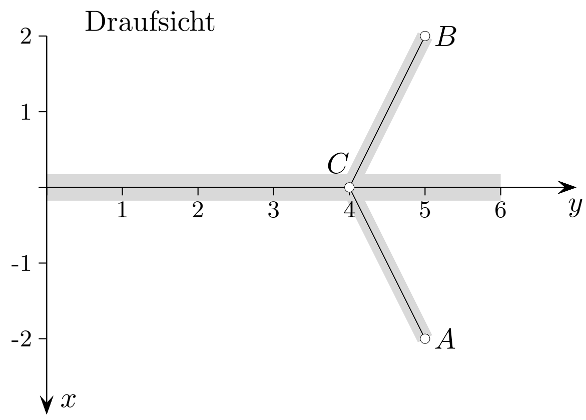
Sie wird durch zwei gleichlange, symmetrisch zur Rohrleitung angeordnete Streben abgestützt. Die linke Strebe verläuft vom Punkt $A(2\,|\,5\,|\,0)$ zum Punkt $C(0\,|\,4\,|\,2)$.

a) Weisen Sie nach, dass die linke Strebe senkrecht auf der Rohrleitung steht.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

b) Geben Sie die Koordinaten des in der xy-Ebene liegenden Punktes B an. $B(-2 \,|\, 5 \,|\, 0)$

B ist der an der y-Achse gespiegelte Punkt A.



Siehe auch: Skalarprodukt Fortsetzung
Startseite