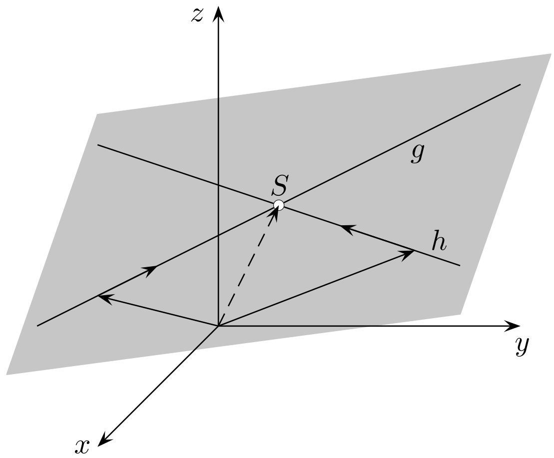
Schnittpunkt von Geraden

1. Untersuche, ob sich die beiden Geraden schneiden und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Lösung:
Genau dann, wenn ein Schnittpunkt vorliegt, muss es für die beiden Geraden λ-Werte geben (im allgemeinen verschiedene), so dass sich für diese λ-Werte auf den linken Seiten der Geradengleichungen der Vektor $\overrightarrow{OS}$ ergibt, der zum Schnittpunkt führt.
Daher lautet die Schnittbedingung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Um die mögliche Verschiedenheit der Parameterwerte zu berücksichtigen, müssen sie verschieden benannt werden.

Wir ordnen um und fassen zusammen:

$$\lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

λ und μ müssen die <u>drei</u> Gleichungen erfüllen:

$$\begin{array}{llcrcrcrl} I. & & 4\lambda & - & 5\mu & = & -9 & \\ II. & & 2\lambda & + & 2\mu & = & 0 & \mid \cdot(-2) \\ \hline III. & & -\lambda & - & 3\mu & = & -2 & \end{array}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen können λ und μ bestimmt werden:

$$\begin{array}{rrcr} II. \cdot (-2) + I. & -9\mu & = & -9 \\ & \mu & = & 1 \\ \mu = 1 \text{ in } I. \text{ oder } II. \text{ eingesetzt, ergibt:} & \lambda & = & -1 \end{array}$$

Genau dann, wenn die errechneten Werte auch eine Lösung der Gleichung III. sind, liegt ein Schnittpunkt vor.
Wir setzen $\lambda = -1$ und $\mu = 1$ in III. ein und erhalten:

$$1 - 3 = -2$$

$\lambda = -1$ *(oder $\mu = 1$) in die Geradengleichung eingesetzt, ergibt den Schnittpunkt:* $S(2\,|\,1\,|\,3)$.

2. Untersuche, ob sich die beiden Geraden schneiden und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von Geraden

2. Untersuche, ob sich die beiden Geraden schneiden und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösungen:

λ in h in μ umbenannt

2. a) $\lambda = 2, \quad \mu = -3, \quad S(2 \mid -4 \mid 1)$

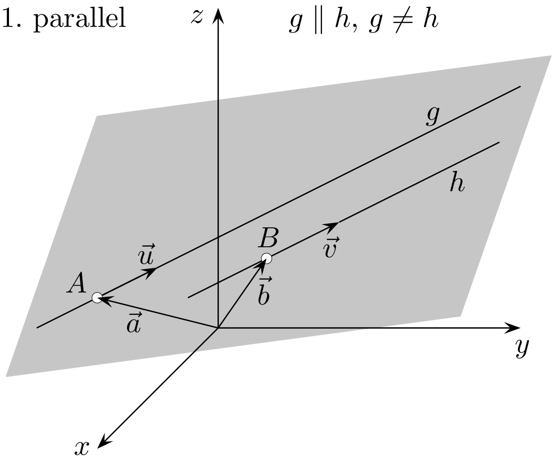
b) $\lambda = -2, \quad \mu = 3,$

kein Schnittpunkt

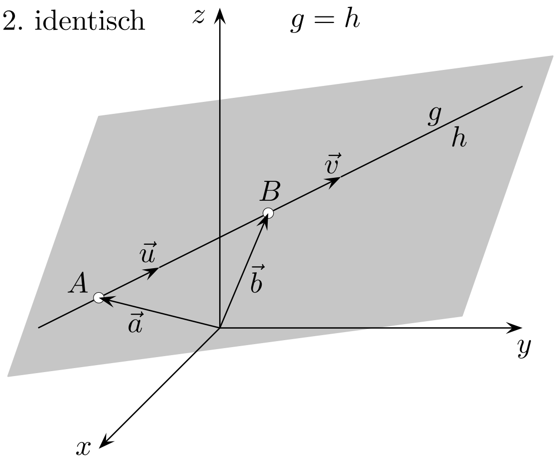
Gegenseitige Lage von Geraden

$$g\colon\quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$$
$$h\colon\quad \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{v}$$

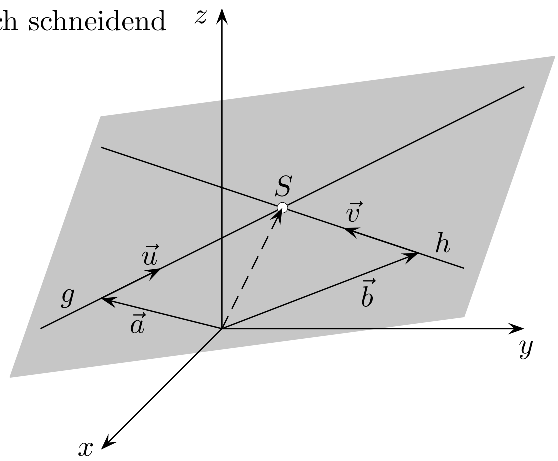
1. parallel $\quad g \parallel h,\ g \neq h$



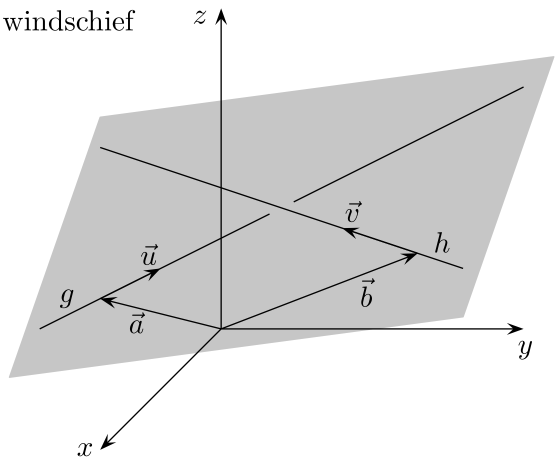
2. identisch $\quad g = h$



3. sich schneidend



4. windschief



Erläutere eine Vorgehensweise, um die Lage zweier Geraden zueinander zu ermitteln.

Gegenseitige Lage von Geraden

Sind die Richtungsvektoren von g und h Vielfache voneinander (kollinear)?
Wenn ja, liegt ein Punkt von g auf h?
...

Falls $g \nparallel h$, schneiden sich die Geraden?
...

Untersuche die Lagebeziehung.

1. $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

4. $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gegenseitige Lage von Geraden

Untersuche die Lagebeziehung.

1. $g\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ identisch

2. $g\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad h\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ windschief

3. $g\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad h\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ echt parallel

4. $g\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $S(-1\,|\,1\,|\,3)$

Schnittpunkt von Geraden

Gegeben sind die Geraden g_t: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h_t: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$

Für welche(s) $t \in \mathbb{R}$ sind die Geraden parallel zueinander, windschief oder haben einen Schnittpunkt? Falls ein Schnittpunkt existiert, bestimme diesen.

Schnittpunkt von Geraden

Gegeben sind die Geraden g_t: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h_t: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$

Für welche(s) $t \in \mathbb{R}$ sind die Geraden parallel zueinander, windschief oder haben einen Schnittpunkt? Falls ein Schnittpunkt existiert, bestimme diesen.

$t = 0$ parallel und nicht identisch, z. B. $A(0 \mid 1 \mid 1) \notin h_0$

$t = 1$ Schnittpunkt $S(2 \mid 1 \mid 3)$, $\lambda = 2$ (g_t) und $\mu = -1$ (h_t)

$t \in \mathbb{R} \setminus \{1; 0\}$ Geraden windschief