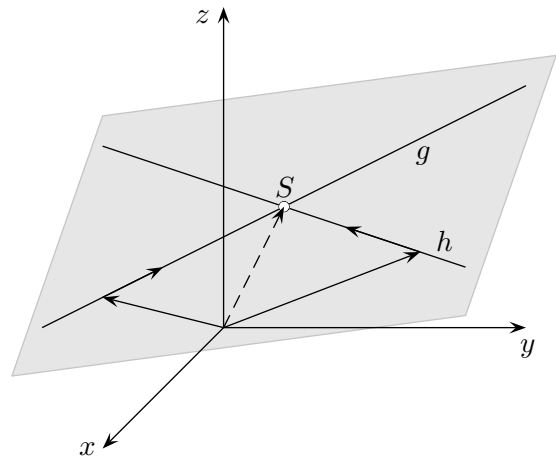


# Schnittpunkt von Geraden

1. Untersuche, ob sich die beiden Geraden schneiden und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Lösung:

Genau dann, wenn ein Schnittpunkt vorliegt, muss es für die beiden Geraden  $\lambda$ -Werte geben (im allgemeinen verschiedene), so dass sich für diese  $\lambda$ -Werte auf den linken Seiten der Geradengleichungen der Vektor  $\vec{OS}$  ergibt, der zum Schnittpunkt führt.

Daher lautet die Schnittbedingung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Um die mögliche Verschiedenheit der Parameterwerte zu berücksichtigen, müssen sie verschieden benannt werden.

Wir ordnen um und fassen zusammen:

$$\lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda$  und  $\mu$  müssen die drei Gleichungen erfüllen:

$$\begin{array}{rcll} I. & 4\lambda & - & 5\mu & = & -9 \\ II. & 2\lambda & + & 2\mu & = & 0 & | \cdot (-2) \\ \hline III. & -\lambda & - & 3\mu & = & -2 \end{array}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen können  $\lambda$  und  $\mu$  bestimmt werden:

## Schnittpunkt von Geraden

$$\begin{array}{rcl} II. \cdot (-2) + I. & -9\mu & = -9 \\ & \mu & = 1 \\ \mu = 1 \text{ in I. oder II. eingesetzt, ergibt:} & \lambda & = -1 \end{array}$$

Genau dann, wenn die errechneten Werte auch eine Lösung der Gleichung III. sind, liegt ein Schnittpunkt vor.

Wir setzen  $\lambda = -1$  und  $\mu = 1$  in III. ein und erhalten:

$$1 - 3 = -2$$

$\lambda = -1$  (oder  $\mu = 1$ ) in die Geradengleichung eingesetzt, ergibt den Schnittpunkt:  $S(2 \mid 1 \mid 3)$ .

2. Untersuche, ob sich die beiden Geraden schneiden und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$\text{a) } g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## Schnittpunkt von Geraden

2. Untersuche, ob sich die beiden Geraden schneiden und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$\text{a) } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

*Lösungen:*

$\lambda$  in  $h$  in  $\mu$  umbenannt

$$2. \text{ a) } \lambda = 2, \quad \mu = -3, \quad S(2 \mid -4 \mid 1)$$

$$\text{b) } \lambda = -2, \quad \mu = 3, \\ \text{kein Schnittpunkt}$$

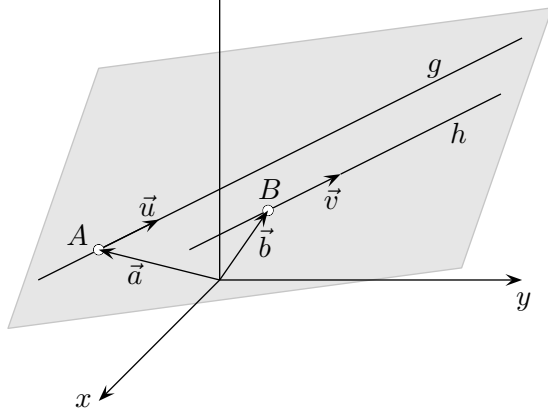
# Gegenseitige Lage von Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{v}$$

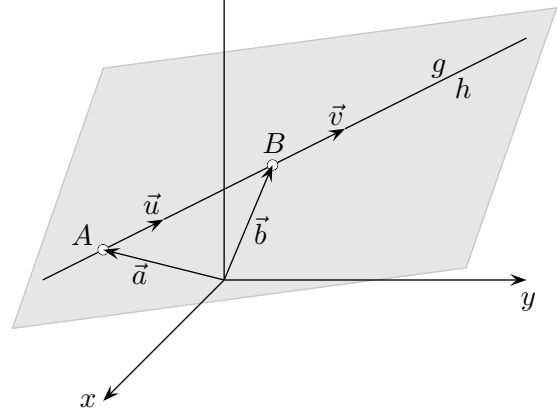
1. parallel

$$g \parallel h, g \neq h$$

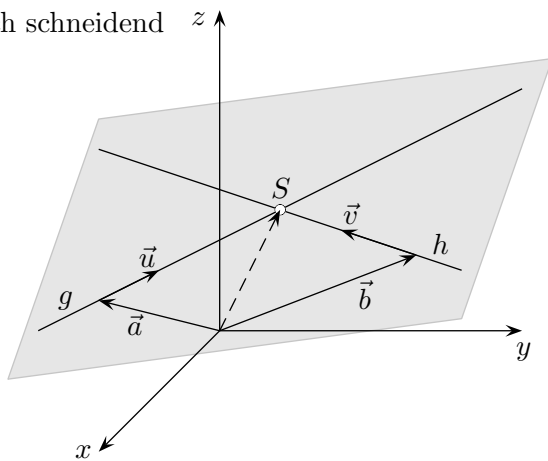


2. identisch

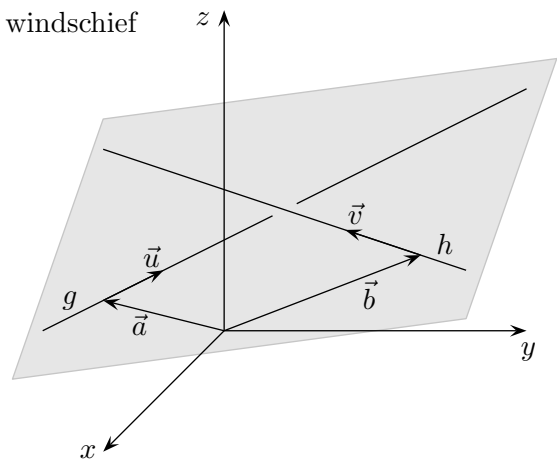
$$g = h$$



3. sich schneidend



4. windschief



Erläutere eine Vorgehensweise, um die Lage zweier Geraden zueinander zu ermitteln.

## Gegenseitige Lage von Geraden

Sind die Richtungsvektoren von  $g$  und  $h$  Vielfache voneinander (kollinear)?  
Wenn ja, liegt ein Punkt von  $g$  auf  $h$ ?

...

Falls  $g \nparallel h$ , schneiden sich die Geraden?

...

Untersuche die Lagebeziehung.

$$1. \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## Gegenseitige Lage von Geraden

Untersuche die Lagebeziehung.

1.  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$      $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$     identisch

2.  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$      $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$     windschief

3.  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$      $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$     echt parallel

4.  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$      $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$      $S(-1 | 1 | 3)$

## Schnittpunkt von Geraden

Gegeben sind die Geraden  $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$

Für welche(s)  $t \in \mathbb{R}$  sind die Geraden parallel zueinander, windschief oder haben einen Schnittpunkt? Falls ein Schnittpunkt existiert, bestimme diesen.

## Schnittpunkt von Geraden

Gegeben sind die Geraden  $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$

Für welche(s)  $t \in \mathbb{R}$  sind die Geraden parallel zueinander, windschief oder haben einen Schnittpunkt? Falls ein Schnittpunkt existiert, bestimme diesen.

$t = 0$  parallel und nicht identisch, z.B.  $A(0 | 1 | 1) \notin h_0$

$t = 1$  Schnittpunkt  $S(2 | 1 | 3)$ ,  $\lambda = 2$  ( $g_t$ ) und  $\mu = -1$  ( $h_t$ )

$t \in \mathbb{R} \setminus \{1; 0\}$  Geraden windschief



Startseite