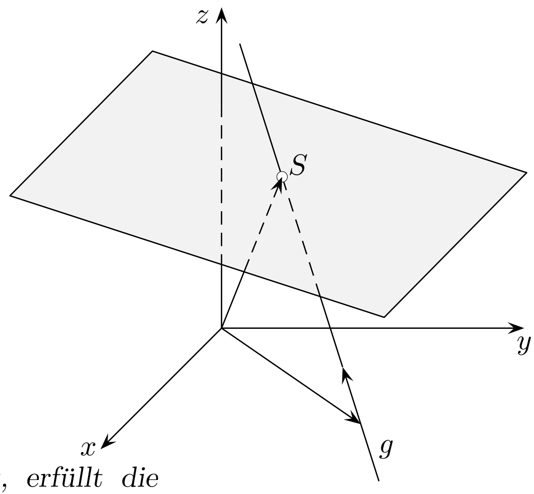
Schnittpunkt Gerade/Ebene



1. Berechne den Schnittpunkt der Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Ebene E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$

Lösung:

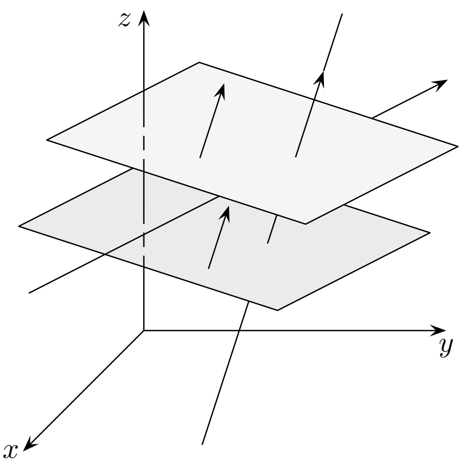
Der gesuchte Vektor $\vec{x}$, der zum Schnittpunkt S führt, erfüllt die Geraden- und die Ebenengleichung, daher lautet die Schnittbedingung:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 4 = 0$$

$$20 - 8\lambda - 4 = 0$$

$$-8\lambda = -16$$

$$\lambda = 2$$



$\lambda = 2$ in die Geradengleichung eingesetzt,
ergibt den Schnittpunkt $S(6 \,|\, -3 \,|\, 1)$.

Mit dem Normalenvektor können Lagebeziehungen leicht untersucht werden:

Eine Gerade verläuft senkrecht zu einer Ebene, falls der Richtungsvektor der Geraden kollinear zum Normalenvektor der Ebene ist.

Eine Gerade verläuft parallel zu einer Ebene, falls der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zum Normalenvektor der Ebene verläuft, falls also das Skalarprodukt von Richtungsvektor und Normalenvektor null ergibt.

Zwei Ebenen verlaufen parallel, falls ihre Normalenvektoren kollinear sind.

2. Berechne den Schnittpunkt von Gerade und Ebene:

a) $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E: \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$

b) $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad E: \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 5 = 0$

Schnittpunkt Gerade/Ebene

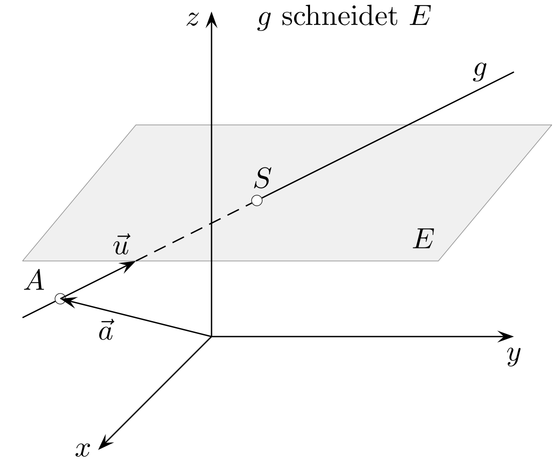
Lösungen:

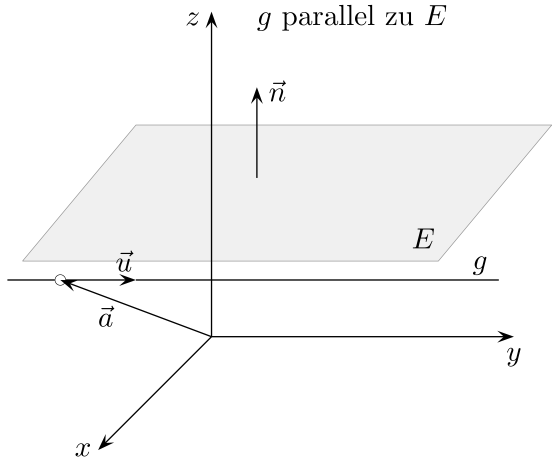
2. a) $S(5\,|\,-1\,|\,5)$, $\lambda = 2$

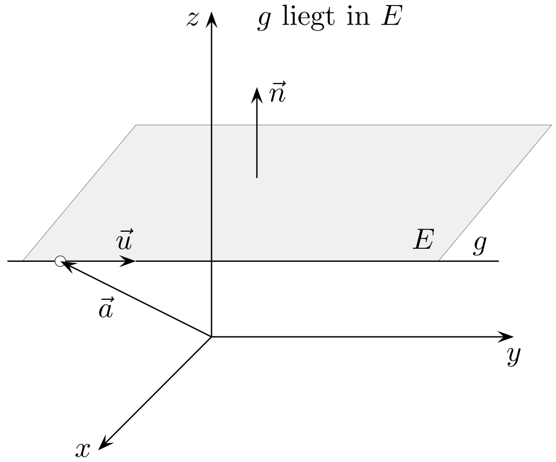
   b) $S(1\,|\,3\,|\,7)$, $\lambda = 3$

Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

$g\colon\quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$







Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

Untersuche die Lagebeziehung.

1. $g\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E\colon\quad 2x_1 - x_3 = 4$

2. $g\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E\colon\quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$

3. $g\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E\colon\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

Untersuche die Lagebeziehung.

1. $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad E\colon \quad 2x_1 - x_3 = 4$ $\qquad S(2 \,|\, -5 \,|\, 0)$

2. $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad E\colon \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$ $\qquad g$ liegt in E

3. $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad E\colon \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $\qquad g$ echt parallel zu E

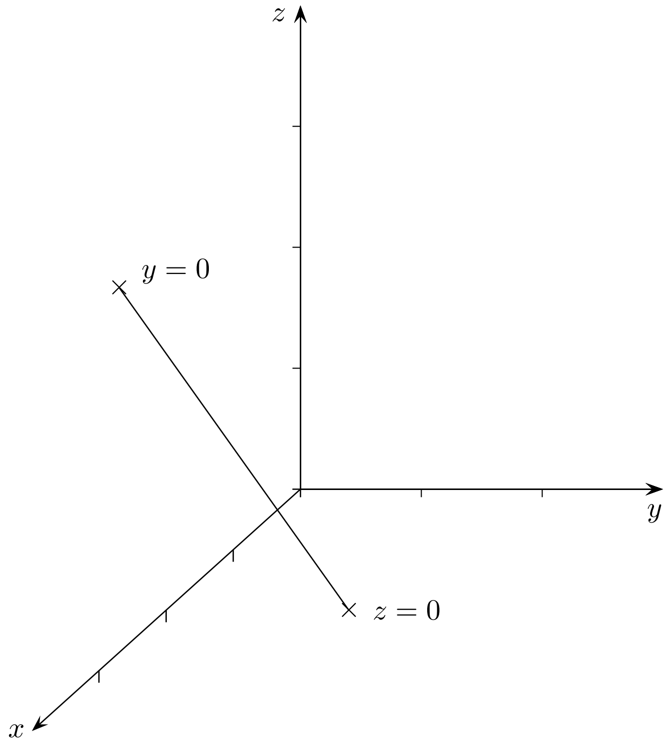
Spuren in der Ebene

Spurpunkte einer Geraden

Die Punkte, in denen die Gerade die Koordinatenebenen schneidet, heißen Spurpunkte.

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Für den Spurpunkt auf der xy-Ebene gilt $z = 0$.
Es muss für diesen Punkt $0 = a_3 + \lambda u_3$ sein.
Diese Beziehung wird nach λ aufgelöst und in die Geradengleichung eingesetzt.



Spurgerade einer Ebene

Die Geraden, in denen die Ebene die Koordinatenebenen schneidet, heißen Spurgeraden.

$$E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Für die Spurgerade in der xy-Ebene gilt $z = 0$.
Es muss für diese Gerade $0 = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$ sein.
Diese Beziehung wird nach λ oder μ aufgelöst und in die Ebenengleichung eingesetzt, anschließend wird zusammengefasst.