

# Schnitt zweier Ebenen

1. Gegeben sind die beiden Ebenen:

$$E_1: \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0 \qquad E_2: \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 6 = 0$$

Bestimme die Schnittgerade.

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden zweier Ebenen steht senkrecht auf den Normalenvektoren beider Ebenen.

Ein Richtungsvektor ergibt sich daher aus dem Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 26 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Ein Stützvektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  müsste beiden Ebenengleichungen genügen:

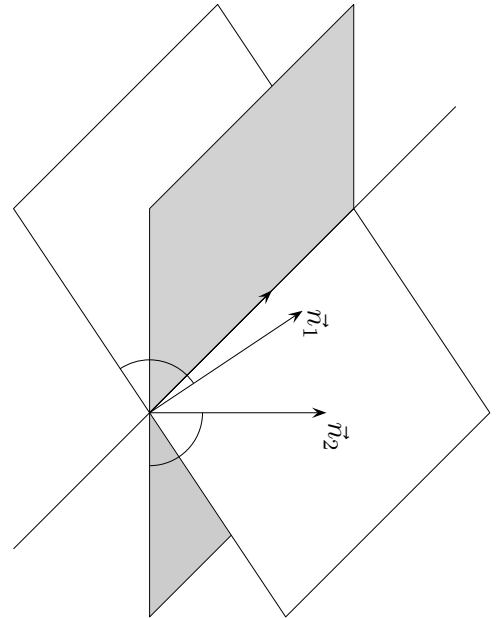
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 6 = 0$$

Hierbei kann eine Koordinate z.B.  $z = 0$  vorgegeben werden,  $x$  und  $y$  sind dann auszurechnen.

$$\begin{array}{r} 3x - 4y = 1 \\ 5x + 2y = 6 \\ \hline x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir die Gleichung der Schnittgeraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$



2. Bestimme die Schnittgerade.

$$\text{a) } E_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0 \qquad E_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$$

$$\text{b) } E_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0 \qquad E_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 2 = 0$$

## Schnitt zweier Ebenen

2. Bestimme die Schnittgerade.

$$\text{a) } E_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0 \quad E_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$$

$$\text{Lösung: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } E_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0 \quad E_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 2 = 0$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Alternativ zum obigen Vorgehen kann auch das Gleichungssystem gelöst werden (z. B.  $z$  fest):

$$\begin{array}{r} 3x - 4y + z = 1 \\ 5x + 2y - 3z = 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Lösung: } S\left(\frac{5}{13}z + 1 \mid \frac{7}{13}z + \frac{1}{2} \mid z\right)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13}z + 1 \\ \frac{7}{13}z + \frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{7}{13} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

## Schnittgerade zweier Ebenen mit dem GTR

Das unterbestimmte Gleichungssystem, das beim Schnitt von nicht parallelen Ebenen auftritt, kann ohne Mühe mit dem GTR gelöst werden:

$$\begin{array}{r} 3x - 4y + z = 1 \\ 5x + 2y - 3z = 6 \end{array}$$

---

Der GTR liefert:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -\frac{5}{13} \quad 1 \\ 0 \quad 1 \quad -\frac{7}{13} \quad \frac{1}{2} \end{array}$$

---

Das heißt:

$$\begin{array}{r} x + \left(-\frac{5}{13}z\right) = 1 \\ y + \left(-\frac{7}{13}z\right) = \frac{1}{2} \end{array}$$

---

und damit:

$$\begin{array}{r} x = \frac{5}{13}z + 1 \\ y = \frac{7}{13}z + \frac{1}{2} \end{array}$$

---

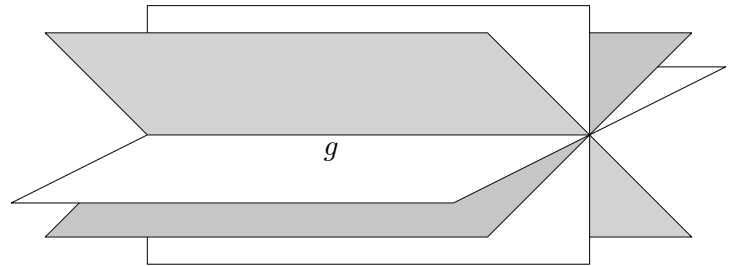
Lösung:  $S\left(\frac{5}{13}z + 1 \mid \frac{7}{13}z + \frac{1}{2} \mid z\right)$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13}z + 1 \\ \frac{7}{13}z + \frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{7}{13} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

# Ebenenschar

Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u}$ .

Wie lautet die Gleichung der Ebenenschar, deren gemeinsame Schnittgerade  $g$  ist?



Die Ebenenschar ist von den Parametern  $k_1, k_2$  abhängig:

$$E_{k_1, k_2}: \vec{n} \cdot [\vec{x} - \vec{a}] = 0$$

mit  $\vec{n} = \begin{pmatrix} k_1 u_3 \\ k_2 u_3 \\ -k_1 u_1 - k_2 u_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$\vec{n}$  erhalten wir aus der Bedingung  $\vec{n} \perp \vec{u}$ , d.h.  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ .  
Die Probe bestätigt die Korrektheit.

Ein Beispiel:

Sei die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  gegeben.

Die zugehörige Ebenenschar ist dann:

$$E_{k_1, k_2}: \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

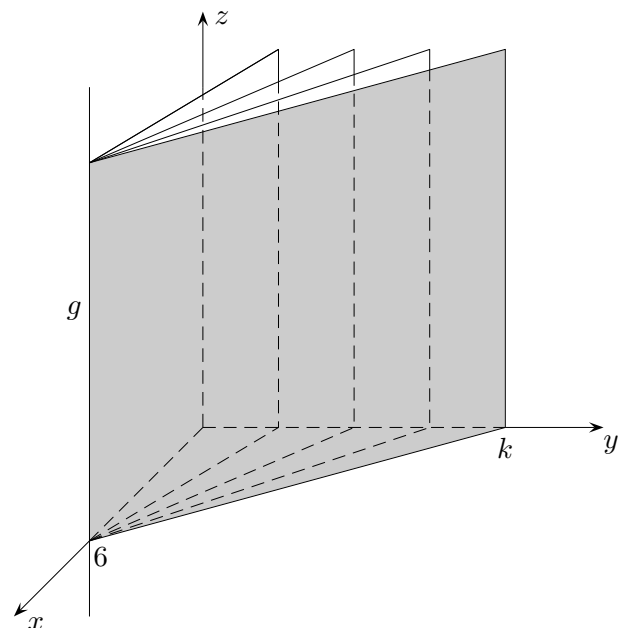
oder in Koordinatenform:  $k_1 x + k_2 y - 6k_1 = 0$ .

Soll als Bedingung die  $y$ -Achse an der Stelle  $y = k$  geschnitten werden, so erhalten wir:

$$E_k: kx + 6y - 6k = 0.$$

Frage:

Sind die Ebenenscharen  $E_k$  und  $E_{k_1, k_2}$  identisch?



$$G: x - 6 = 0$$

$$G \in E_{k_1, k_2}, \quad G \notin E_k$$

## Aufgabe Ebenenschar

1. Gegeben ist die Ebenenschar  $E_t : x_1 + tx_2 + 2x_3 = 5$ ,  $t \in \mathbb{R}$

Untersuchen Sie,

- a) ob alle Ebenen der Schar eine feste Gerade  $g$  gemeinsam haben und geben Sie ggf. die Gleichung dieser Geraden an,
- b) ob es eine Ebene mit größten Abstand vom Koordinatenursprung gibt,
- c) welche Grenzebene sich für  $t \rightarrow \infty$  ergibt.

## Ebenenschar Lösungshinweise

1. Gegeben ist die Ebenenschar  $E_t : x_1 + tx_2 + 2x_3 = 5$ ,  $t \in \mathbb{R}$

Untersuchen Sie,

- a) ob alle Ebenen der Schar eine feste Gerade  $g$  gemeinsam haben und geben Sie ggf. die Gleichung dieser Geraden an,

*Die Ebenenschar besitzt eine gemeinsame Schnittgerade, mehrere Begründungen sind möglich (Gleichungssystem, Orthogonalitätsbetrachtung, usw.)*

Eine mögliche Darstellung lautet:  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{r} x_1 + t_1 x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + t_2 x_2 + 2x_3 = 5 \\ \hline \end{array}$$

Subtraktion und  $t_1 \neq t_2$  führt zu  $x_2 = 0$ . Dann gilt  $x_1 + 2x_3 = 5$ .

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 - 2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- b) ob es eine Ebene mit größten Abstand vom Koordinatenursprung gibt,

*Um den größten Abstand vom Koordinatenursprung zu ermitteln, ist die Normalenform in die HNF zu überführen und das Maximum der Funktion  $f(t) = \frac{5}{\sqrt{t^2 + 5}}$  zu ermitteln. Es liegt an der Stelle  $t = 0$ .*

- c) welche Grenzebene sich für  $t \rightarrow \infty$  ergibt.

*Division durch  $t$  und  $t \rightarrow \infty$  führt zu  $y = 0$ , d. h. es ist die  $xz$ -Ebene.*

## Fallschirmsprung

Eine Person springt in 2 km Höhe mit einem Fallschirm aus einem Heissluftballon, dessen Flugbahn in der Ebene  $E: x + y + 5z = 22$  liegt.

Auf welcher Geraden  $g$  in der  $xy$ -Ebene befindet sich der Landeplatz?

## Fallschirmsprung

Eine Person springt in 2 km Höhe mit einem Fallschirm aus einem Heissluftballon, dessen Flugbahn in der Ebene  $E: x + y + 5z = 22$  liegt.

Auf welcher Geraden  $g$  in der  $xy$ -Ebene befindet sich der Landeplatz?

$E$  wird mit der Ebene  $z = 2$  geschnitten:

$$\text{möglich: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{möglich: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



1. Ermittle die Schnittgerade der Ebenen  $E_1: 2x + y + z = -1$  und  $E_2: x - 2y - 2z = 1$ .
2. Gehört die Ebene  $F: -2x + 2y - 6z = -8$  zur Ebenenschar  $E_a: x + ay - (2a - 1)z = 4$ ?
3. Für welches  $t$  ist  $E_t: x + (t - 3)y + (2t + 1)z + 1 = 0$  parallel zu einer Koordinatenachse?
4. Gegeben ist die Ebenenschar  $E_a: x + (1 - a)y + (a - 3)z = 3, a \in \mathbb{R}$ .
  - a) Untersuche, ob die Ebene  $F: 2x - 6y + 2z = 6$  zur Ebenenschar  $E_a$  gehört.
  - b) Weise nach, dass sich  $E_0$  und  $E_1$  schneiden.  
Bestimme die Gleichung der Schnittgeraden  $g$  und zeige, dass diese Schnittgerade in allen Ebenen der Schar liegt (Trägergerade).
  - c) Untersuche, ob die Ebene  $G: -y + z = 0$  zur Ebenenschar  $E_a$  gehört und ob  $G$   $g$  enthält.

1. Ermittle die Schnittgerade der Ebenen  $E_1: 2x + y + z = -1$  und  $E_2: x - 2y - 2z = 1$ .

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} - z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2. Gehört die Ebene  $F: -2x + 2y - 6z = -8$  zur Ebenenschar  $E_a: x + ay - (2a - 1)z = 4$ ?

$$a = -1, F = E_{-1}$$

Gleichung von  $E_a$  mit  $-2$  multiplizieren und Koeffizienten vergleichen

3. Für welches  $t$  ist  $E_t: x + (t - 3)y + (2t + 1)z + 1 = 0$  parallel zu einer Koordinatenachse?

$x$ -Achse nie

$y$ -Achse für  $t = 3$

$z$ -Achse für  $t = -\frac{1}{2}$

4. Gegeben ist die Ebenenschar  $E_a: x + (1 - a)y + (a - 3)z = 3$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

- a) Untersuche, ob die Ebene  $F: 2x - 6y + 2z = 6$  zur Ebenenschar  $E_a$  gehört.

$$F = E_4$$

- b) Weise nach, dass sich  $E_0$  und  $E_1$  schneiden.

Bestimme die Gleichung der Schnittgeraden  $g$  und zeige, dass diese Schnittgerade in allen Ebenen der Schar liegt (Trägergerade).

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) Untersuche, ob die Ebene  $G: -y + z = 0$  zur Ebenenschar  $E_a$  gehört und ob  $G$   $g$  enthält.

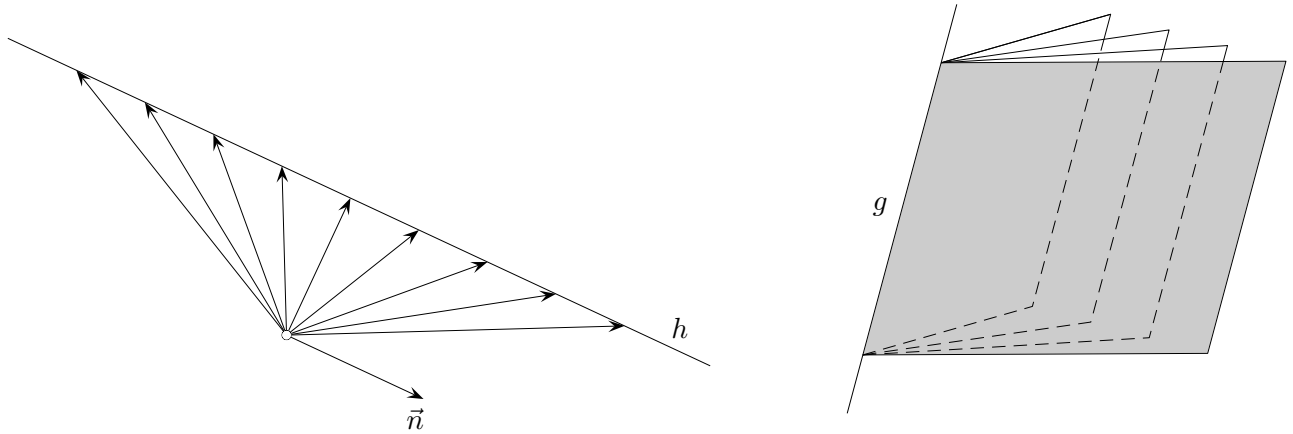
$$G \notin E_a$$

$$g \subset G$$

Die Trägergerade der Ebenenschar (Ebenenbündel)  $E_a: x + (1 - a)y + (a - 3)z = 3, a \in \mathbb{R}$ ,

lautet  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Wie finde ich eine Ebene, die  $g$  enthält, jedoch nicht zur Schar  $E_a$  gehört?



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - a \\ a - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Punkte, die zu den Normalenvektoren als Ortsvektoren gehören, liegen auf der Geraden  $h$ .

Mit  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  erhalten wir die Ebene  $G: -y + z = 0$ ,  
 (Die Null auf der rechten Seite ergibt sich erst aus der nachstehenden Umformung.)

von der  $G \notin E_a$  und  $g \subset G$  nachgewiesen werden kann.

Durch Auflösen der Klammern und Ausklammern von  $a$  erhalten wir für  $E_a$  die Darstellung:

$$E_a: x + y - 3z - 3 + a(-y + z) = 0$$

Für  $a = 0$  ist  $E_0$  unmittelbar zu sehen,  
 sowie  $g \subset G$ , beachte  $g \subset E_a, g \subset E_0$ .

weiteres Beispiel

Ebenenbündel  $E_a: (3 - 2a)y + (a - 2)z = a - 1$

Trägergerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E_a: 3y - 2z + 1 + a(-2y + z - 1) = 0, \quad E_0: 3y - 2z + 1 = 0$$

$$G: -2y + z = 1, \quad G \notin E_a, g \subset G$$