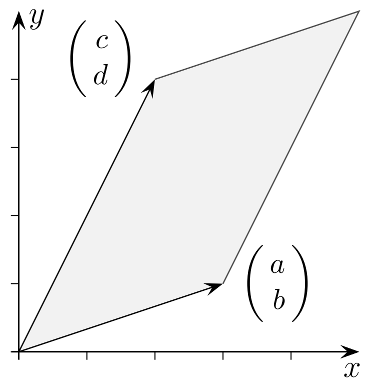
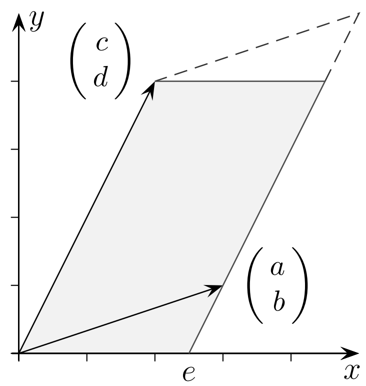
Flächeninhalt eines Parallelogramms

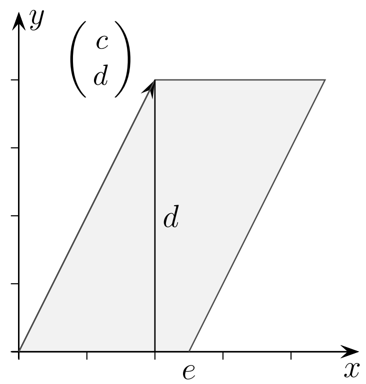
Gesucht ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms,
das von zwei Vektoren aufgespannt wird.



Durch eine Scherung wird die Berechnung vereinfacht.
Indem wir eine Geradengleichung aufstellen und eine Nullstelle berechnen, erhalten wir $e = a - \dfrac{b}{d} \cdot c$.

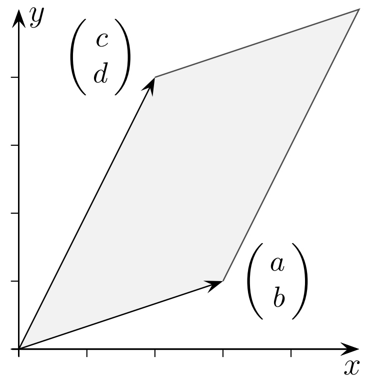


Multiplizieren wir e mit der Höhe d, so erhalten wir den
Inhalt $ad - bc$ des Parallelogramms.

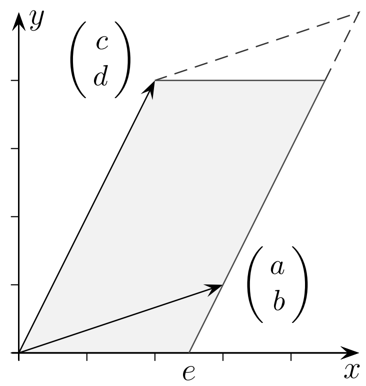


Flächeninhalt eines Parallelogramms alternativ

Der Determinante $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ entspricht dem Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

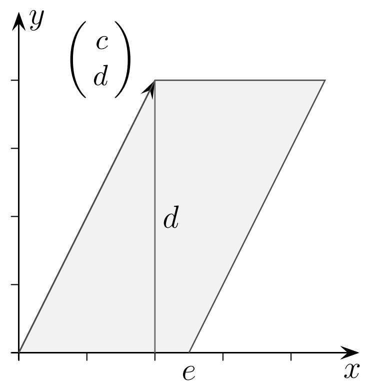


Durch eine Scherung erkennen wir: $A = e \cdot d$ (Höhe d)



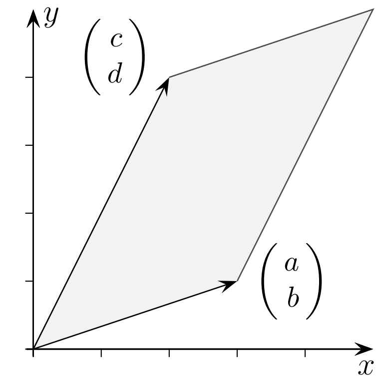
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e + \lambda c \\ \lambda d \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e + \lambda c & c \\ \lambda d & d \end{vmatrix} = \ldots = e \cdot d$$

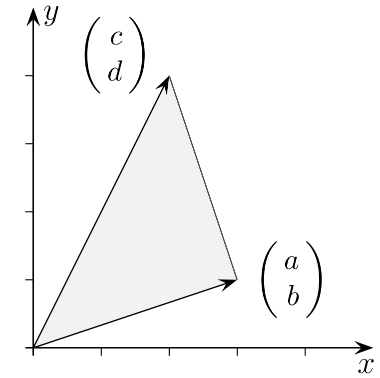


Flächeninhalt eines Parallelogramms   alternativ

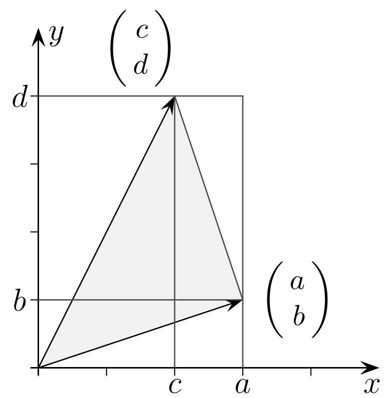
Der Determinante $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ entspricht dem Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms.



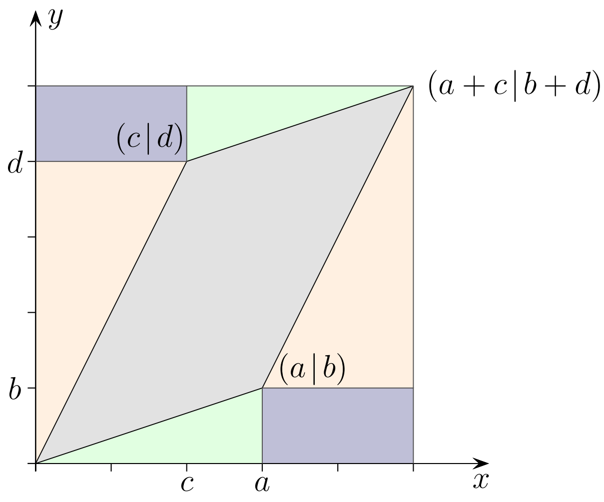
Wir begnügen uns zunächst mit der Hälfte.



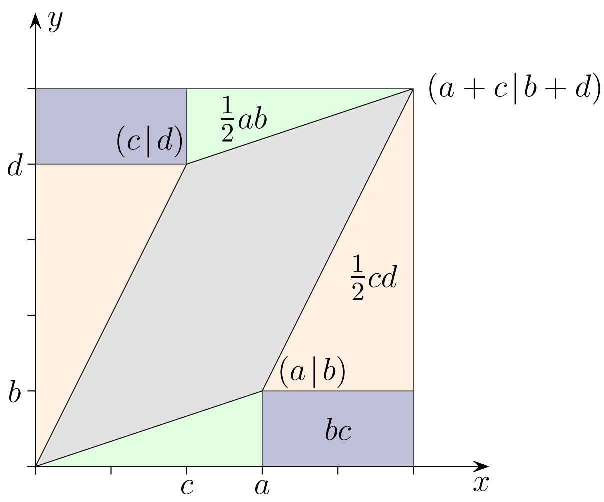
$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= ad - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}cd - \frac{1}{2}(a-c)(d-b) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2}(ad - bc) \end{aligned}$$



Flächeninhalt eines Parallelogramms   alternativ



$$
\begin{aligned}
A_{\text{Parallelogramm}} &= (a+c)\cdot(b+d) - ab - cd - 2bc \\
&= \ldots \\
&= ad - bc
\end{aligned}
$$



Determinanten

Wir entwickeln eine Lösungsformel für Gleichungssysteme mit zwei Variablen.

$$\begin{array}{rcrcl|l} ax & + & cy & = & e & \cdot(-b) \\ bx & + & dy & = & f & \cdot a \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcr} -abx & - & bcy & = & -be \\ abx & + & ady & = & af \end{array}\right\} +$$

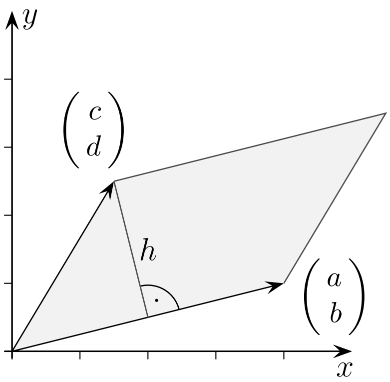
$$y(ad-bc) = af - be$$

$$y = \frac{af-be}{ad-bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} \qquad \text{analog} \qquad x = \frac{ed-cf}{ad-bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}$$

Man schreibt $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ *und nennt das Zahlenschema bzw. seinen Wert Determinante.*

Flächeninhalt eines Parallelogramms

Gesucht ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das von zwei Vektoren aufgespannt wird.



Naheliegend: $A = g \cdot h$

Um h zu ermitteln, sind die Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon\ \vec{x} = s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

zu schneiden.

Ergebnisse:

$$t = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}$$

$$s = \ldots \quad \text{wird nicht benötigt}$$

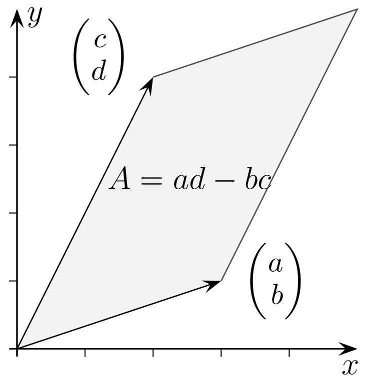
$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

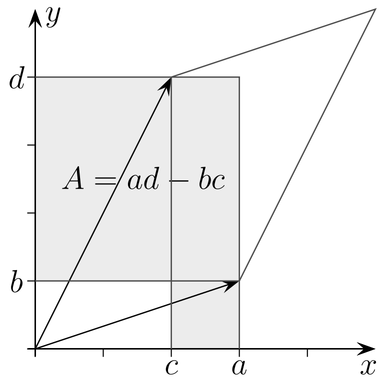
$$A = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} \left| \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|$$

$$A = ad - bc$$

$$A = |ad - bc| \qquad \text{Reihenfolge vertauscht}$$

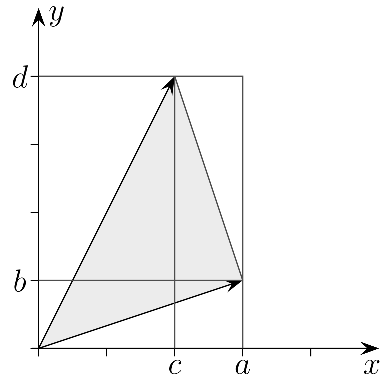
Parallelogrammfläche als Differenz von Rechteckflächen





Die halbe Parallelogrammfläche passt zweimal in die Differenzfläche $A = ad - bc$.

Beim Verdoppeln der halben Parallelogrammfläche entsteht die um bc zu große Rechteckfläche ad.



$$\begin{aligned} 2(A_1 + A_2 + A_4) &= ab \\ 2(A_2 + A_4) &= ab - 2A_1 \\ 2(A_2 + A_3 + A_5) &= cd \\ 2A_5 &= cd - 2(A_2 + A_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{Parallelogramm}} &= 2A_{\text{Dreieck}} \\ &= ab - 2A_1 + cd - 2(A_2 + A_3) + 2A_6 \\ &= ab + cd - 2(A_1 + A_2 + A_3) + 2A_6 \\ &= ab + cd - 2bc + 2A_6 \\ &= ad - bc \qquad | \text{ } ab \text{ und } cd \text{ überlappen sich um } bc. \end{aligned}$$