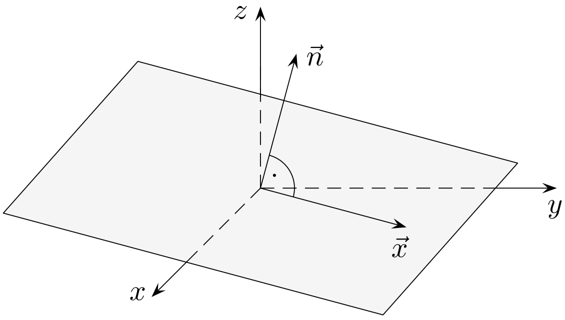
Normalenform

1. Normalenform der Ebene
2. Parameterform in Normalenform
3. Zur weiteren Übung
4. Normalenform ermitteln, Grafik gegeben a) b)
5. c) d)
6. e) f)
7. Ergebnisse
8. Normalenform in Parameterform umwandeln
9. Koordinatenform einer Ebene GTR
10. Parameterform in Normalenform
11. Aufgaben ohne GTR gA
12. Ergebnisse
13. Zusammenhänge vermuten

↑ Normalenform der Ebene

Die Lage der Ebene, die durch den Ursprung verläuft, kann durch einen einzigen Vektor, den Normalenvektor $\vec{n}$, beschrieben werden, der senkrecht auf der Ebene steht.
Für einen Vektor $\vec{x}$, der zu einem Punkt auf der Ebene führt, gilt $\vec{n} \cdot \vec{x} = 0$, weil $\vec{x}$ auf $\vec{n}$ senkrecht steht.

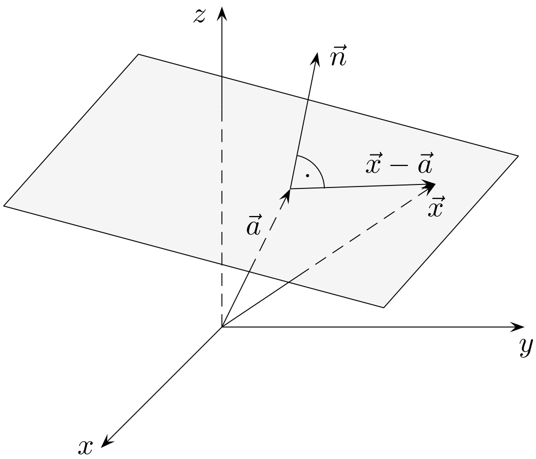


Beispiel für die *Normalenform* einer Ebene, die durch den Ursprung verläuft:

$$E\colon \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$$

Die Lage einer beliebigen Ebene kann durch einen Normalenvektor $\vec{n}$ und einen Stützvektor $\vec{a}$ beschrieben werden.

Für einen Vektor $\vec{x}$, der zu einem Punkt auf der Ebene führt, gilt $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$, weil $\vec{n}$ auf $\vec{x} - \vec{a}$ senkrecht steht.



Beispiel für die Normalenform:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \; - \; 14 = 0$$

1. Gegeben ist die Parameterform einer Ebene E:

   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Wie lautet die Normalenform?

↑ Parameterform in Normalenform

1. Gegeben ist die Parameterform einer Ebene E:

   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Wie lautet die Normalenform?

   Lösung:

   Der Normalenvektor, der senkrecht auf beiden Richtungsvektoren steht,
   wird mit dem Vektorprodukt ausgerechnet, der Stützvektor kann übernommen werden:

   $$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad \text{oder:} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 1 = 0$$

   Die (platzsparende) Koordinatenform lautet: $2x + y - 3z = 1$

   Zur weiteren Übung:

2. Wie lautet die Normalenform?

   a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

↑ Normalenform der Ebene

Zur weiteren Übung:

2. Wie lautet die Normalenform?

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösungen:

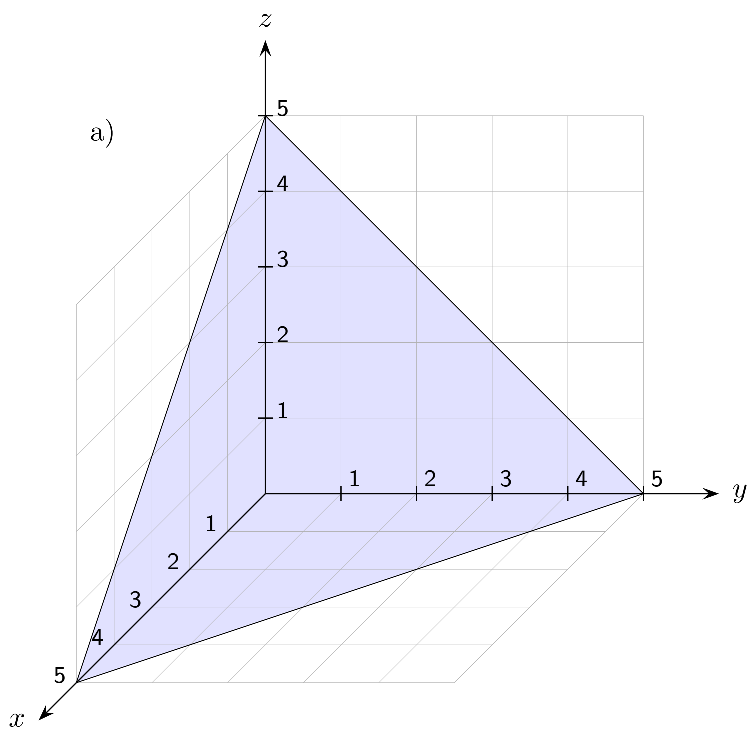
2. a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0$

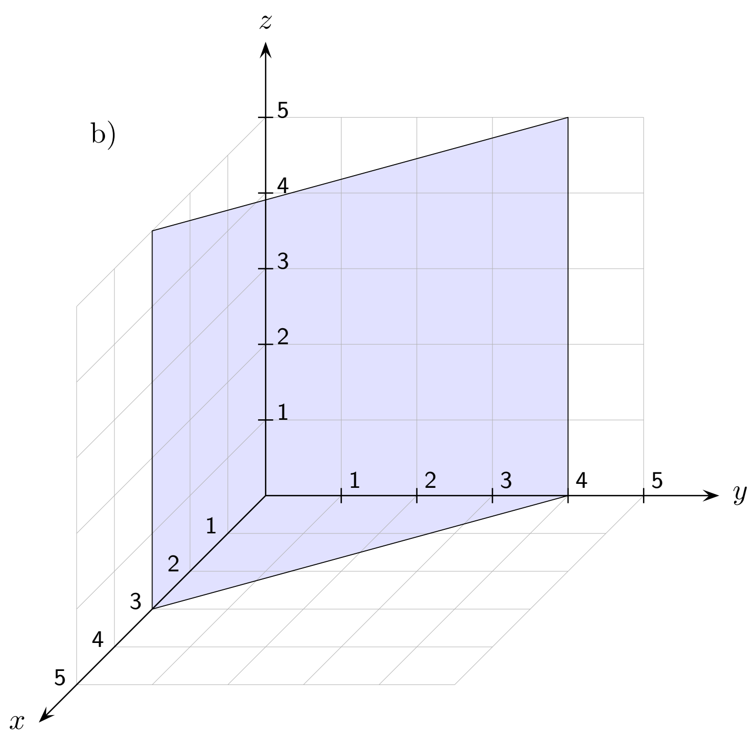
beachte: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 15 = 0$

↑ Ebenen

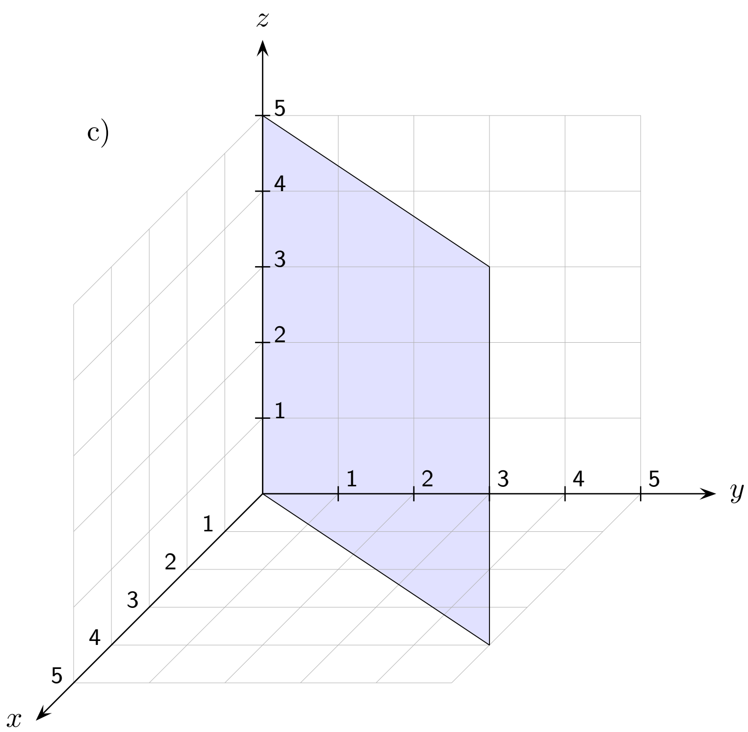
Ermittle die Ebenengleichung in Normalenform.

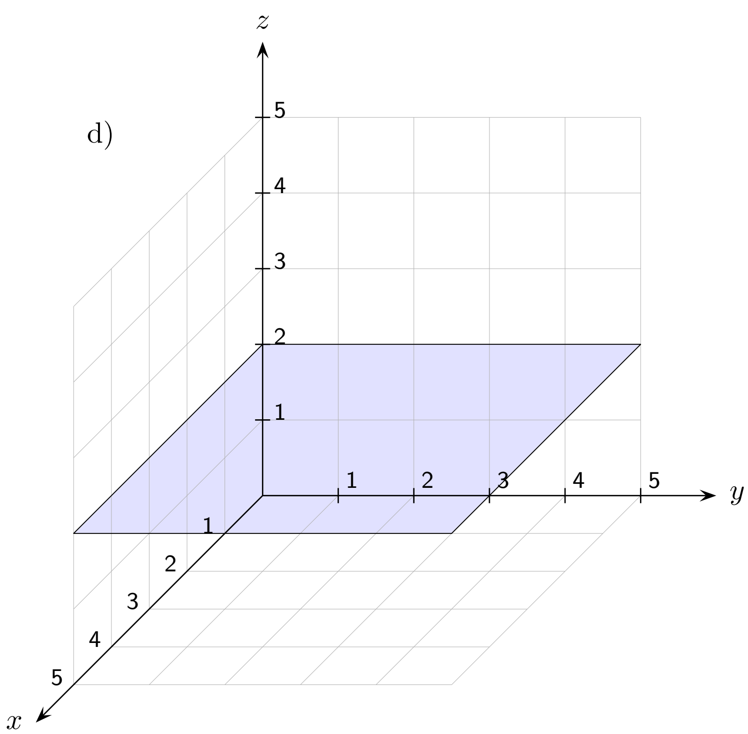




↑ Ebenen

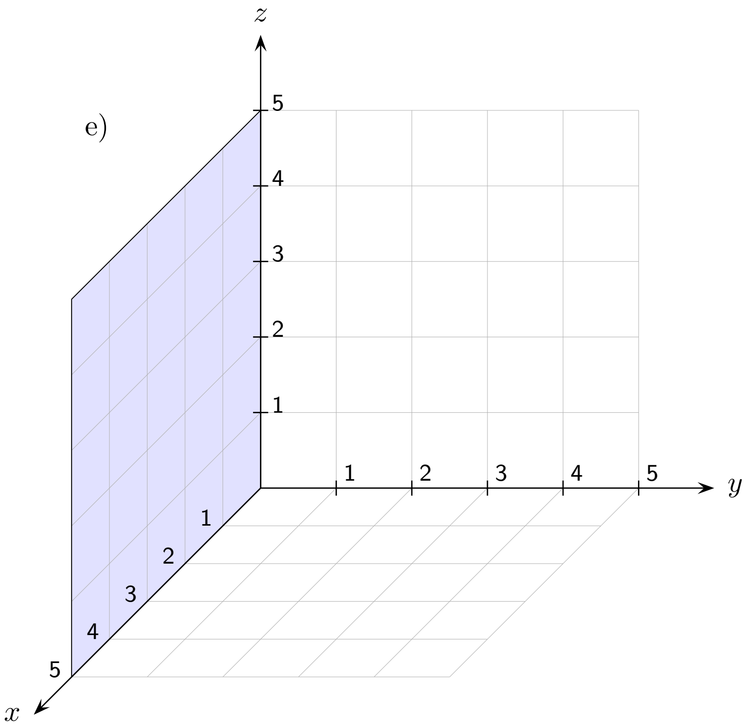
Ermittle die Ebenengleichung in Normalenform.

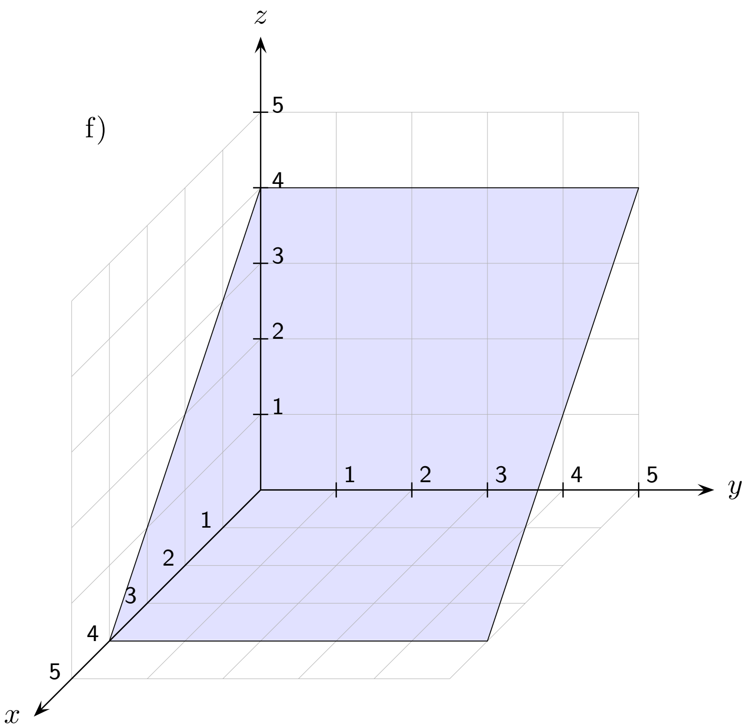




↑ Ebenen

Ermittle die Ebenengleichung in Normalenform.





↑ Ebenen

Die Koordinatenformen lauten:

a) $x + y + z = 5$

b) $4x + 3y = 12$

c) $5x - 4y = 0$

d) $z = 2$

e) $y = 0$

f) $x + z = 4$

↑ Normalenform in Parameterform umwandeln

Die Koordinatenform einer Ebene sei: $2x + y - 3z = 1$

2 Variablen können beliebig gewählt werden, die Dritte ist dann festgelegt.
Die Ebenengleichung wird nach einer Variablen umgestellt, z. B. $y = 1 - 2x + 3z$.

Die Ebene wird nun durch den Vektor $\begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x + 3z \\ z \end{pmatrix}$ beschrieben, x und z sind frei wählbar.
Wir ordnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten eine Parameterform:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei diesem Vorgehen liegt der Stützvektor stets auf einer Koordinatenachse
und die Richtungsvektoren liegen jeweils in einer Koordinatenebene.

↑ Koordinatenform einer Ebene GTR

Für eine Ebene lautet die Koordinatenform

$$ax + by + cz = d$$

Sie kann mit einer Zahl ungleich Null multipliziert werden.
Für Ebenen, die nicht durch den Ursprung verlaufen, ist $d \neq 0$.
In <u>diesem</u> Fall kann die Koordinatenform, wenn 3 Punkte der Ebene gegeben sind, ohne Mühe mit dem GTR ermittelt werden.
Die Koordinaten der Punkte werden in $ax + by + cz = 1$ eingesetzt, der GTR (rref) liefert die Lösung des Gleichungssystems. Statt 1 wäre jede Zahl ungleich Null möglich.

Gegeben sind 3 Punkte einer Ebene. Gesucht ist die Koordinatenform.

a) $A(3\,|\,-2\,|\,7)$, $B(1\,|\,-1\,|\,3)$, $C(2\,|\,0\,|\,1)$
$2x - 8y - 3z = 1$

b) $A(3\,|\,-2\,|\,7)$, $B(1\,|\,-1\,|\,3)$, $C(2\,|\,-2\,|\,1)$
$-\frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y + \frac{1}{5}z = 1$ oder $6x + 8y - z = -5$

c) $A(4\,|\,1\,|\,-2)$, $B(3\,|\,-2\,|\,0)$, $C(1\,|\,2\,|\,-3)$
$\frac{1}{17}x - \frac{7}{17}y - \frac{10}{17}z = 1$ oder $x - 7y - 10z = 17$

Für eine Ebene, die durch den Ursprung verläuft, lautet die Koordinatenform

$$ax + by + cz = 0$$

Der obige Ansatz mit dem GTR führt auf einen Widerspruch.
$d = 1$ wird daher durch $d = 0$ ersetzt.
Aus der allgemeinen Lösung ist ein Normalenvektor zu erkennen.

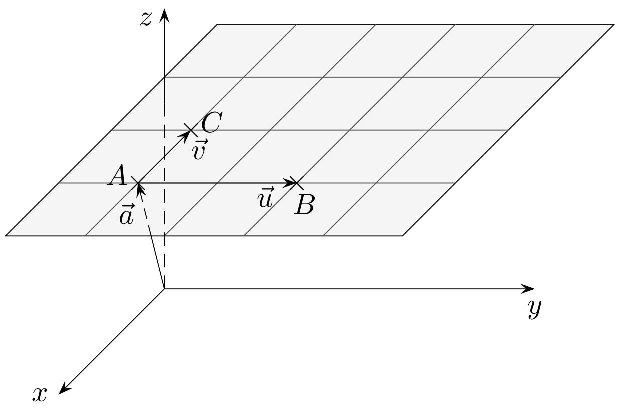
Falls bekannt ist, dass die Ebene durch den Ursprung verläuft, muss lediglich ein Normalenvektor ermittelt werden.
Die Koordinaten zweier vom Ursprung verschiedener Punkte werden in $ax + by + 1z = 0$ eingesetzt, d. h. in $ax + by = -z$.

Gesucht ist die Koordinatenform der Ebene durch den Ursprung.

a) $A(3\,|\,2\,|\,-1)$, $B(1\,|\,3\,|\,-2)$
$-\frac{1}{7}x + \frac{5}{7}y + 1z = 0$ oder $x - 5y - 7z = 0$

b) $A(1\,|\,-4\,|\,0)$, $B(-2\,|\,0\,|\,-1)$
$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}y + 1z = 0$ oder $4x + y - 8z = 0$

↑ Normalenform

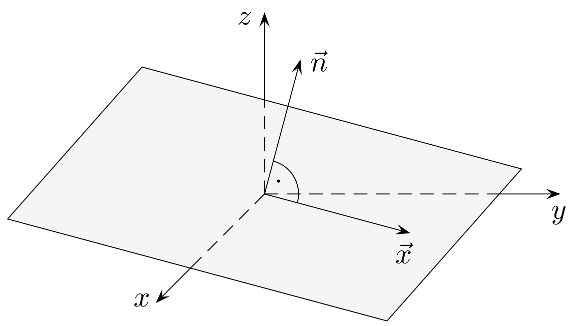


Gleichung *(Parameterform)* einer Ebene durch den Ursprung:

$$\vec{x} \;=\; \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} \qquad \mid \cdot\,\vec{n}$$

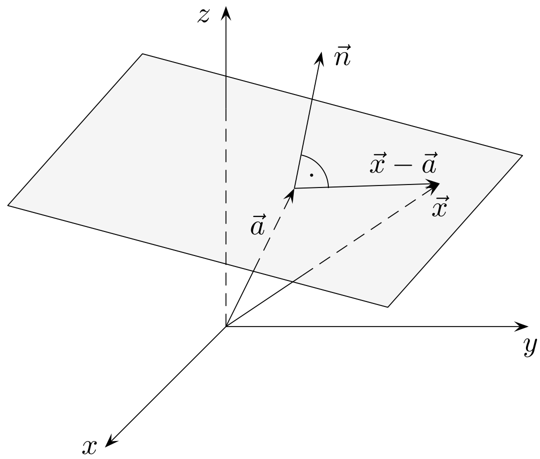
$$\vec{x}\cdot\vec{n} \;=\; 0$$

Die *Normalenform* ergibt sich durch Multiplikation mit dem Normalenvektor $\vec{n}$



Gleichung *(Parameterform)* einer Ebene:

$$\begin{aligned} \vec{x} \;&=\; \vec{a} + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} \qquad \mid \cdot\,\vec{n} \\ \vec{x}\cdot\vec{n} \;&=\; \vec{a}\cdot\vec{n} \\ \vec{x}\cdot\vec{n} - \vec{a}\cdot\vec{n} \;&=\; 0 \\ \vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{a}) \;&=\; 0 \end{aligned}$$



1. Gegeben ist die Ebene E: $3x - 2y = 0$.

   a) Prüfen Sie, ob der Punkt $P(1\,|\,1{,}5\,|\,7)$ in E liegt.

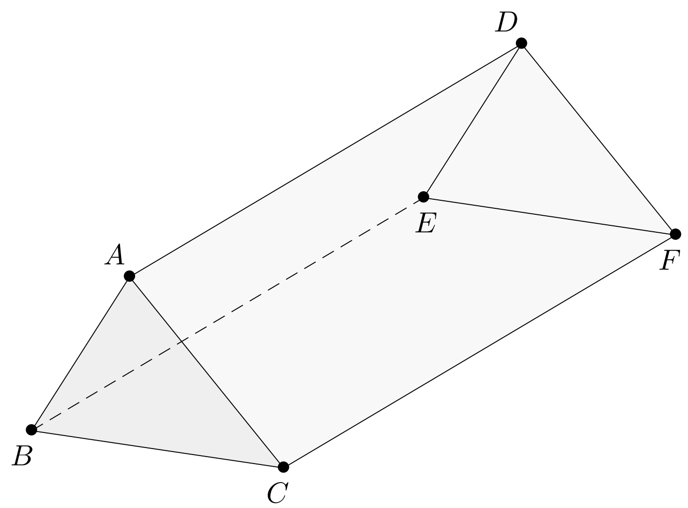
   b) Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.

   c) Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl s, für die die Ebene F: $2x + sy + z = 4$ senkrecht zu E steht.

2. Wird der Punkt $P(1\,|\,2\,|\,3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7\,|\,2\,|\,11)$

   a) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

   b) Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E, dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P. Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q. Bestimmen Sie die Koordinaten von R.



3. Betrachtet wird das Prisma $ABCDEF$ mit $A(3\,|\,3\,|\,6)$, $B(-1\,|\,5\,|\,2)$, $C(7\,|\,4\,|\,1)$ und $E(2\,|\,23\,|\,8)$. A, B und C liegen in der Ebene L: $x + 6y + 2z = 33$.

   a) Begründen Sie, dass das Prisma gerade ist.

   b) Die Ebene M ist parallel zu L und teilt das Prisma in zwei Teilkörper. Das Volumen des Teilkörpers, der den Punkt E enthält, ist doppelt so groß wie das Volumen des anderen Teilkörpers. Ermitteln Sie eine Gleichung von M.

1. Gegeben ist die Ebene E: $3x - 2y = 0$.

   a) Prüfen Sie, ob der Punkt $P(1\,|\,1{,}5\,|\,7)$ in E liegt.

      $3 \cdot 1 - 2 \cdot 1{,}5 = 0$, d. h. der Punkt liegt in E.

   b) Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.

      E enthält die z-Achse.

   c) Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl s, für die die Ebene F: $2x + sy + z = 4$ senkrecht zu E steht.

$$\begin{pmatrix}2\\s\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} = 6 - 2s = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad s = 3$$

2. Wird der Punkt $P(1\,|\,2\,|\,3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7\,|\,2\,|\,11)$

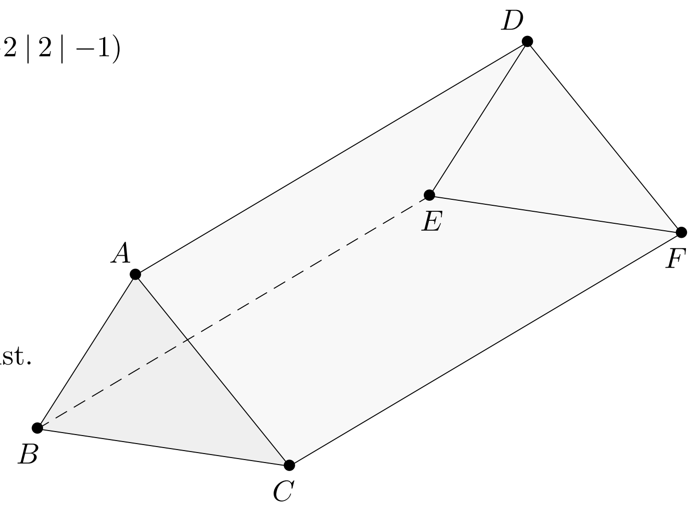
   a) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

      Der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$ ist $Q(4\,|\,2\,|\,7)$. $\quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}6\\0\\8\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E.

      E: $6x + 8z = d$, $\;6 \cdot 4 + 8 \cdot 7 = d$, $\;E$: $6x + 8z = 80$

   b) Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E, dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P. Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q. Bestimmen Sie die Koordinaten von R.

      $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$ bzw. $R(-2\,|\,2\,|\,-1)$



3. a) ...

      Begründen Sie, dass das Prisma gerade ist.

      $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix}3\\18\\6\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}$, d. h.

      die Seite $\overline{BE}$ steht senkrecht zur Grundfläche des Prismas.

   b) Die Ebene M ist parallel zu L und teilt das Prisma in zwei Teilkörper. Das Volumen des Teilkörpers, der den Punkt E enthält, ist doppelt so groß wie das Volumen des anderen Teilkörpers. Ermitteln Sie eine Gleichung von M.

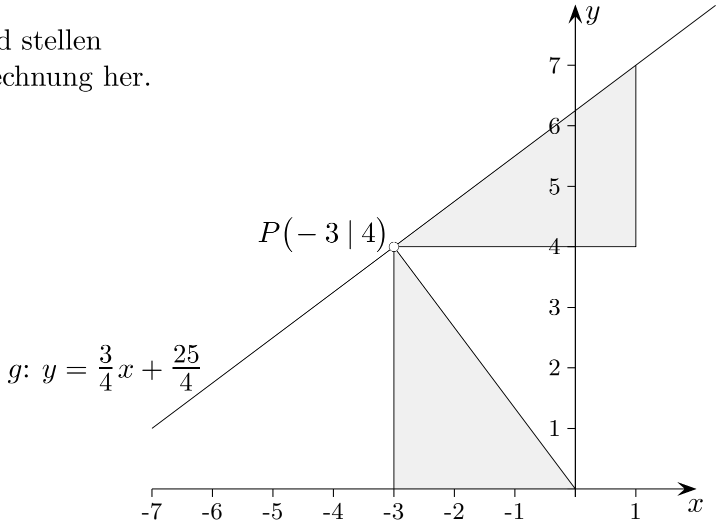
      M: $x + 6y + 2z = b$

      $\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}3\\18\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\11\\4\end{pmatrix}$, d. h. der Punkt $Q(0\,|\,11\,|\,4)$ liegt in M. Damit ergibt sich $b = 74$.

↑ Zusammenhänge vermuten

Wir formen die Geradengleichung von g um und stellen mit dem Skalarprodukt den Bezug zur Vektorrechnung her.

$$\begin{aligned} 4y - 3x &= 25 \\ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 25 \quad \Big| \cdot \frac{1}{5} \\ \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Länge 1}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 5 \end{aligned}$$



$-3x + 4y = 25$ ist die Koordinatenform der Geradengleichung.

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}$ ist der Normalenvektor.

Wird so umgeformt, dass der Normalenvektor die Länge 1 hat (hier muss mit $\frac{1}{5}$ multipliziert werden), dann gibt der konstante Summand den Abstand der Geraden zum Ursprung an.
Dies kann dadurch überprüft werden, indem der Schnittpunkt P von der Geraden g und der Geraden durch den Ursprung mit der Richtung $\vec{n}$ berechnet wird. Von P ist noch der Abstand zum Ursprung zu ermitteln.

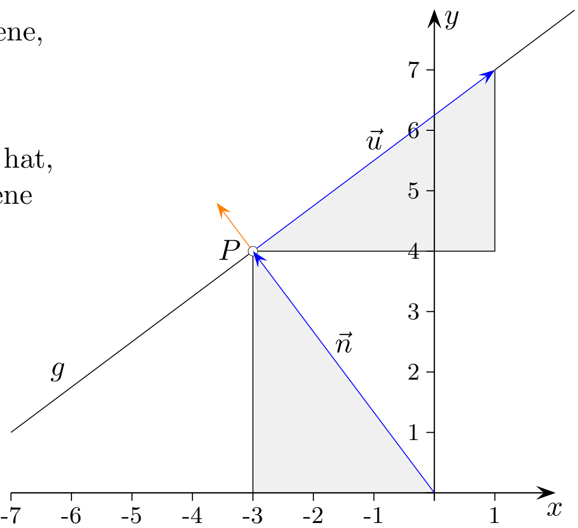
Diese Überlegungen können auf Ebenen im Raum erweitert werden.

Koordinatenform der Ebenengleichung: $ax + by + cz = d$

Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Ebene,

bzw. den Richtungsvektoren.

Wird so umgeformt, dass der Normalenvektor die Länge 1 hat, dann gibt der konstante Summand d den Abstand der Ebene zum Ursprung an.



Differenzial- und Integralrechnung

Vektorrechnung

VR Aufgaben

VR weitere Aufgaben

VR weitere Aufgaben

Startseite