

Lineare Unabhängigkeit

1. Die Seitenmitten eines Vierecks (im Raum) sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

(1731 Pierre Varignon)

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{OE} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \frac{1}{2}$$

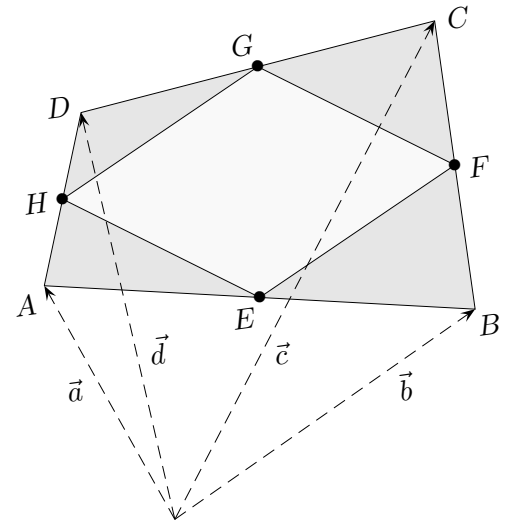
$$\vec{OF} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\vec{OG} = (\vec{c} + \vec{d}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\vec{OH} = (\vec{a} + \vec{d}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\vec{EF} = \vec{OF} - \vec{OE} = \dots = (\vec{c} - \vec{a}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\vec{EH} = \vec{OH} - \vec{OE} = \dots = (\vec{d} - \vec{b}) \cdot \frac{1}{2}$$



Aus den Darstellungen für \vec{HG} und \vec{FG} ist alles zu erkennen.

2. Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Der Schnittpunkt teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2. Dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks.

Sei A der Ursprung und $\vec{a} = \vec{AB}$ und $\vec{b} = \vec{AC}$.

$$\begin{aligned} \text{Gerade } BF: \quad \vec{x} &= \vec{a} + \lambda \vec{BF} \\ &= \vec{a} + \lambda \left(\frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a} \right) \end{aligned}$$

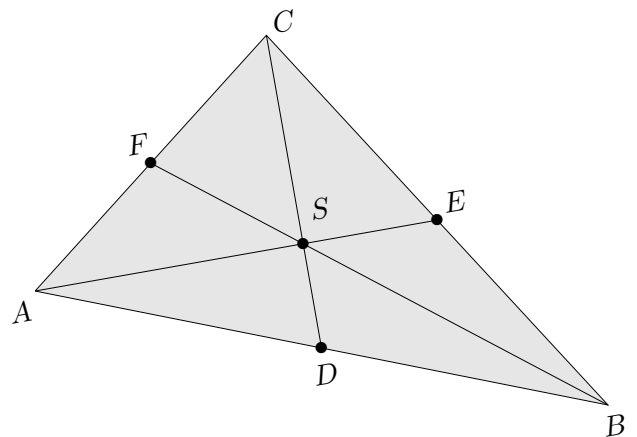
$$\text{Gerade } AE: \quad \vec{x} = \lambda \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{Schnitt:} \quad \vec{a} + \lambda \left(\frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a} \right) = \mu \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \lambda - \frac{1}{2} \mu \right) \vec{a} + \left(\frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \mu \right) \vec{b} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}, \quad \mu = \frac{2}{3}$$

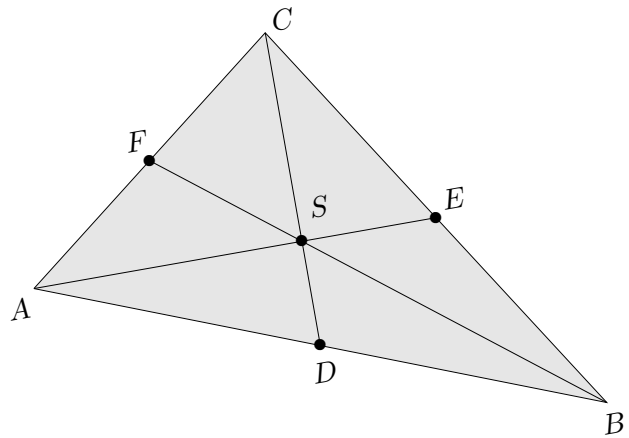
Die Gerade CD verläuft auch durch S .



Die n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ heißen voneinander linear unabhängig, falls aus jeder Linearkombination des Nullvektors $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ folgt, dass alle λ_i null sind. Andernfalls sind sie linear abhängig.

Die n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn es eine Linearkombination des Nullvektors gibt, bei der ein (mindestens) λ_i ungleich null ist. Die Linearkombination kann dann nach \vec{a}_i umgestellt werden, d. h. (mindestens) ein Vektor ist als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellbar.

Schwerpunkt



$$\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$

$$\vec{a} = \vec{AB}$$

$$\vec{b} = \vec{AC}$$

$$\vec{S} = \vec{A} + \mu \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\mu = \frac{2}{3}$$

siehe vorige Seite

...

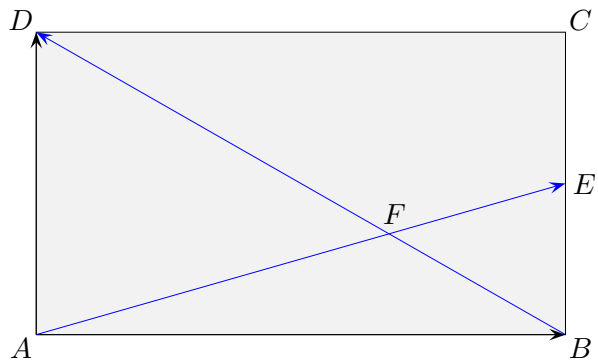
$$\vec{S} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$

beachte

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$$

Mittelpunkt einer Strecke AB

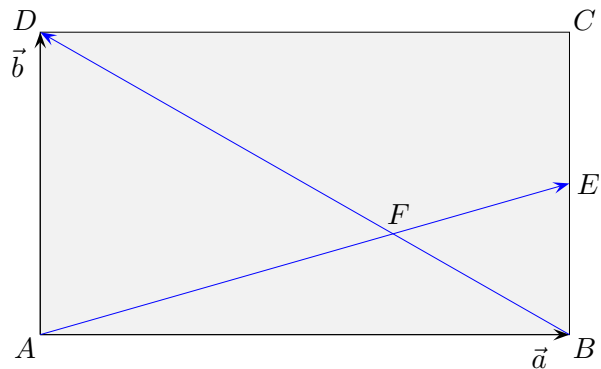
Teilverhältnis



E halbiert die Rechteckseite BC .

In welchem Verhältnis teilt F die Strecken AE und BD ?

Teilverhältnis



E halbiert die Rechteckseite BC .

In welchem Verhältnis teilt F die Strecken AE und BD ?

Gerade AE : $\vec{x} = \lambda \overrightarrow{AE}$

$$\vec{x} = \lambda \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right)$$

Gerade BD : $\vec{x} = \vec{a} + \mu (\vec{b} - \vec{a})$

Schnitt: $\vec{a} + \mu (\vec{b} - \vec{a}) = \lambda \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right)$

$$\Leftrightarrow (1 - \lambda - \mu) \vec{a} + \left(\mu - \frac{1}{2} \lambda \right) \vec{b} = \vec{0}$$

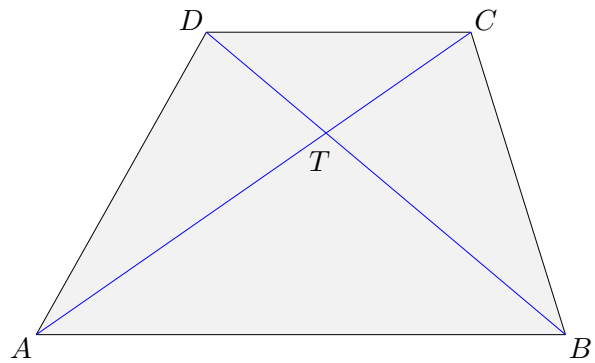
$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 1 - \lambda - \mu = 0 \\ \mu - \frac{1}{2} \lambda = 0 \end{array}$$

$$\underline{\mu - \frac{1}{2} \lambda = 0}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}, \quad \mu = \frac{1}{3}$$

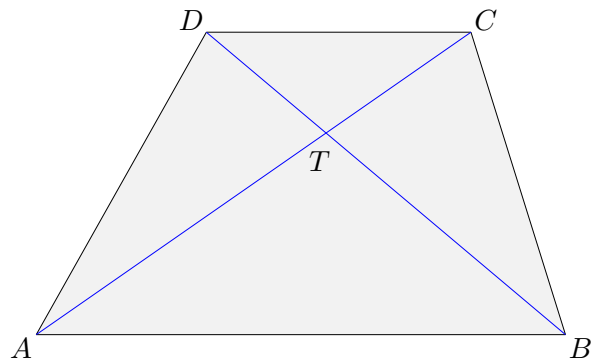
F teilt AE im Verhältnis 2:1, BD im Verhältnis 1:2.

Teilverhältnis



In einem (nicht unbedingt symmetrischen) Trapez ist die Strecke DC halb so lang wie die Strecke AB . In welchem Verhältnis teilt T die Diagonalen?

Teilverhältnis

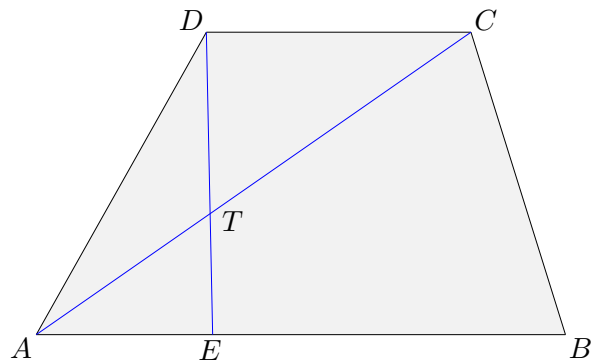


In einem (nicht unbedingt symmetrischen) Trapez ist die Strecke DC halb so lang wie die Strecke AB . In welchem Verhältnis teilt T die Diagonalen?

$$\begin{array}{r} 1 - \lambda - \frac{1}{2}\lambda = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \\ \hline \lambda = \mu = \frac{2}{3} \end{array}$$

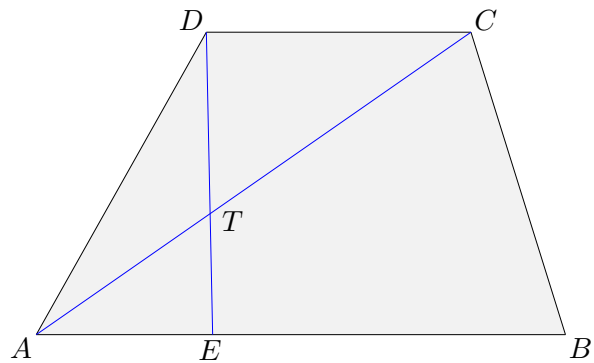
T teilt AC und BD im Verhältnis 2:1.

Teilverhältnis



In einem (nicht unbedingt symmetrischen) Trapez ist die Strecke DC halb so lang wie die Strecke AB . E teilt die Strecke AB im Verhältnis 1:2. In welchem Verhältnis teilt T die Strecken AC und ED ?

Teilverhältnis



In einem (nicht unbedingt symmetrischen) Trapez ist die Strecke DC halb so lang wie die Strecke AB . E teilt die Strecke AB im Verhältnis 1:2. In welchem Verhältnis teilt T die Strecken AC und ED ?

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}\mu = \frac{1}{3} \\ \lambda - \mu = 0 \\ \hline \lambda = \mu = \frac{2}{5} \end{array}$$

T teilt AC und ED im Verhältnis 2:3.