Struktur der Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

Vitamin	I	II	III	IV
A	1	2	3	1
B	3	3	0	4
C	4	5	4	2

Die Verpflegung einer Expedition wird aus den Konserven I, II, III, IV zusammengestellt. Die Tabelle gibt den Vitamingehalt (in geeigneten Einheiten) an. Der gesamte Vitamingehalt kann durch folgende Stückzahlen gedeckt werden: 50 von Sorte I, 100 von Sorte II, 20 von Sorte III, 10 von Sorte IV.

Es ergeben sich dann folgende Vitamineinheiten:
320 Einheiten von Vitamin A, 490 Einheiten von Vitamin B, 800 Einheiten von Vitamin C.
Wir wollen untersuchen, ob der Vitaminbedarf auch durch eine andere Kombination der Konserven gedeckt werden kann.
(50 | 100 | 20 | 10) ist eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & u & = & 320 \\ 3x & + & 3y & & & + & 4u & = & 490 \\ 4x & + & 5y & + & 4z & + & 2u & = & 800 \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad x\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}320\\490\\800\end{pmatrix}$$

Für jede weitere Lösung $(x_2 \mid y_2 \mid z_2 \mid u_2)$ muss gelten:

$$(x_2-50)\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}+(y_2-100)\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+(z_2-20)\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}+(u_2-10)\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}320\\490\\800\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}320\\490\\800\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Es ist zweckmäßig, die Lösungen als Vektoren zu schreiben.
Das homogene Gleichungssystem lautet:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & u & = & 0 \\ 3x & + & 3y & & & + & 4u & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 4z & + & 2u & = & 0 \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -u \\ & - & 3y & - & 9z & = & -u \\ & & & & z & = & 3u \end{array}$$

Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \frac{u}{3}\begin{pmatrix}22\\-26\\9\\3\end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des obigen inhomogenen Gleichungssystems ist:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}50\\100\\20\\10\end{pmatrix} + \frac{u}{3}\begin{pmatrix}22\\-26\\9\\3\end{pmatrix}$$

Wählt man z.B. $u = 6$, so ergeben sich die Stückzahlen:
94 von Sorte I, 48 von Sorte II, 38 von Sorte III, 16 von Sorte IV.

1. Mit zwei Lösungen eines homogenen Gleichungssystems ist auch die Summe eine Lösung.
2. Mit einer Lösung eines homogenen Gleichungssystems ist auch jedes Vielfache eine Lösung.

   Die Lösungsvektoren eines homogenen Gleichungssystems bilden einen Vektorraum. Jeder Vektor kann eindeutig als Linearkombination von linear unabhängigen Vektoren (den Basisvektoren) dargestellt werden. Die Anzahl der Basisvektoren heißt Dimension des Vektorraums.
3. Mit zwei Lösungen eines inhomogenen Gleichungssystems ist die Differenz eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.
4. Die Lösungsvektoren eines inhomogenen Gleichungssystems haben alle die Gestalt $\vec{a} + \vec{u}$, wobei $\vec{a}$ ein spezieller (irgendein fester) Lösungsvektor des inhomogenen Gleichungssystems und $\vec{u}$ ein beliebiger Lösungsvektor des homogenen Gleichungssystems ist.