

# Abstand Ursprung/Ebene      Hessesche Normalenform

1. Gegeben ist die Ebene  $E: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 50 = 0$

$E$  könnte z.B. durch die Punkte  $A(10 | 0 | 5)$ ,  $B(2 | 1 | 11)$  und  $C(-2 | -1 | 14)$  festgelegt sein.

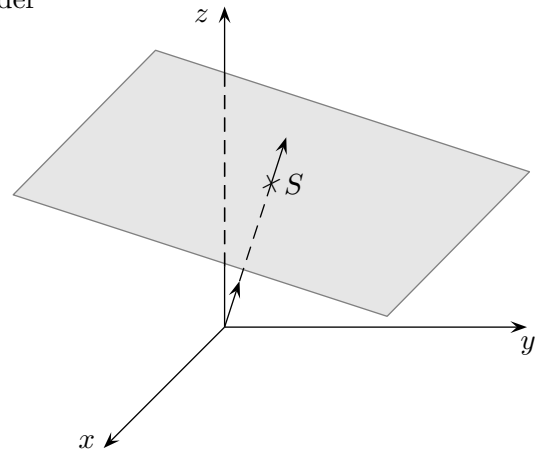
Um den Abstand des Ursprung  $O(0 | 0 | 0)$  zu  $E$  zu berechnen, bringen wir die Ebene zum Schnitt mit der

Geraden  $g: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 50 = 0$$

$$25\lambda - 50 = 0$$

$$\lambda = 2$$



Der Schnittpunkt ist daher  $S(6 | 0 | 8)$ .

Der Abstand beträgt dann:  $d = \sqrt{36 + 0 + 64} = \sqrt{100} = 10$

Da  $\vec{n}^\circ \cdot \vec{n}^\circ = 1$  ist, vereinfacht sich die Rechnung, falls wir von der Ebenengleichung  $\vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$  (Hessesche Normalenform) ausgehen:

$$E: \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 10 = 0 \quad g: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} - 10 = 0$$

$$\lambda = 10$$

Die Hessesche Normalenform erhalten wir durch die Umformung:

$$\vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0 \quad | \cdot \frac{1}{|\vec{n}^\circ|}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 50 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{5}$$

Das bedeutet:

Das 10-fache des Einheitsvektors führt zum Schnittpunkt  $S$ , daher muss der Abstand 10 sein. In der Hesseschen Normalenform  $\vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$  ist also  $a$  der Abstand zum Ursprung.

2. Bestimme den Abstand der Ebene zum Ursprung:

a)  $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 15 = 0$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 = 0$

c)  $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 18 = 0$

Abstand Ursprung/Ebene

Hessesche Normalenform

Bestimme den Abstand der Ebene zum Ursprung:

a)  $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 15 = 0$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 12 = 0$

c)  $\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 18 = 0$

Ergebnisse: a) 3, b) 4, c) 2

# Hessesche Normalenform      Ergänzung

allgemein:

$$E: \vec{n}^\circ \vec{x} - a = 0$$

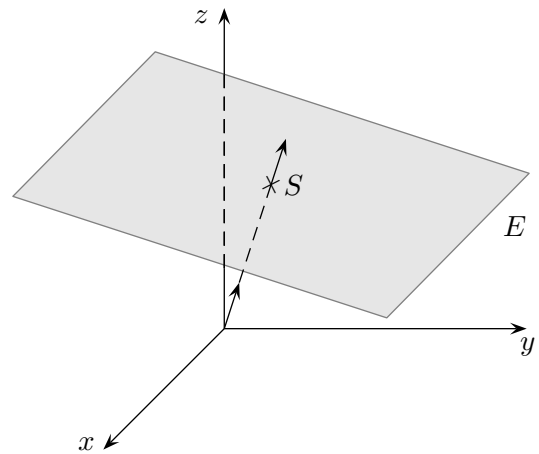
$$g: \vec{x} = \lambda \vec{n}^\circ$$

Schnitt:

$$\vec{n}^\circ \cdot \lambda \vec{n}^\circ - a = 0 \quad \text{beachte: } \vec{n}^\circ \cdot \vec{n}^\circ = 1$$

$$\lambda - a = 0$$

$$\lambda = a$$



Das  $\lambda$ -fache des Einheitsvektors  $\vec{n}^\circ$  führt zum Schnittpunkt  $S$ , daher muss der Abstand der Ebene zum Ursprung  $\lambda$  bzw.  $a$  sein.

$$E: \vec{n}\vec{x} - a = 0, \quad a > 0$$

$$g: \vec{x} = \lambda \vec{n}$$

Schnitt:

$\lambda$  ist positiv, d.h. der Ortsvektor  $\vec{n}$  weist in Richtung der Ebene  $E$ .