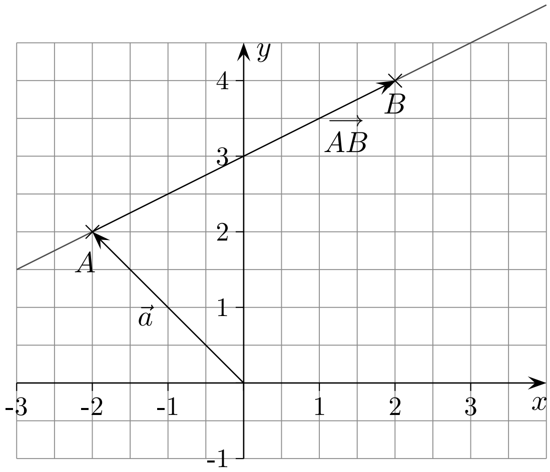
Geradengleichung

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(-2\,|\,2)$ und $B(2\,|\,4)$.
Wie lautet die vektorielle Geradengleichung?



Der Verlauf der Geraden kann durch den

Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, der zum Punkt A führt, und den Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

festgelegt werden.

Als Richtungsvektor wäre auch ein Vielfaches (die Hälfte) von $\overrightarrow{AB}$ geeignet.
Jeder Vektor, der zu einem Geradenpunkt führt, kann als Stützvektor dienen.

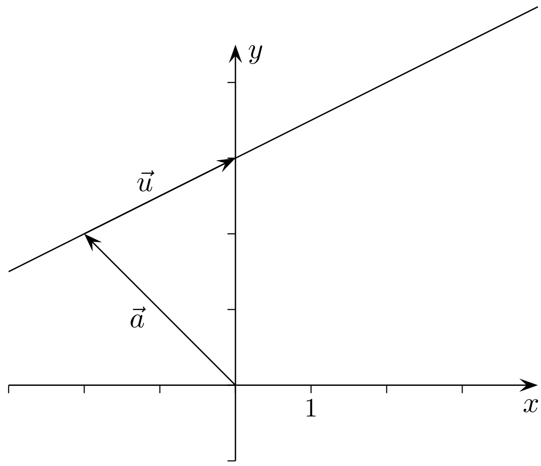
Die *Geradengleichung* lautet daher:

$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\overrightarrow{AB}$ (allgemeiner: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$)

und für unser Beispiel $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

oder $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

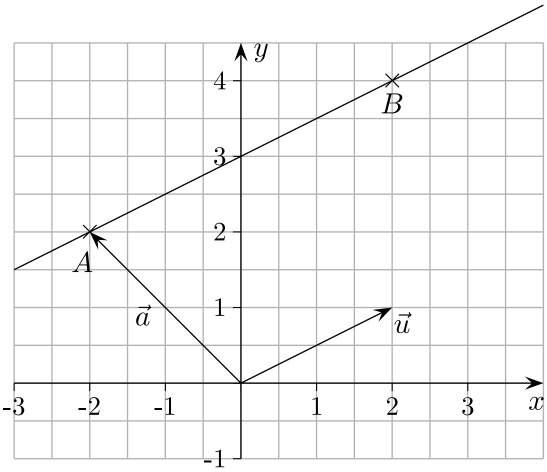
Für jeden λ-Wert ergibt sich ein Vektor $\vec{x}$,
der zu einem Punkt P auf der Geraden führt,
$P(-2+2\lambda\,|\,2+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.



Die Gerade h verläuft durch die Punkte $C(-1\,|\,3)$ und $D(2\,|\,2)$.
Wie lautet eine Geradengleichung?
Gib fünf Möglichkeiten an.

Geradengleichung

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(-2\,|\,2)$ und $B(2\,|\,4)$.
Wie lautet die vektorielle Geradengleichung?



Der Verlauf der Geraden kann durch den

Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, der zum Punkt A führt, und den

Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ festgelegt werden.

Als Richtungsvektor wäre auch ein Vielfaches von $\vec{u}$ geeignet.
Jeder Vektor, der zu einem Geradenpunkt führt,
kann als Stützvektor dienen.

Wie erhalten wir nun mit $\vec{a}$ und $\vec{u}$ die Gesamtheit aller Vektoren,
die zu Punkten auf der Geraden führen?

Auf je einen Punkt der Geraden weisen die Vektoren:

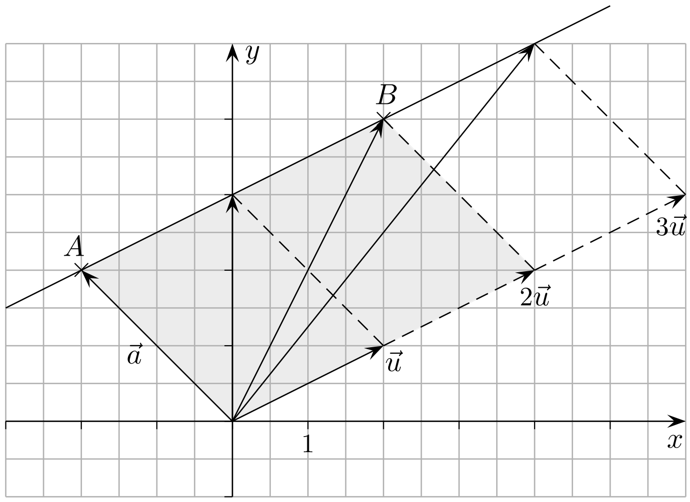
$$\vec{a} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 3\,\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

allgemein, wenn λ den Zahlbereich durchläuft.



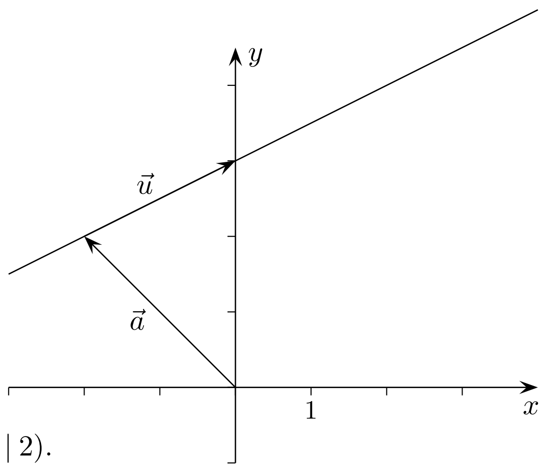
Die *Geradengleichung* lautet daher:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$$

und für unser Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für jeden λ-Wert ergibt sich ein Vektor $\vec{x}$,
der zu einem Punkt auf der Geraden führt.

Der besseren Anschauung halber verschieben wir den
Richtungspfeil parallel, so dass sein Anfangspunkt mit
dem Endpunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt.



1. Die Gerade h verläuft durch die Punkte $C(-1\,|\,3)$ und $D(2\,|\,2)$.
   Wie lautet eine Geradengleichung?

Geradengleichung

1. Die Gerade h verläuft durch die Punkte $C(-1\,|\,3)$ und $D(2\,|\,2)$.
   Wie lautet eine Geradengleichung?

2. Untersuche, ob $A(-1\,|\,10\,|\,7)$ und $B(1\,|\,6\,|\,2)$ auf der Geraden

   $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen.

3. Bestimme a und b so, dass g und h parallel verlaufen.

   $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$

4. Ein Viereck ist gegeben durch $A(2\,|\,1\,|\,0)$, $B(10\,|\,3\,|\,8)$, $C(8\,|\,5\,|\,6)$ und $D(4\,|\,3\,|\,2)$.
   Ermittle den Schnittpunkt der Diagonalen.

Geradengleichung

1. Die Gerade h verläuft durch die Punkte $C(-1\,|\,3)$ und $D(2\,|\,2)$.
   Wie lautet eine Geradengleichung?

2. Untersuche, ob $A(-1\,|\,10\,|\,7)$ und $B(1\,|\,6\,|\,2)$ auf der Geraden
   $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen.

3. Bestimme a und b so, dass g und h parallel verlaufen.
   $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$

4. Ein Viereck ist gegeben durch $A(2\,|\,1\,|\,0)$, $B(10\,|\,3\,|\,8)$, $C(8\,|\,5\,|\,6)$ und $D(4\,|\,3\,|\,2)$.
   Ermittle den Schnittpunkt der Diagonalen.

Lösungen:

1. z.B. $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

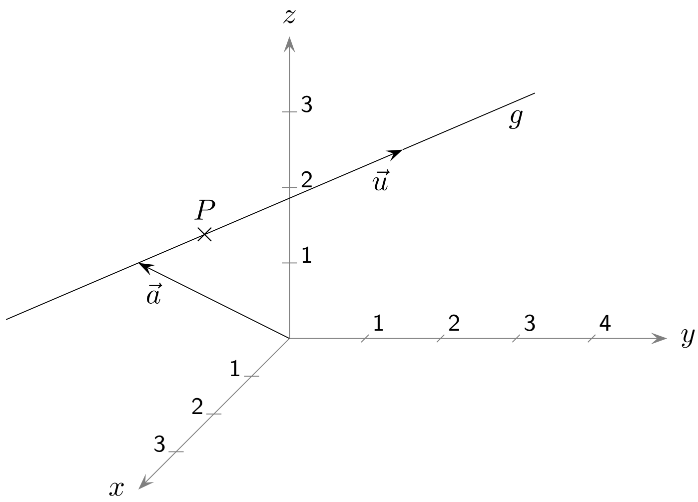
   oder $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. A ja, B nein

3. $a = -\frac{5}{2}, \;\; b = \frac{3}{2}$

4. $S(5\,|\,3\,|\,3)$

Laufender Punkt



Die Gleichung der Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

bedeutet $\quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad$ zusammengefasst: $\quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -1+4t \\ 2+2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gibt es genau einen Punkt $P(2+t \mid -1+4t \mid 2+2t)$ dieser Geraden.
P wird als laufender Punkt bezeichnet. Aus ihm kann die Geradengleichung wiedergewonnen werden.
Diese Schreibweise ist bei Abstandberechnungen vorteilhaft.