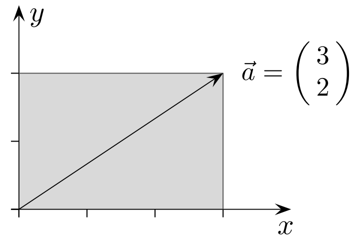
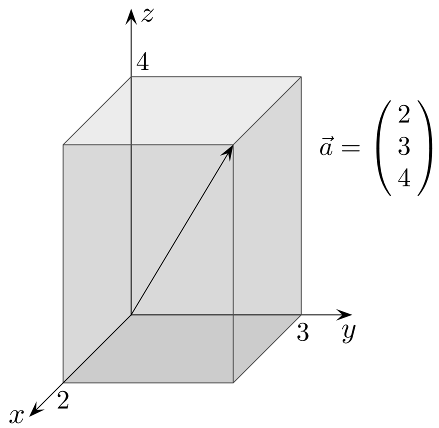
↑ Vektorrechnung Einführung



In der Physik treten häufig Größen wie Kraft und Geschwindigkeit auf, die sich nicht nur durch eine Zahl erfassen lassen. Sie besitzen neben einem bestimmten Betrag noch eine Richtung und werden daher durch Pfeile dargestellt. Fürs erste beschränken wir uns auf diejenigen Pfeile, deren Anfangspunkt im Koordinatenursprung liegen. Diese Pfeile können in eindeutiger Weise durch die Koordinaten ihres Endpunkts $A(x \mid y)$ erfasst werden. Zur Unterscheidung von den Punkten werden die Koordinaten der Vektoren untereinander geschrieben. Vektoren können addiert werden.



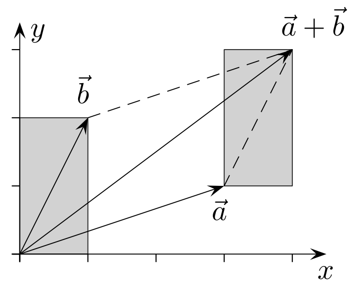
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{im Raum:} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Summe entspricht der Resultierenden des Parallelogramms, das von den zu addierenden Vektoren aufgespannt wird.

Vektoren können mit einer Zahl multipliziert werden:

$$3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

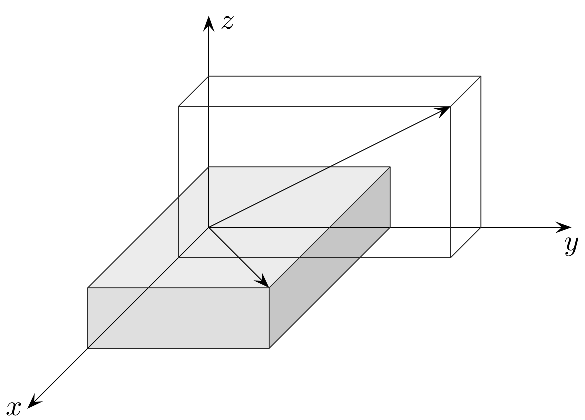
Da Zahlen in der Vektorrechnung zur Unterscheidung Skalare genannt werden, heißt diese Multiplikation Skalarmultiplikation (später lernen wir ein Vektorprodukt kennen). Für Skalare werden neben r, s und t die griechischen Buchstaben λ lambda und μ my verwendet.

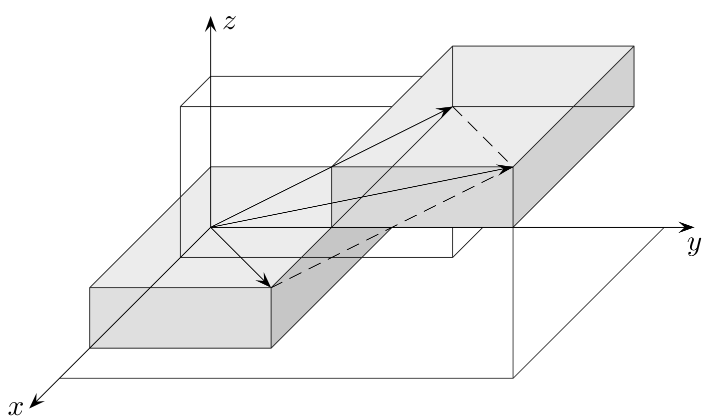


Aufg. Zeichne die Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Vektorrechnung bildet zusammen mit der Differential- und Integralrechnung das Fundament der höheren Mathematik. Anwendungen finden wir in den Natur- und Wirtschaftswissenschaften. Die Grundlagen schufen Hamilton (1805-65) und Grassmann (1809-77). Der Physiker Gibbs (1839-1903) entwickelte die heutige Form (Skalar- und Vektorprodukt).





Falls es an Vorstellungskraft mangelt, nehme man zwei Schuhkartons.
Es reicht auch ein Karton mit Deckel.

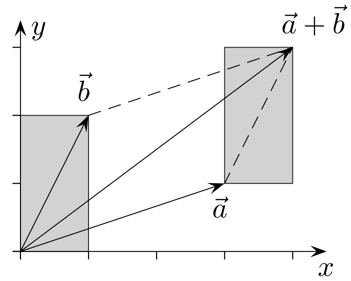
↑ Was ist ein Vektor?

Wir unterscheiden Vektoren der Ebene und des Raumes.
Vektoren sind entweder Elemente des $\mathbb{R}^2$, z. B. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,
oder des $\mathbb{R}^3$, z. B. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, beachte die Spaltenschreibweise.

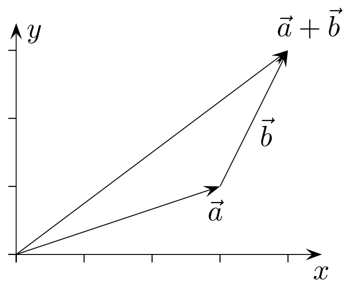
Vektoren in der Verwendung als Ortsvektoren (theoretisch ausreichend, aber völlig unpraktisch) werden durch Pfeile dargestellt, die im Ursprung des Koordinatensystems beginnen und zu einem Punkt führen. Punkte, z. B. $A(2\,|\,3)$ oder $B(2\,|\,-1\,|\,4)$ sind von den Vektoren zu unterscheiden.
Beachte die Zeilenschreibweise.

Werfen wir noch einmal einen Blick auf die Addition von Vektoren, z. B.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$



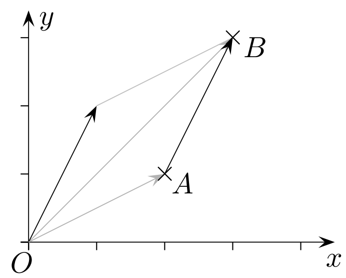
Die Summe ergibt sich, indem die x- und y-Koordinate von $\vec{a}$ um 1, bzw. um 2 vergrößert wird.
Der Pfeil von $\vec{b}$ wird parallel verschoben an den Pfeil von $\vec{a}$ angehängt.



Der besseren Anschauung halber zeichnen wir den verschobenen Pfeil von $\vec{b}$.
In allen unklaren Situationen erinnern wir uns daran, dass die zu Vektoren gehörenden Pfeile im Ursprung beginnen. Die aneinandergehängten Pfeile verdeutlichen jedoch, dass bei der Addition von einem Vektor ausgegangen werden kann und der andere Vektor die Koordinatenänderungen angibt.

Werden zwei Punkte durch einen Pfeil verbunden, so bezeichnet $\overrightarrow{AB}$ den Vektor, der zu dem in den Ursprung verschobenen Pfeil gehört. In diesem Beispiel ist

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



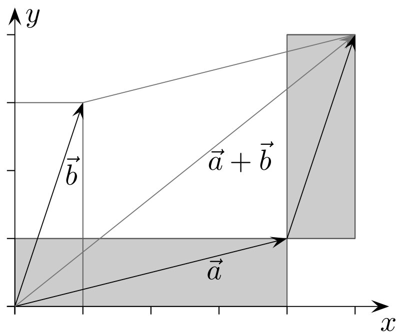
$\overrightarrow{AB}$ ist der Vektor, der zu $\overrightarrow{OA}$ addiert, $\overrightarrow{OB}$ ergibt, kürzer $\vec{B}$,
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, d. h. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{B} - \vec{A}$ „Spitze minus Fuß“
oder „rechts vor links“. $\overrightarrow{AB}$ gibt die Richtung an, um von A nach B zu kriechen.

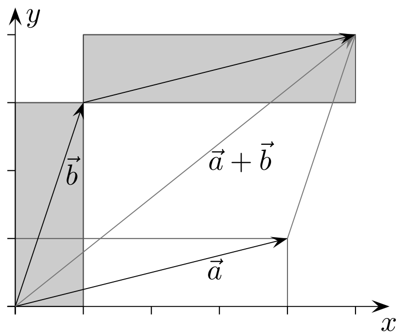
Ursprung O, lat. origo, engl. origin vector (lat.) Träger, „trägt (verschiebt) A nach B“

↑ Vektoraddition

Die aneinandergehängten Pfeile verdeutlichen, dass bei der Addition von einem Vektor ausgegangen werden kann und der andere Vektor die Koordinatenänderungen angibt. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

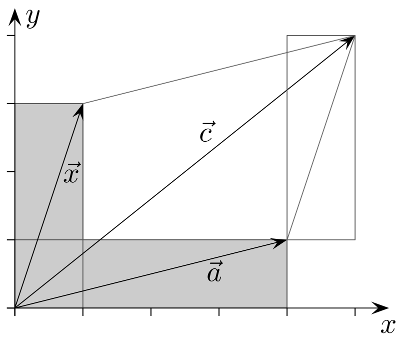


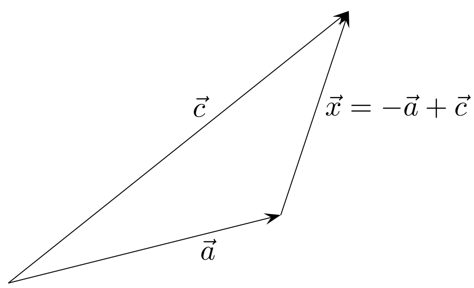


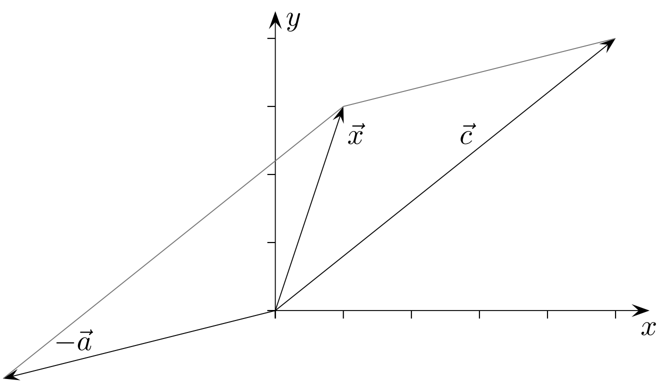
$\vec{a} + \vec{x} = \vec{c}$

Sind umgekehrt ein Summand $\vec{a}$ und die Summe $\vec{c}$ gegeben,
so kann der 2. Summand $\vec{x}$ leicht ermittelt werden.

$$\vec{a} + \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} = \vec{c} - \vec{a}$$



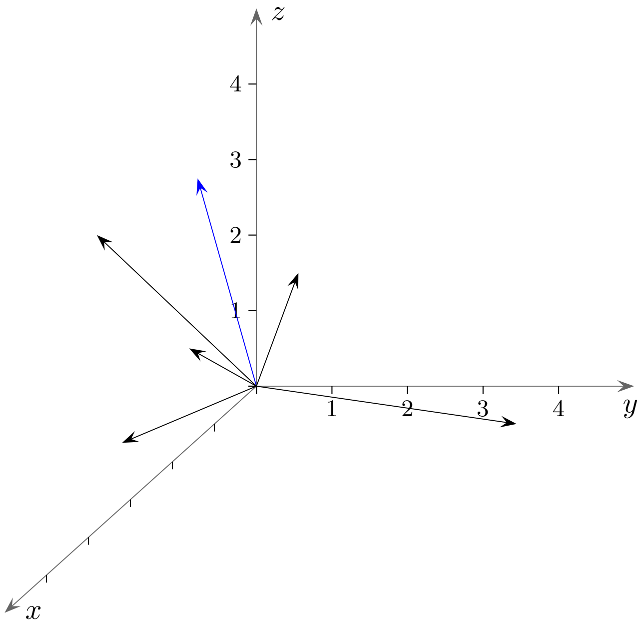


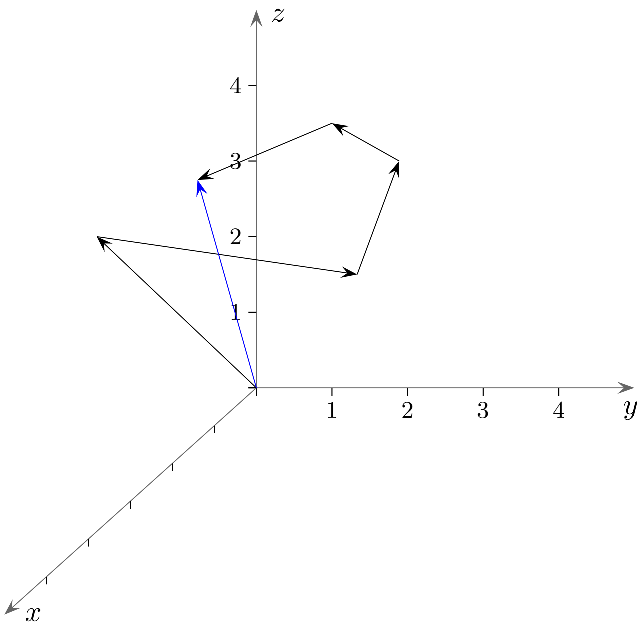


↑ Summe von Vektoren

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-2\\-0{,}5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}5\\-1{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$$

Erläutere die Abbildungen.

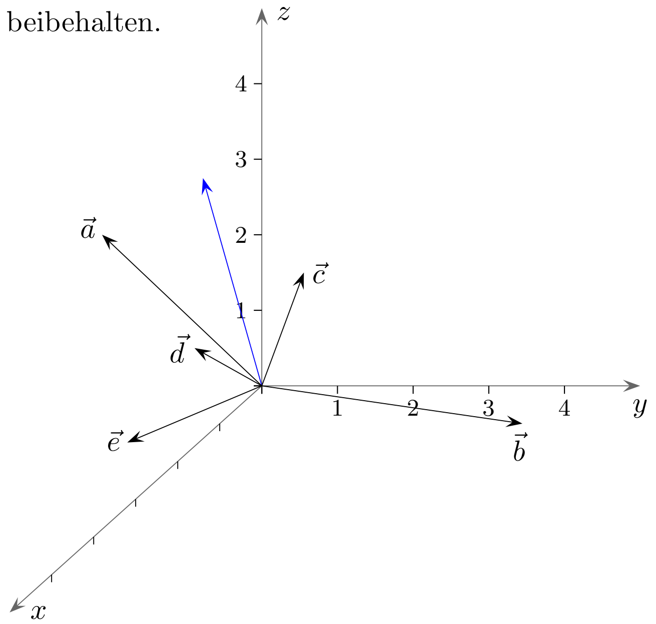


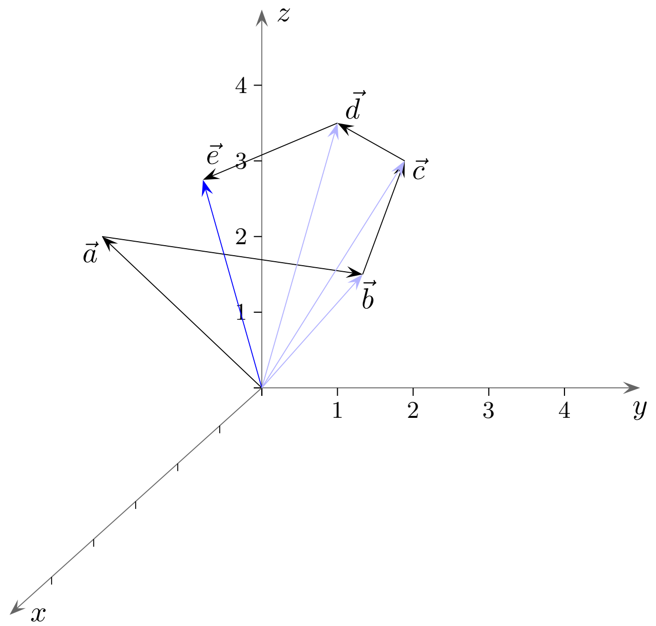


↑ Summe von Vektoren

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-2\\-0{,}5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}5\\-1{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\-0{,}5\\3\end{pmatrix}$$

Erläutere die Abbildungen.
Die Reihenfolge wird für die Bezeichnungen beibehalten.



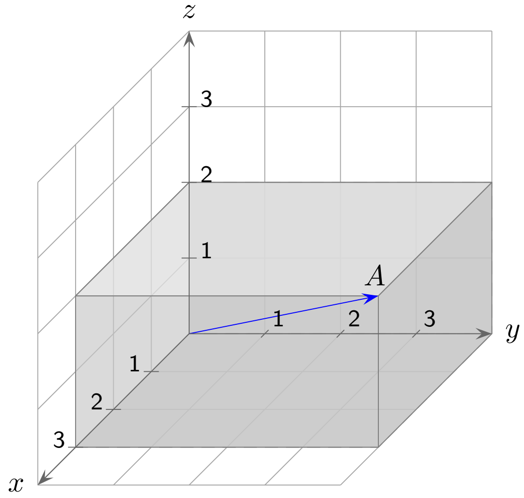


Die untere Darstellung veranschaulicht die Addition, die Summe ist unmittelbar zu erkennen.
Mit jedem Vektor kann begonnen werden, die übrigen geben die Koordinatenänderungen an.

Wir können uns auch vorstellen, stets als 1. Summand mit dem Nullvektor $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ zu beginnen, dann gibt jeder Vektor eine Koordinatenänderung an.
Der Nullpunkt wird hierdurch schrittweise verschoben.

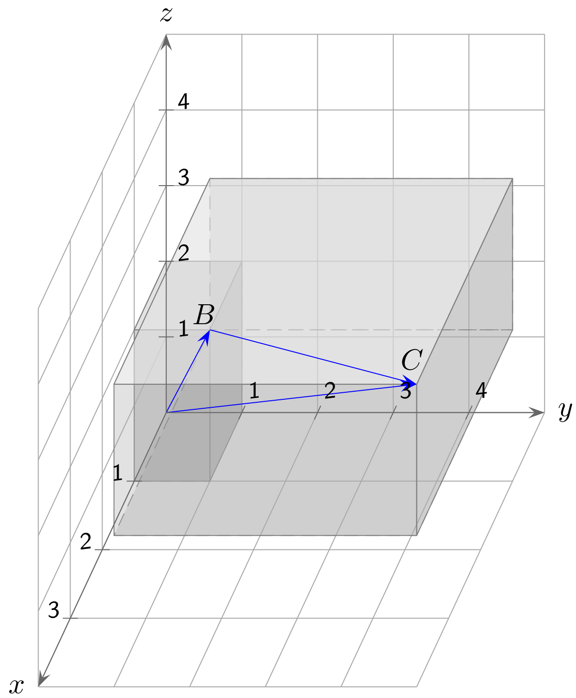
↑ Zusammengefasst

Mit Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, werden Punkte im Raum erfasst, z. B. $A(3\,|\,4\,|\,2)$ mit $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Hier spricht man von einem Ortsvektor.



Oder es wird mit dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Richtung zwischen 2 Punkten beschrieben, genauer:
Zum Ortsvektor $\vec{B}$ muss $\overrightarrow{BC}$ addiert werden, um den Ortsvektor von C zu erhalten, $\vec{B} + \overrightarrow{BC} = \vec{C}$.
Die x-Koordinate von B wird um 3 vergrößert, die y-Koordinate um 4 und die z-Koordinate um 2.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 - b_1 \\ c_2 - b_2 \\ c_3 - b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

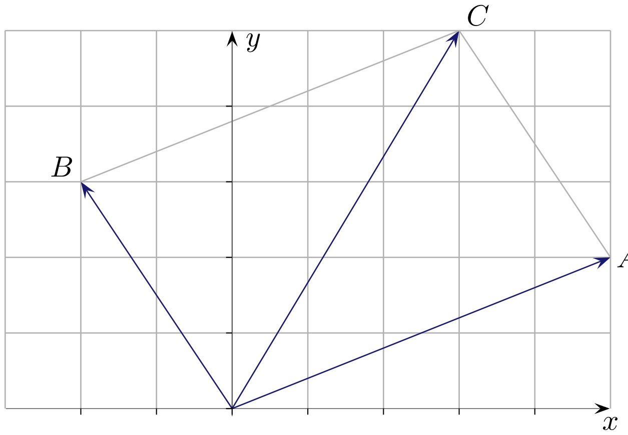


$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

verschiedene geometrische Sichtweisen ↑

Die Addition von Vektoren kann - je nach Verwendung -
unter verschiedenen Blickwinkeln betrachtet werden.

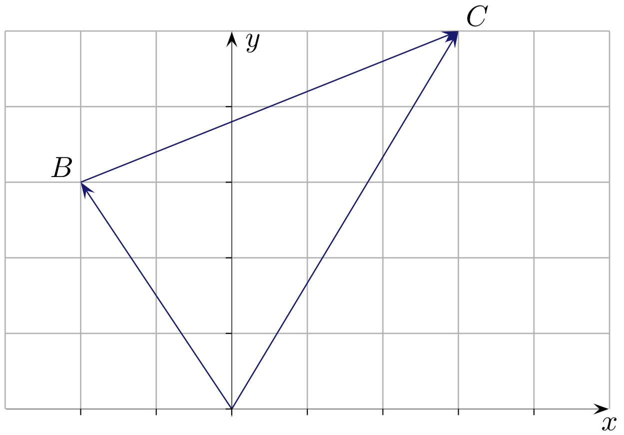
a) gebunden



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

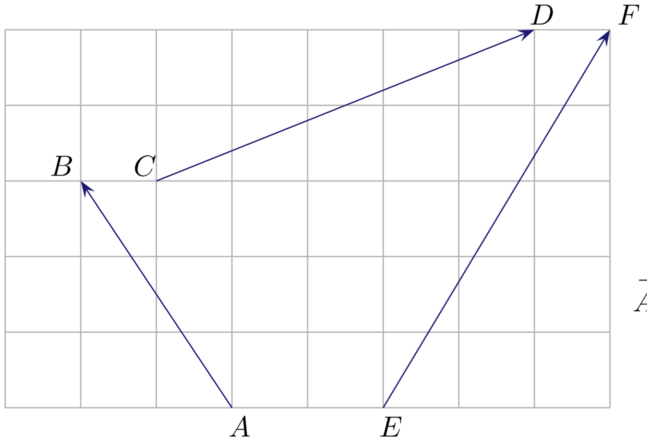
b) gebunden
mit Verbindungsvektor



$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$

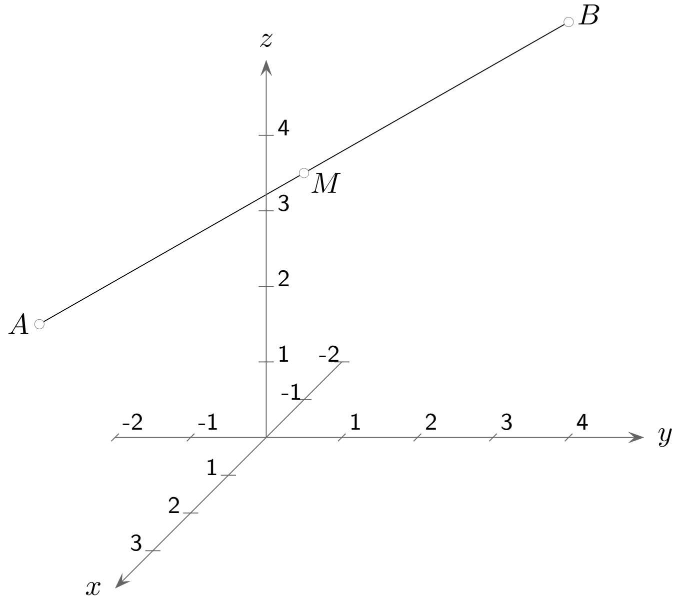
$$\vec{B} + \overrightarrow{BC} = \vec{C}$$

c) frei



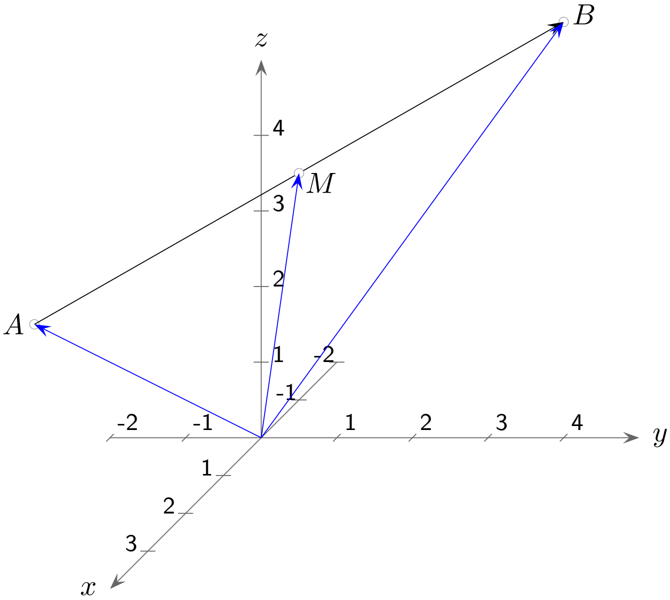
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$$

↑ Rechnen mit Vektoren, Mittelpunkt einer Strecke



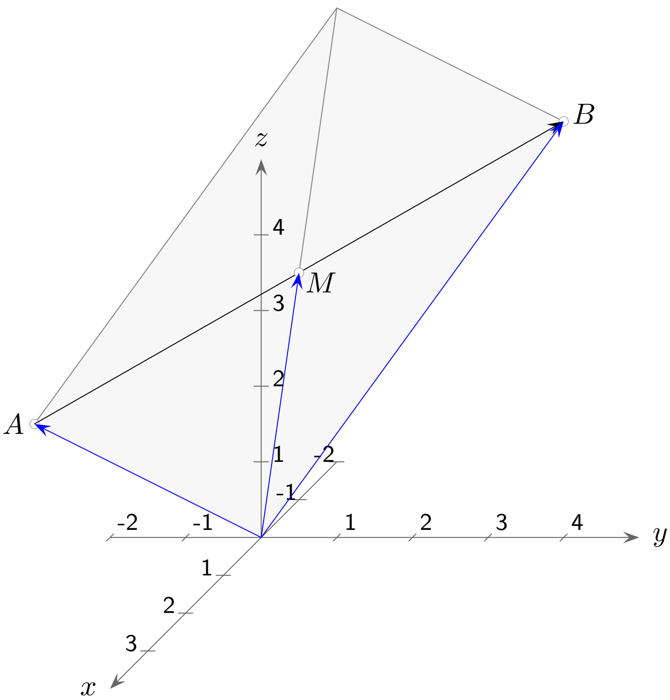
Bestimme den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit $A(4\,|\,-1\,|\,3{,}5)$ und $B(-2\,|\,3\,|\,4{,}5)$.

↑ Rechnen mit Vektoren



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}, \quad M(1\,|\,1\,|\,4)$

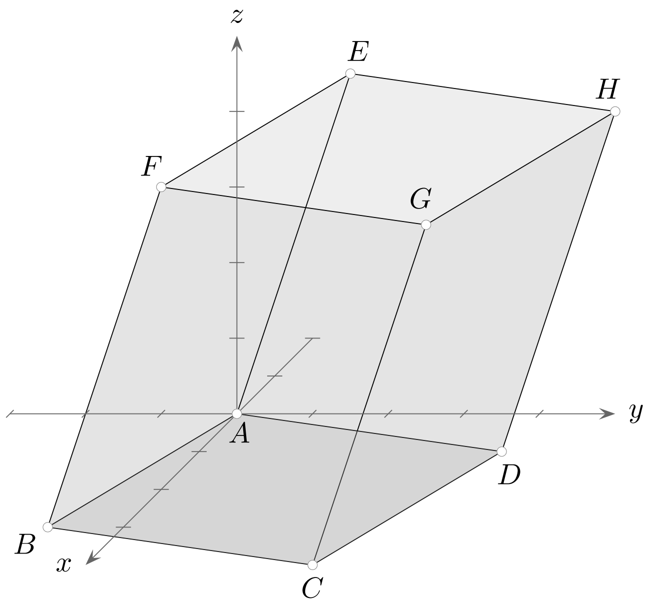
$\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

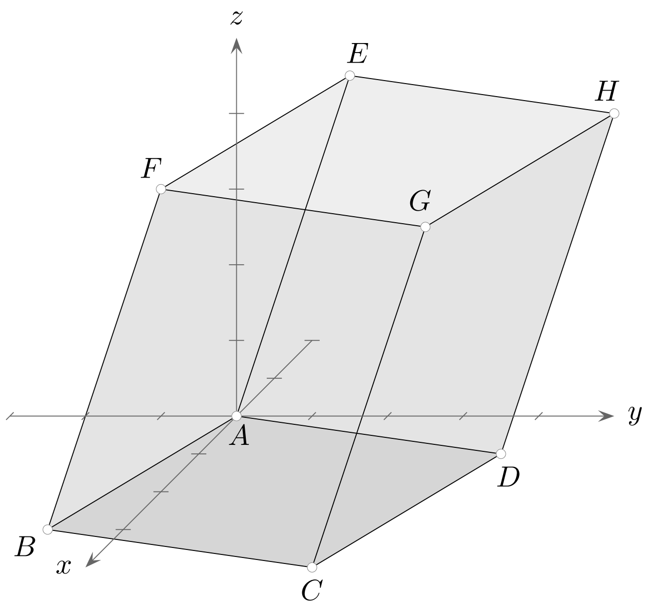
$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$

↑ Rechnen mit Vektoren, Spat



Von einem Spat (gescherter Quader) sind die Eckpunkte $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $C(4\,|\,3\,|\,0)$, $D(-1\,|\,3\,|\,-1)$ und $H(-2\,|\,4\,|\,3)$ gegeben. Bestimme die Koordinaten der anderen Eckpunkte.

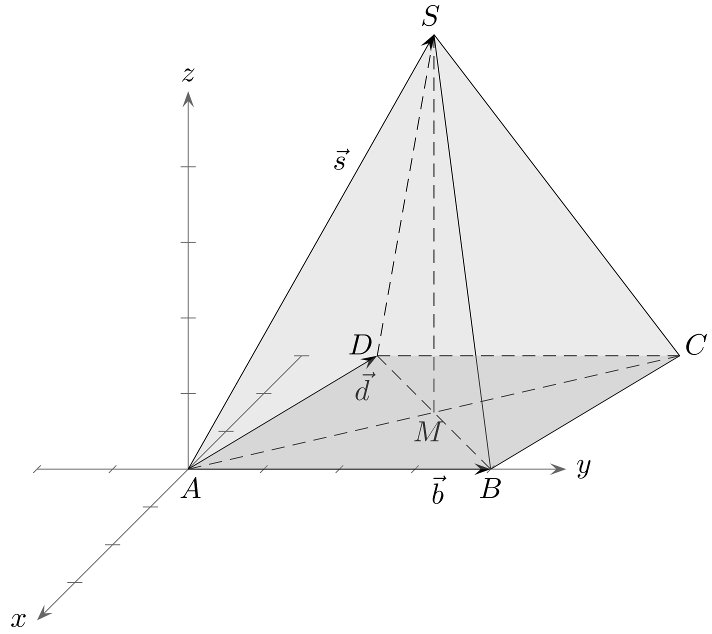
↑ Rechnen mit Vektoren



Von einem Spat (gescherter Quader) sind die Eckpunkte $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $C(4\,|\,3\,|\,0)$, $D(-1\,|\,3\,|\,-1)$ und $H(-2\,|\,4\,|\,3)$ gegeben. Bestimme die Koordinaten der anderen Eckpunkte.

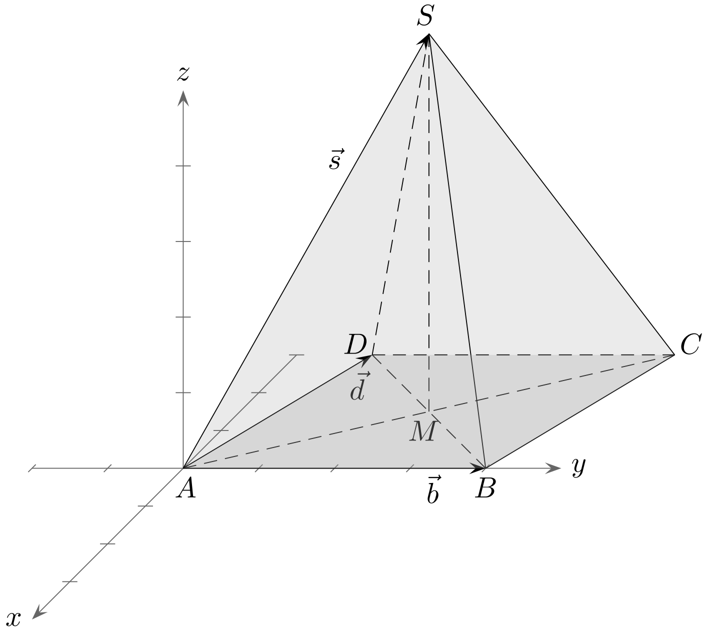
$B(5\,|\,0\,|\,1)$	$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$	$\vec{B} = \overrightarrow{DC} = \vec{C} - \vec{D}$
$E(-1\,|\,1\,|\,4)$	$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD}$	$\vec{E} = \overrightarrow{DH} = \vec{H} - \vec{D}$
$F(4\,|\,1\,|\,5)$	$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$	$\vec{F} = \vec{B} + \vec{E}$
$G(3\,|\,4\,|\,4)$		

↑ Rechnen mit Vektoren, Pyramide



Stelle die Vektoren $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{MS}$ und $\overrightarrow{CA}$ mit Hilfe der Vektoren $\vec{b}$, $\vec{d}$ und $\vec{s}$ dar.

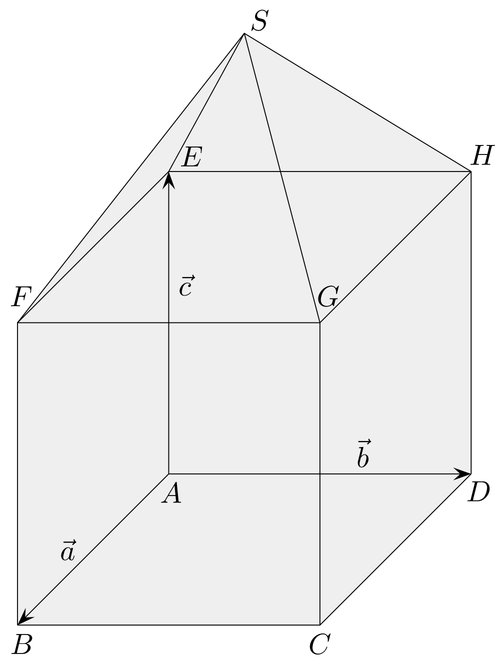
↑ Rechnen mit Vektoren



Stelle die Vektoren $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{MS}$ und $\overrightarrow{CA}$ mit Hilfe der Vektoren $\vec{b}$, $\vec{d}$ und $\vec{s}$ dar.

$\overrightarrow{SB} = \vec{b} - \vec{s}$
$\overrightarrow{CS} = -(\vec{b} + \vec{d}) + \vec{s}$
$\overrightarrow{MS} = -\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) + \vec{s}$
$\overrightarrow{CA} = -\vec{d} - \vec{b}$

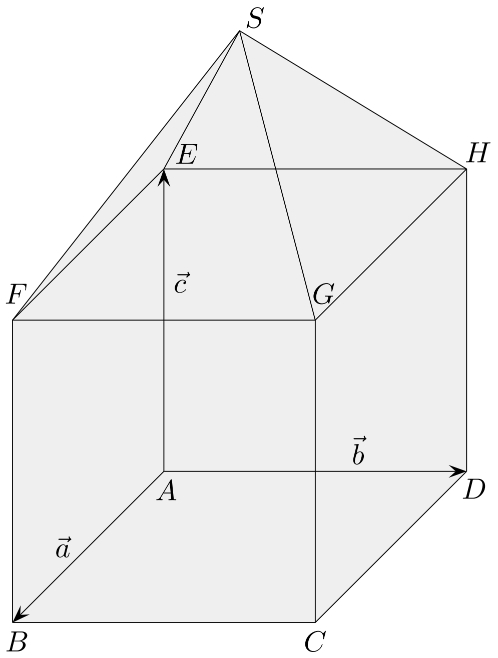
↑ Rechnen mit Vektoren, Haus



In dem abgebildeten Haus haben alle Kanten die gleiche Länge.
Stelle die folgenden Vektoren als Linearkombination der (Basis-)Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

$\overrightarrow{DB}$
$\overrightarrow{DF}$
$\overrightarrow{FA}$
$\overrightarrow{FS}$
$\overrightarrow{HS}$
$\overrightarrow{BS}$

↑ Rechnen mit Vektoren



In dem abgebildeten Haus haben alle Kanten die gleiche Länge.
Stelle die folgenden Vektoren als Linearkombination der (Basis-)Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

$$\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{DF} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{FA} = -\vec{a} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{FS} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + \sqrt{\frac{1}{2}}\,\vec{c}$$

$$\overrightarrow{HS} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \sqrt{\frac{1}{2}}\,\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BS} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + (1 + \sqrt{\frac{1}{2}})\vec{c}$$

↑ Anmerkungen zur Didaktik

Für einen reibungslosen Einstieg in die Vektorrechnung können Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ zunächst durch Pfeile, die vom Ursprung ausgehen, veranschaulicht werden.

Die Addition von Vektoren enthüllt die zweite mögliche Interpretation eines Vektors: er beinhaltet die Koordinatenänderungen eines Summanden, siehe Seite 2. Die zugehörigen Pfeile geben dann eine Richtung an und sind damit nicht mehr notwendigerweise an den Ursprung gebunden.
In dieser Darstellung begründet sich letztendlich die Anschaulichkeit der Vektorrechnung.
Das sperrige Hantieren mit Pfeilklassen, bei denen ein Ortsvektor kein Vektor, sondern ein Repräsentant eines Vektors ist, ist nicht empfehlenswert.

Die verschiedenen Bezeichnungen für Vektoren wie

Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ (Stützvektor) oder kürzer $\overrightarrow{A}$,

Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ (Verschiebungsvektor),

Richtungsvektor $\vec{u}$ (die Länge ist unerheblich)

ergeben sich daraus, ob in erster Linie ein Punkt oder eine Richtung festgelegt werden soll. Für Vektoren sind beide Interpretationen (gleichzeitig) möglich. Vektoren sind in der Geometrie daher von zwittriger Natur. Neben der Bezeichnung bestimmt der Anwendungskontext den Verwendungsschwerpunkt.

Zu jedem Punkt P und zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen Punkt Q, der sich durch Verschiebung von P ergibt, d. h. durch Abtragen des Vektors $\vec{a}$ von P aus, kurz $\vec{a}(P) = Q$ ($\vec{a}$ operiert auf den Punkten).
Die hierfür gelegentlich anzutreffende Schreibweise $Q = P + \vec{a}$ hat zur Folge,
dass in der inhaltlich richtigen Gleichung $P + (\vec{a} + \vec{b}) = (P + \vec{a}) + \vec{b}$ die Additionszeichen unterschiedliche Bedeutung haben, Antragen eines Vektors und Vektoraddition.

Der Gleichung $Q = P + \vec{a}$ kann aber auch das Rechnen mit Zahlentripeln $(a \mid b \mid c)$ bzw. Zahlenpaaren zugrunde liegen, die lediglich unterschiedlich interpretiert werden, als Punkt und als Vektor (Malle 2005).
Vertikal geschrieben sähe das z. B. so aus:

$$Q = P + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hier ist keine Addition von Punkt und Vektor gemeint, sondern z. B. die Übereinstimmung:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{oder (unübersichtlich) bei Malle} \quad (5|4) = (3|1) + (2|3)$$

Nachteilig ist, dass sich die Semantik von $C = A + \frac{1}{3}B$ nicht in der Schreibweise widerspiegelt.
Zudem ist die Notation C nicht mehr eindeutig (Punkt oder Zahlentripel).

Üblicherweise wäre z. B. $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{a}$ korrekt, von SchülerInnen manchmal mit $Q = P + \vec{a}$ abgekürzt.

Für $\overrightarrow{OQ}$ kann $\overrightarrow{Q}$ verwendet werden, z. B. $\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{P} + \vec{a}$

oder minimalistisch: $\vec{Q} = \vec{P} + \vec{a}$

Vorstellung: $\vec{a}$ wird an P angetragen, man erhält Q.
Wird $\vec{a}$ an den Nullpunkt angetragen, so wird der Vektor in dieser Verwendung als Ortsvektor bezeichnet und bestimmt damit einen Punkt im Raum.

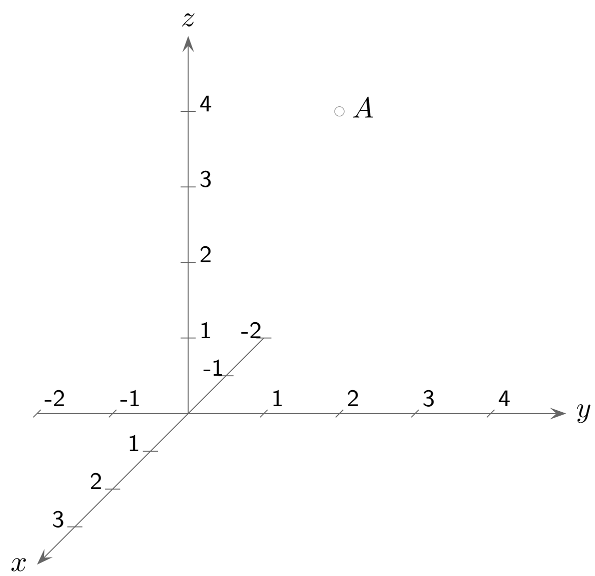
Eine Geradengleichung hätte die Form $\vec{p} = \vec{a} + s\,\vec{u}$ oder $\vec{p} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a})$ oder $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + r\,\overrightarrow{BC}$.

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und ein Punkt A (siehe Grafik).

Zeichne den Punkt

a) B mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

b) C mit $\vec{a} = \overrightarrow{OC}$.



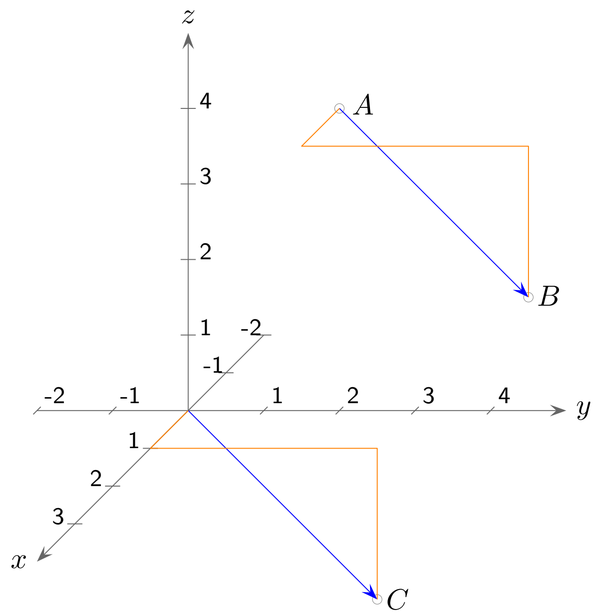
↑

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und ein Punkt A (siehe Grafik).

Zeichne den Punkt

a) B mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ Orientiere dich an den Koordinatenachsen. $\vec{a}$ ist Verbindungsvektor.

b) C mit $\vec{a} = \overrightarrow{OC}$. $\vec{a}$ ist Ortsvektor.



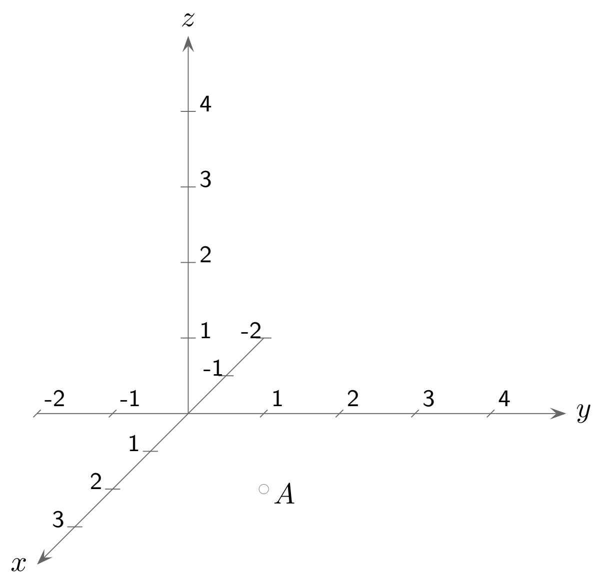
↑

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und ein Punkt A (siehe Grafik).

Zeichne den Punkt

a) B mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

b) C mit $\vec{a} = \overrightarrow{OC}$.



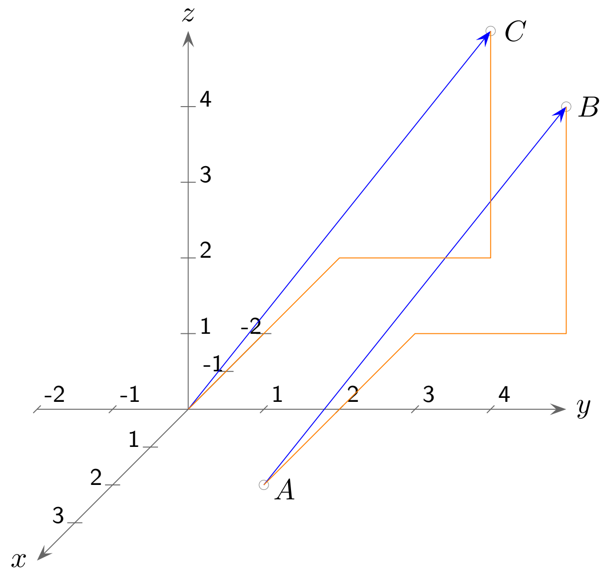
↑

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und ein Punkt A (siehe Grafik).

Zeichne den Punkt

a) B mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ Orientiere dich an den Koordinatenachsen. $\vec{a}$ ist Verbindungsvektor.

b) C mit $\vec{a} = \overrightarrow{OC}$. $\vec{a}$ ist Ortsvektor.

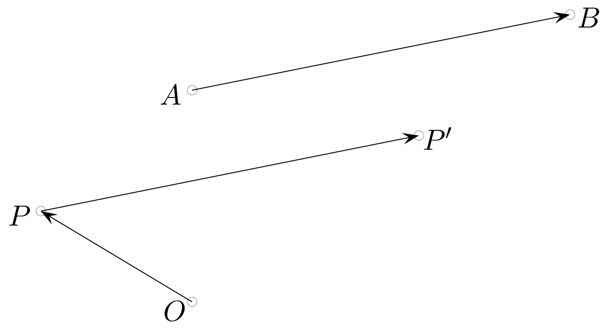


$P(-3\,|\,0\,|\,1),\ A(2\,|\,-1\,|\,3),\ B(-2\,|\,4\,|\,0)$

Verschiebe P in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AB}$.

$P(-3 \mid 0 \mid 1),\ A(2 \mid -1 \mid 3),\ B(-2 \mid 4 \mid 0)$

Verschiebe P in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AB}$.



$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$P'(-7 \mid 5 \mid -2)$

↑