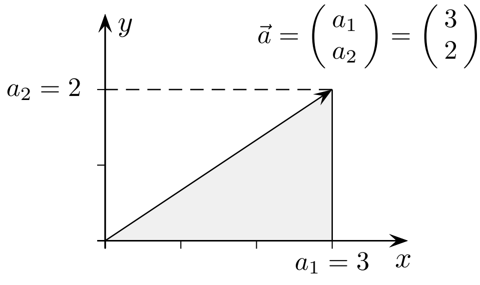
Betrag eines Vektors

Die Länge $|\,\vec{a}\,|$ oder der Betrag eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

(2-dimensional) beträgt: $\quad |\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

und für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ (3-dimensional)

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

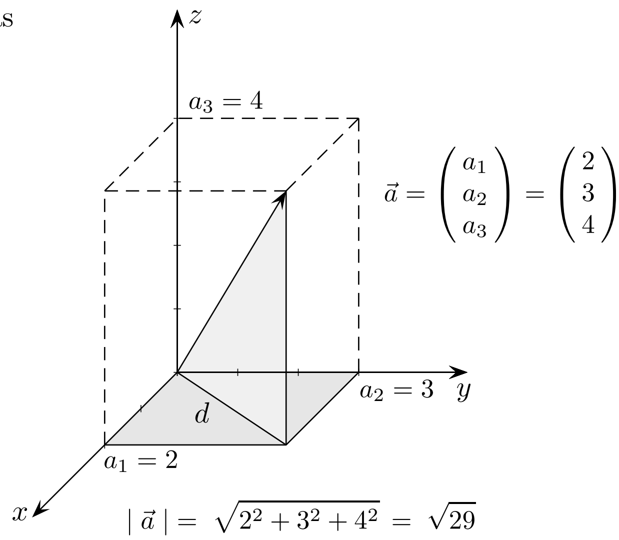


$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Dem liegt die Berechnung der Diagonale eines Rechtecks bzw. der Raumdiagonale eines Quaders zugrunde.

Um die Länge der Raumdiagonale des Quaders zu berechnen, ist als Zwischenschritt die Diagonalenlänge $d = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ der Grundfläche zu ermitteln.
Bei einer erneuten Anwendung des Satzes des Pythagoras fällt die Wurzel von d beim Quadrieren fort:

$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{d^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$



$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$

1. Wie weit ist der Punkt $B(3\,|\,-1\,|\,2)$ von $A(2\,|\,3\,|\,-4)$ entfernt?

2. Welcher Punkt P, der auf der Geraden durch $A(2\,|\,1\,|\,-3)$ in Richtung des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt, hat von A die Entfernung $d = 5$?

3. Untersuche, ob die Punkte $A(3\,|\,12\,|\,2)$, $B(1\,|\,8\,|\,6)$ und $C(5\,|\,4\,|\,4)$ zu einem Quadrat ergänzt werden können.

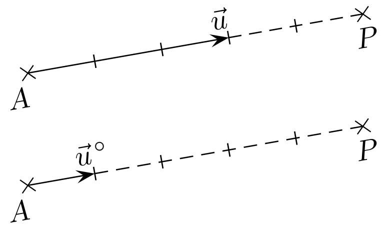
Betrag eines Vektors Lösungen

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{53}$

2. Der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Länge $|\,\vec{u}\,| = 3$. Für $\vec{u}^{\circ} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist dann $|\,\vec{u}^{\circ}\,| = 1$.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 5 \cdot \vec{u}^{\circ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P\left(\frac{16}{3} \,\middle|\, -\frac{7}{3} \,\middle|\, -\frac{4}{3}\right)$$

Vektoren wie $\vec{u}^{\circ}$ mit der Länge 1 heißen Einheitsvektoren. Mit ihnen können Punkte mit vorgegebener Entfernung und Richtung ermittelt werden.



3. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AB}| = 6\,, \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{BC}| = 6$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad D(7\,|\,8\,|\,0)$$

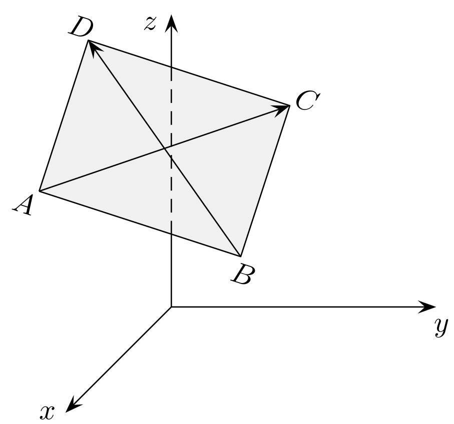
Die 4 Seiten des Vierecks sind gleich lang. Ein Quadrat liegt vor, falls gilt: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

Falls noch kein Skalarprodukt zur Verfügung steht, kann der Nachweis dadurch erbracht werden, dass $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ gezeigt wird:

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{72}$

$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{72}$

Skizze



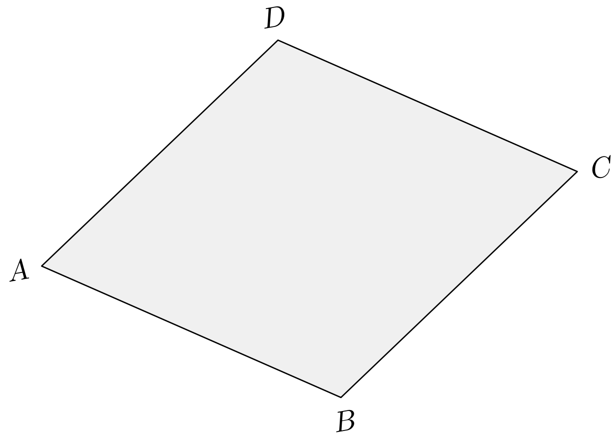
4. Gegeben sind die Eckpunkte A, B, C und D
   a) einer Raute,
   b) eines Drachenvierecks.

   Wie kann der Flächeninhalt ermittelt werden?

4. Gegeben sind die Eckpunkte A, B, C und D

   a) einer Raute,

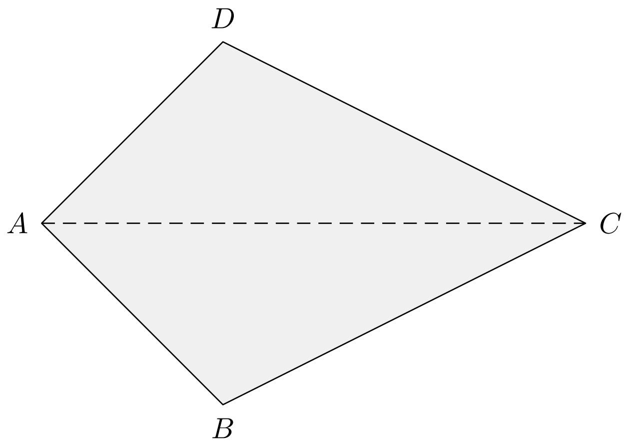
   Alle vier Seiten sind gleich lang.



   b) eines Drachenvierecks.

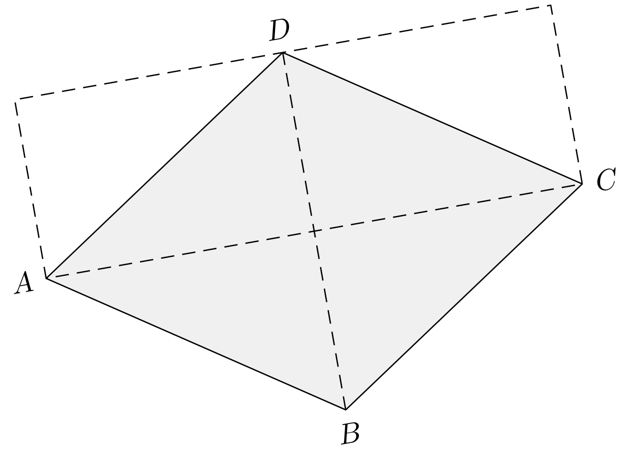
   Mindestens eine Diagonale ist Symmetrieachse.

   Wie kann der Flächeninhalt ermittelt werden?



4. Gegeben sind die Eckpunkte A, B, C und D

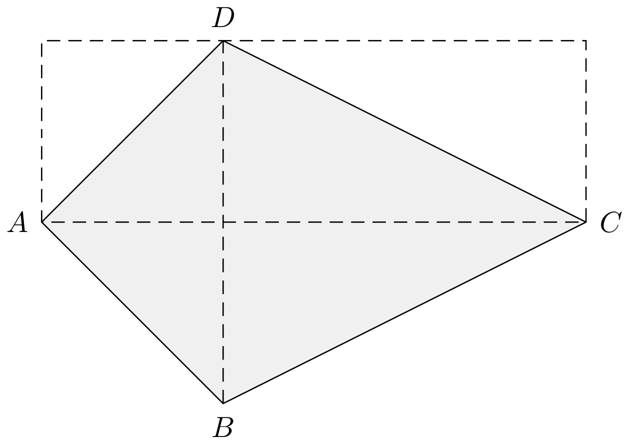
   a) einer Raute,



$$A_{\text{Raute}} = \frac{1}{2}\ |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|$$

   b) eines Drachenvierecks.

   Wie kann der Flächeninhalt ermittelt werden?



$$A_{\text{Drachenviereck}} = \frac{1}{2}\ |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|$$