Aufgaben Geraden und Ebenen

1. Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, in der die drei Punkte $A(6\,|\,-1\,|\,4)$, $B(5\,|\,4\,|\,0)$ und $C(3\,|\,-1\,|\,-5)$ liegen.

2. Ist das Viereck $A(2\,|\,0\,|\,3)$, $B(3\,|\,4\,|\,-5)$, $C(5\,|\,1\,|\,8)$, $D(6\,|\,5\,|\,0)$ eben oder nicht?

3. Wie lautet die Gleichung der Ebene E, in der der Punkt $P(3\,|\,2\,|\,4)$ und die Gerade

   $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ liegen?

4. Gegeben sei der Punkt $P(4\,|\,10\,|\,8)$ und die Gerade $g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E, in der der Punkt P und die Gerade g liegen.

   b) Untersuchen Sie, ob der Punkt $Q(5\,|\,6\,|\,4{,}5)$ in der Ebene liegt.

5. Gegeben sind die beiden Geraden g und h:

   $$g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   a) Zeigen Sie, dass sie sich schneiden.

   b) Welche Ebene (Ebenengleichung) ist durch die beiden Geraden bestimmt?

6. Wie lautet die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt $P(2\,|\,1\,|\,4)$ geht und parallel zu der Ebene E verläuft?

   $$E\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

7. Untersuchen Sie, ob die beiden Geraden

   $$g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   in einer Ebene liegen. Wenn ja, bestimmen Sie die Gleichung der Ebene.

8. Gegeben sind die beiden Geraden

   $$g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ -6 \\ b \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie a und b so, dass g parallel zu h verläuft.

9. Gegeben ist die Ebene $E\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

   a) Bestimmen Sie für die Gerade $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ a \end{pmatrix}$ a so, dass h parallel zu E verläuft.

   b) Zeigen Sie, dass für $a = 3$ die Gerade h in E verläuft.

10. Gegeben sind die beiden Geraden

$$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad h:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kann a so gewählt werden, dass sich die Geraden schneiden?

11. Gegeben ist die Geradenschar

$$g_t:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 2-2t \\ 5t+4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Liegt der Punkt $A(2\,|\,10\,|\,-7)$ auf einer der Geraden?

b) Schneidet eine der Geraden die z-Achse?

12. Gegeben sind die Punkte $P(2\,|\,0\,|\,1)$ und $Q(2\,|\,4\,|\,9)$ sowie die parallelen Geraden

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass g und h nicht identisch sind.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade, die parallel zu g und h ist und die Strecke $\overline{PQ}$ im Punkt T schneidet, wobei $3 \cdot |\overline{PT}| = |\overline{QT}|$ ist.

13. Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,2\,|\,2)$, $B(4\,|\,-1\,|\,z)$ und $C(-3\,|\,y\,|\,6)$.

a) B liegt auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}75 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Wert von z.

b) Zeigen Sie, dass der Abstand von A und C mindestens 5 beträgt.

Aufgaben Geraden und Ebenen

1. Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, in der die drei Punkte $A(6\,|\,-1\,|\,4)$, $B(5\,|\,4\,|\,0)$ und $C(3\,|\,-1\,|\,-5)$ liegen.
   z.B. $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AC}$, ...

2. Ist das Viereck $A(2\,|\,0\,|\,3)$, $B(3\,|\,4\,|\,-5)$, $C(5\,|\,1\,|\,8)$, $D(6\,|\,5\,|\,0)$ eben oder nicht?
   ja, D liegt in der Ebene durch A, B und C.

3. Wie lautet die Gleichung der Ebene E, in der der Punkt $P(3\,|\,2\,|\,4)$ und die Gerade
   g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ liegen?
   $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + \mu \left[\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right]$

4. Gegeben sei der Punkt $P(4\,|\,10\,|\,8)$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}$.
   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E, in der der Punkt P und die Gerade g liegen.
   b) Untersuchen Sie, ob der Punkt $Q(5\,|\,6\,|\,4{,}5)$ in der Ebene liegt. Q liegt nicht in der Ebene.

5. Gegeben sind die beiden Geraden g und h:
   $$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix} \qquad h:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-1\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$
   a) Zeigen Sie, dass sie sich schneiden. $S(5\,|\,0{,}5\,|\,3{,}5)$
   b) Welche Ebene ist durch die beiden Geraden bestimmt? Richtungsvektoren werden übernommen.

6. Wie lautet die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt $P(2\,|\,1\,|\,4)$ geht und parallel zu der Ebene E verläuft?
   $$E:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$$

7. Untersuchen Sie, ob die beiden Geraden
   $$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix} \qquad h:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\8\\-5\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$$
   in einer Ebene liegen. Wenn ja, bestimmen Sie die Gleichung der Ebene. $S(2\,|\,0\,|\,-1)$, ...

8. Gegeben sind die beiden Geraden
   $$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad h:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}a\\-6\\b\end{pmatrix}$$
   Bestimmen Sie a und b so, dass g parallel zu h verläuft. $a = -3$, $b = 3$

9. Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\-8\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}$
   a) Bestimmen Sie für die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\-9\\a\end{pmatrix}$ a so, dass h parallel zu E verläuft. $a = 3$
   b) Zeigen Sie, dass für $a = 3$ die Gerade h in E verläuft. $P(-2\,|\,6\,|\,4)$ liegt in E.

10. Gegeben sind die beiden Geraden

$$g\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kann a so gewählt werden, dass sich die Geraden schneiden? ja, $a = 2$, $S(2\,|\,{-6}\,|\,4)$

11. Gegeben ist die Geradenschar

$$g_t\colon \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 2-2t \\ 5t+4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Liegt der Punkt $A(2\,|\,10\,|\,{-7})$ auf einer der Geraden? ja, $s = 2$, $t = -3$

b) Schneidet eine der Geraden die z-Achse? ja, $s = 0$, $t = 1$, $P(0\,|\,0\,|\,9)$

12. Gegeben sind die Punkte $P(2\,|\,0\,|\,1)$ und $Q(2\,|\,4\,|\,9)$ sowie die parallelen Geraden

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass g und h nicht identisch sind. P liegt nicht auf h oder Q liegt nicht auf g oder $\overline{PQ}$ ist nicht kollinear zum Richtungsvektor.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade, die parallel zu g und h ist und die Strecke $\overline{PQ}$ im Punkt T schneidet, wobei $3 \cdot |\overline{PT}| = |\overline{QT}|$ ist.

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

13. Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,2\,|\,2)$, $B(4\,|\,{-1}\,|\,z)$ und $C(-3\,|\,y\,|\,6)$.

a) B liegt auf der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}75 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Wert von z. Die erste Koordinate liefert $0 - r = 4 \iff r = -4$
Einsetzen ergibt $z = 2 + 8 = 10$

b) Zeigen Sie, dass der Abstand von A und C mindestens 5 beträgt. $|\overrightarrow{AC}\,| = \sqrt{9 + (y-2)^2 + 16}$
Wegen $(y-2)^2 \geq 0$ beträgt der Abstand von A und C mindestens $\sqrt{9+16} = 5$.

Flugbewegungen

Die geradlinige Flugbahn eines Flugobjekts wird mit einer Geradengleichung $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{u}$ erfasst.
Wir suchen eine Geradengleichung der Flugbahn, bei der die Geschwindigkeit berücksichtigt wird und der Parameter die Zeit darstellt.
Eine Positionsbestimmung zu verstrichener Zeit ist besonders einfach, wenn bekannt ist, dass das Flugobjekt sich in n Zeiteinheiten um den Vektor $\vec{u}$ weiter bewegt, sich daher für eine Zeiteinheit um $\frac{1}{n}\vec{u}$ und in der Zeit t um $t \cdot \frac{1}{n}\vec{u}$ weiter bewegt (Dreisatz). Die Bewegungsgleichung lautet daher $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \frac{1}{n}\vec{u}$.

Mit $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}^{\circ}$ bewegt sich das Flugobjekt in der Zeiteinheit um eine Längeneinheit, $\vec{u}^{\circ} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$ ist der Einheitsvektor mit der Länge 1.
Mit einer vorgegebenen Geschwindigkeit v lautet die Bewegungsgleichung $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot v\vec{u}^{\circ}$.
Beachte: Die Flugbahn wurde nicht verändert.

1. Ein Segelflugzeug wird um 11.00 Uhr im Punkt $A(5\,|\,1\,|\,3)$ und um 11.40 Uhr im Punkt $B(5\,|\,4\,|\,7)$ gesichtet (Angaben in Kilometer).
   a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde.
   b) Bestimmen Sie die Position des Flugzeugs nach 2 Stunden.

2. Ein Flugzeug befindet sich um 9.00 Uhr im Punkt $A(10\,|\,8\,|\,12)$ und fliegt mit konstanter Geschwindigkeit von 800 km/h in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Angaben in Kilometer).

   Bestimmen Sie die Position des Flugzeugs um 9.30 Uhr.

1. Ein Segelflugzeug wird um 11.00 Uhr im Punkt $A(5\,|\,1\,|\,3)$ und um 11.40 Uhr im Punkt $B(5\,|\,4\,|\,7)$ gesichtet (Angaben in Kilometer).

   a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde.

   $$v = \frac{|\overrightarrow{AB}|\text{ km}}{40\text{ min}} = \frac{5\cdot 60\text{ km}}{40\text{ h}} = 7{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

   b) Bestimmen Sie die Position des Flugzeugs nach 2 Stunden.

   Für die Position P nach einer Minute gilt: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{40}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{40}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$

   und nach 120 Minuten: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{120}{40}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}$

   Alternativ kann mit $40\text{ min} = \frac{2}{3}\text{ h}$ in Stunden gerechnet werden.

2. Ein Flugzeug befindet sich um 9.00 Uhr im Punkt $A(10\,|\,8\,|\,12)$ und fliegt mit konstanter Geschwindigkeit von 800 km/h in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$ (Angaben in Kilometer).

   Bestimmen Sie die Position des Flugzeugs um 9.30 Uhr.

   Das Flugzeug bewegt sich auf der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\8\\12\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$

   Die Bewegungsgleichung lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\8\\12\end{pmatrix} + t\cdot\frac{800}{5}\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$

   Nach 0,5 Stunden gilt für die Position P des Flugzeugs: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}10\\8\\12\end{pmatrix} + 0{,}5\cdot\frac{800}{5}\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-230\\328\\12\end{pmatrix}$