

Aufgaben Ebenen (Normalenform) und Schnitte

1. Untersuchen Sie, ob die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

zu einer der Seitengeraden des Dreiecks $A(2|5|0)$ $B(6|3|3)$ $C(6|1|4)$ parallel oder sogar mit ihr gleich ist.

2. Wo durchstößt die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

die durch die drei Punkte $A(0|0|-1)$, $B(1|0|1)$, $C(0|1|0)$ festgelegte Ebene?

3. Untersuchen Sie die folgenden Ebenen auf Parallelität und Gleichheit:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Liegt der Ursprung in der Ebene, die durch die Punkte $A(0|-4|2)$, $B(4|1|-3)$, $C(0|2|-1)$ festgelegt ist?

5. Berechnen Sie den Schnittpunkt von Gerade und Ebene:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E: \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ $E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$

6. Berechnen Sie den Schnittpunkt von Gerade und Ebene:

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 5 = 0$

7. Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Prüfen Sie, ob der Punkt $A(5|-2|1)$ in der Ebene liegt.

b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, die durch A und senkrecht zu E verläuft.

8. Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Gerade g verläuft durch $P(9 \mid -15 \mid 7)$ und $Q(-3 \mid -11 \mid 1)$.

- a) Wie lautet der Schnittpunkt von g und E ?
- b) Zeigen Sie, dass g senkrecht zu E verläuft.

Vektorrechnung Ergebnisse

1. Die Gerade g ist parallel zur Seitengeraden $\vec{x} = \vec{OC} + \lambda(\vec{OA} - \vec{OC})$, sie sind jedoch nicht gleich. Um dies zu zeigen, wird nachgewiesen, dass ein Punkt der einen Geraden nicht auf der anderen liegt.

2. Eine Normalenform der Ebene lautet:

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 1 = 0$$

Mit $\lambda = 2$ erhalten wir den Schnittpunkt $S(3,5 | -2 | 4)$.

3. Die Normalenvektoren (Vektorprodukt) von E_1 und E_2 lauten: $\begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$,

die Normalenvektoren sind kollinear, daher sind die Ebenen parallel.

Die Normalenform von E_1 lautet: $\begin{pmatrix} -12 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 42 = 0$, durch Einsetzen kann nun leicht bestätigt werden, dass der Stützvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ von E_2 zu einem Punkt von E_1 führt. Die Ebenen sind gleich.

4. Die Normalenform der Ebene lautet: $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$. Wie zu sehen ist, liegt der Ursprung $O(0 | 0 | 0)$ auf der Ebene.

5. a) $\lambda = 2, \quad S(7 | 0 | 1)$ b) $\lambda = -3, \quad S(-11 | 22 | -15)$

6. a) $\lambda = 2, \quad S(6 | -3 | 1)$ b) $\lambda = 4, \quad S(33 | -9 | 7)$

7. a) Die Normalenform von E lautet: $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1 = 0$. Durch Einsetzen kann nun leicht

bestätigt werden, dass der Punkt $A(5 | -2 | 1)$ auf der Ebene liegt.

- b) Eine Geradengleichung lautet: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

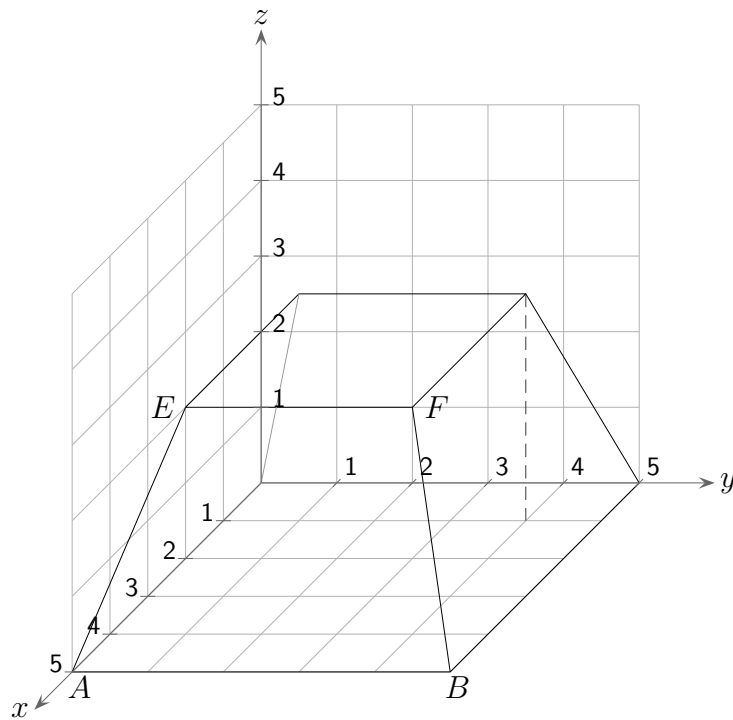
8. a) Die Normalenform von E lautet: $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 56 = 0$

b) Eine Geradengleichung von g lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ ergibt den Schnittpunkt $S(3 \mid -13 \mid 4)$.

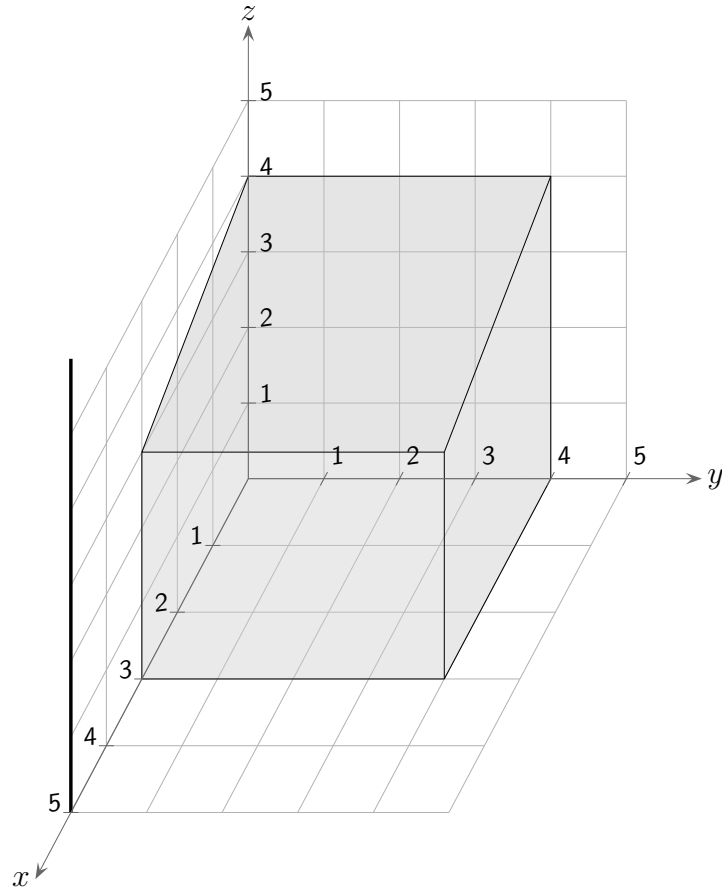
c) Der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E sind kollinear.

Verschattung



1. Der Sockel ist symmetrisch und hat die Höhe $h = 3$.
Wir betrachten Schatten in der xy -Ebene.
 - a) Welche Richtung müsste das (parallel) einfallende Sonnenlicht haben, damit es senkrecht auf die Fläche $ABFE$ trifft?
 - b) Welche Richtung müsste das (parallel) einfallende Sonnenlicht haben, damit der Schattenpunkt von E B wäre?
Berechne die übrigen Schattenpunkte und zeichne den Schatten.
 - c) Sonnenlicht fällt nun in der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf den Sockel.
Berechne den Inhalt des Schattens.

Verschattung



2. Sonnenlicht fällt in der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Berechne die Länge des Schattens, den der Mast (Länge 6 m) auf den Anbau wirft.
Zeichne den Schatten.

Verschattung Ergebnisse

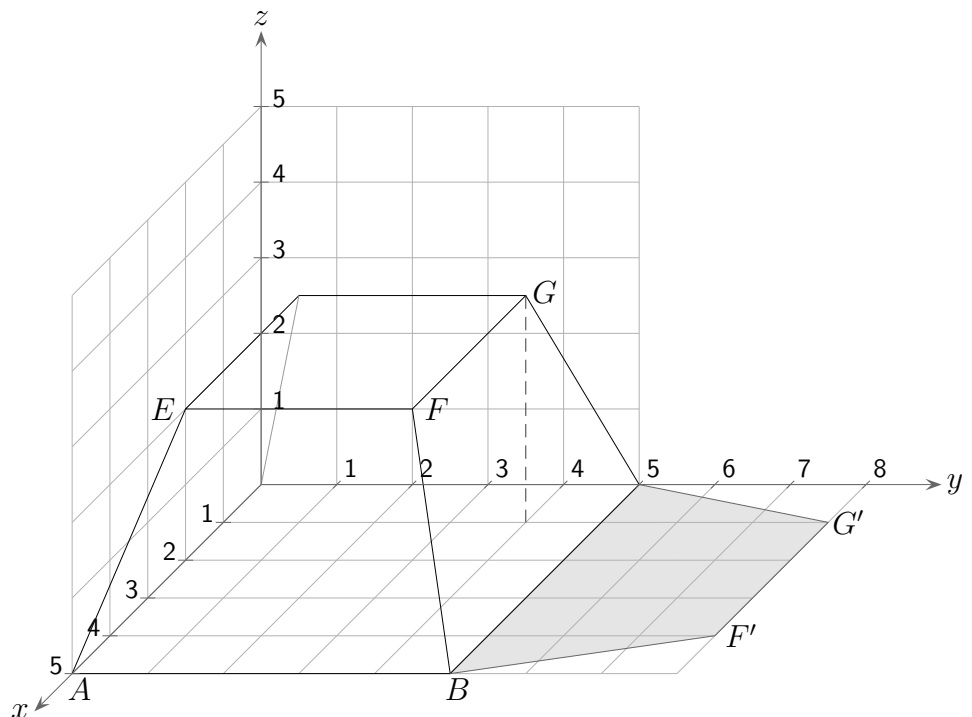
1. a) Welche Richtung müsste das (parallel) einfallende Sonnenlicht haben, damit es senkrecht auf die Fläche $ABFE$ trifft? $3x + z = 15$, $\vec{a} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- b) Welche Richtung müsste das (parallel) einfallende Sonnenlicht haben, damit der Schattenpunkt von E B wäre? $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Berechne die übrigen Schattenpunkte und zeichne den Schatten.

$$F'(5 \mid 8 \mid 0)$$

$$G'(2 \mid 8 \mid 0)$$



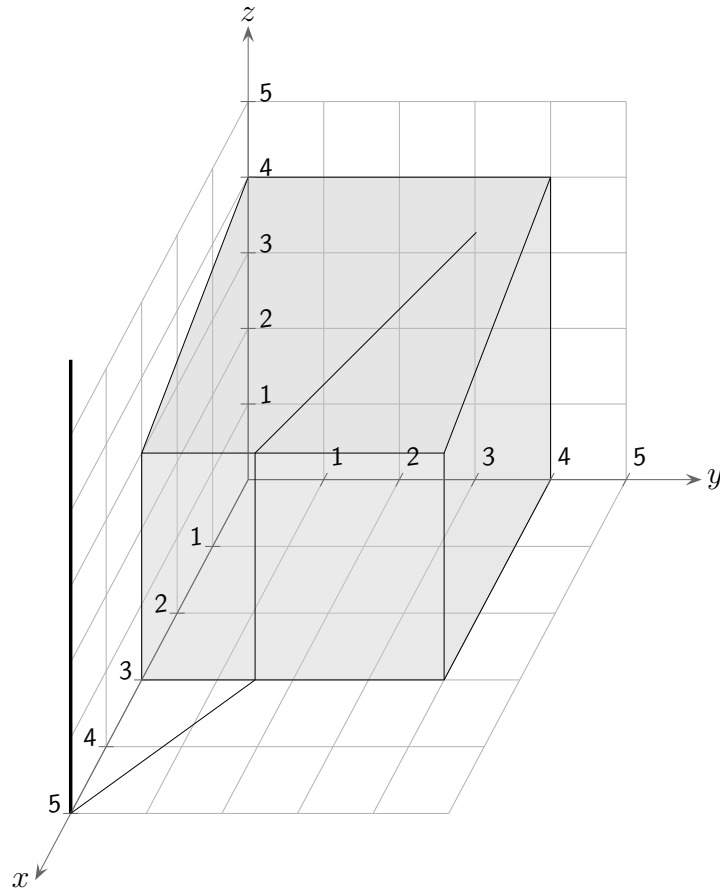
- c) Sonnenlicht fällt nun in der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf den Sockel. Berechne den Inhalt des Schattens.

$$F'(4 \mid 10 \mid 0)$$

$$G'(1 \mid 10 \mid 0)$$

$$A_{\text{symm. Trapez}} = 20 FE$$

Verschattung Ergebnisse



2. Sonnenlicht fällt in der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Berechne die Länge des Schattens, den der Mast (Länge 6 m) auf den Anbau wirft.
Zeichne den Schatten.

$$\text{Dachfläche} \quad x + 3z = 12$$

$$\text{Schattenpunkt auf dem Dach} \quad S' \left(\frac{3}{5} \mid \frac{33}{10} \mid \frac{19}{5} \right)$$

$$\text{Schattenpunkt auf der Dachkante} \quad D' \left(3 \mid \frac{3}{2} \mid 3 \right)$$

$$L_{\text{Schatten}} = 6,105 \text{ LE}$$